

Test O

(opravný)

10. ledna 2006

A1. (2 body) Najděte infimum množiny $M = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3 > 0\}$.

A2. (10 bodů) Zjistěte, pro která reálná čísla x platí nerovnost

$$\left| \frac{x+3}{x-3} \right| < 3.$$

A3. (10 bodů) Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n}{2}(3n + 1).$$

A4. (18 bodů) Podle definice pojmu limity dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n-3} = 1.$$

B1. (4 body) Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \log_3(x-1)^3$ sudá, lichá, ...

B2. (6 bodů) Pro která reálná čísla x není funkce z předchozího příkladu spojitá?

B3. (15 bodů) Najděte podmnožinu $P \subseteq \mathbb{R}$, na níž je funkce

$$f(x) = 1 + \sqrt[3]{3^x}$$

prostá. Pak najděte předpis pro inverzní funkci a určete její definiční obor.

B4. (15 bodů) Podle definice pojmu limity dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-3}{3} \right) = -\frac{2}{3}.$$

C1. (40 bodů) Analyzujte funkci

$$f(x) = \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^2.$$

Přitom za úplnou odpověď se považuje graf popsany a sestrojený na základě řešení následujících úkolů (ne nutně v tomto pořadí):

- a. definiční obor $D(f)$
- b. sudost, lichost, . . .
- c. spojitost, limity na hranici $D(f)$, nulové body a pod.
- d. diferencovatelnost, extrémy, rostoucnost, klesajícícnost
- e. vypuklosti, inflexní body a tečny v inflexních bodech
- f. asymptoty
- g. obor hodnot $H(f)$