

Obsah

1	Neurčitý integrál	7
1.1	Základné pojmy a vzťahy	7
1.1.1	Základné neurčité integrály	9
1.1.2	Cvičenia	11
1.1.3	Výsledky	11
1.2	Metódy počítania neurčitého integrálu	12
1.2.1	Substitučná metóda	12
1.2.2	Cvičenia	16
1.2.3	Výsledky	17
1.2.4	Metóda per partes (integrovanie po častiach)	18
1.2.5	Výsledky	23
1.3	Integrovanie elementárnych funkcií	24
1.3.1	Integrovanie racionálnych funkcií	24
1.3.2	Integrovanie trigonometrických funkcií	28
1.3.3	Integrovanie iracionálnych funkcií	32
1.3.4	Integrovanie transcendentných funkcií	36
1.3.5	Záver	37
2	Určitý integrál	39
2.1	Pojem určitého integrálu	39
2.1.1	Cvičenia	42
2.1.2	Výsledky	43
2.2	Metódy počítania určitého integrálu	43
2.2.1	Cvičenia	45
2.2.2	Výsledky	46
2.3	Vlastnosti určitého integrálu	47
2.3.1	Cvičenia	50
2.3.2	Výsledky	51
2.4	Integrály s premennou hranicou	52
2.4.1	Cvičenia	53
2.4.2	Výsledky	54
2.5	Nevlastné integrály	54
2.5.1	Nevlastné integrály prvého druhu	54
2.5.2	Nevlastné integrály druhého druhu	57
2.5.3	Cvičenia	58
2.5.4	Výsledky	59
2.6	Použitie určitého integrálu	60

2.7	Použitie určitého integrálu v geometrii	60
2.7.1	Obsah rovinnej oblasti	60
2.7.2	Objem telies	64
2.7.3	Dĺžka krivky	66
2.7.4	Obsah povrchu rotačnej plochy	68
2.7.5	Výpočet súradníc ťažiska	70
2.7.6	Guldinove vety	72
2.8	Použitie určitého integrálu vo fyzike	74
2.8.1	Práca	74
2.8.2	Tlaková sila	75
2.9	Približné integrovanie funkcií	77
3	Obyčajné diferenciálne rovnice	83
3.1	Základné pojmy	83
3.2	Diferenciálna rovnica prvého rádu	86
3.3	ODR so separovateľnými premennými	88
3.4	LDR prvého rádu	93
3.5	LDR vyšších rádov	96
3.6	LDR s konštantnými koeficientami	99
3.7	Systémy diferenciálnych rovníc	108
3.8	Numerické metódy riešenia začiatočných úloh	114
3.8.1	Úvod	114
3.8.2	Eulerova metóda	115
3.8.3	Metódy typu Runge-Kutta	118
4	Diferenciálny počet funkcií viac premenných	125
4.1	Funkcie dvoch a viac premenných	125
4.1.1	Základné pojmy	125
4.1.2	Limita funkcie dvoch a viac premenných	128
4.2	Parciálne derivácie a diferencovateľnosť	132
4.2.1	Parciálne derivácie	132
4.2.2	Linearizácia, dotyková rovina a diferenciál	134
4.2.3	Vyššie derivácie a reťazové pravidlá	136
4.2.4	Gradient a derivácia v smere	138
4.3	Extrémy funkcií viac premenných	141
4.3.1	Lokálne extrémy	141
4.3.2	Viazané extrémy	143
4.3.3	Globálne extrémy	146
4.4	Rozličné úlohy	148
4.5	Výsledky	153
5	Diferenciálna geometria	161
5.1	Úvod	161
5.2	Pojem krivky	161
5.2.1	Vektorová funkcia	161
5.2.2	Vektorová rovnica krivky	162
5.2.3	Parametrické, explicitné a implicitné rovnice krivky	163
5.2.4	Regulárna krivka	164

5.2.5	Transformácia parametra krivky	164
5.2.6	Orientácia krivky	165
5.2.7	Dĺžka krivky, prirodzená parametrizácia krivky	165
5.3	Sprievodný trojhran	167
5.3.1	Dotyčnica krivky	167
5.3.2	Oskulačná rovina krivky	168
5.3.3	Hlavná normála a binormála krivky	169
5.3.4	Normálová a rektifikačná rovina krivky	170
5.3.5	Sprievodný trojhran v prirodzenej parametrizácii	171
5.4	Charakteristiky krivky	173
5.4.1	Krivosť krivky	173
5.4.2	Kružnica krivosti krivky, evolúta, evolventa	174
5.4.3	Torzia krivky	174
5.4.4	Frenetove-Serretove vzorce	175
5.4.5	Prirodzené rovnice krivky	176
5.5	Rovinné krivky	177
5.5.1	Rovnice rovinatej krivky	177
5.5.2	Dĺžka rovinatej krivky	179
5.5.3	Dotyčnica a normála rovinatej krivky	179
5.5.4	Krivosť rovinatej krivky	181
5.5.5	Kružnica krivosti rovinatej krivky	182
5.5.6	Evolúta, evolventa	183
5.5.7	Prirodzené rovnice rovinatej krivky	183

Kapitola 1

Neurčitý integrál

1.1 Základné pojmy a vzťahy

Funkcia F je *primitívnou funkciou* k funkcii f v intervale (a, b) práve vtedy, ak pre každé $x \in (a, b)$ platí:

$$F'(x) = f(x).$$

Z definície vidíme, že pojem primitívnej funkcie je opačný k pojmu derivácie. Tento fakt využívame pri hľadaní primitívnych funkcií k základným funkciám.

Príklad 1. Nájdeme primitívnu funkciu k funkcii

- a) $y = x$ v intervale $(-1, 1)$,
- b) $y = x$ v intervale $(-\infty, \infty)$,
- c) $y = x^n$, $n \in \mathcal{N}$ v intervale $(-\infty, \infty)$,
- d) $y = \frac{1}{x}$ v intervale $(0, \infty)$,
- e) $y = \frac{1}{x}$ v intervale $(-\infty, 0)$.

Riešenie:

- a) Hľadáme funkciu F , ktorej derivácia je pre každé $x \in (-1, 1)$ rovná x . Vieme, že pri derivácii mocninatej funkcie je výsledkom mocninná funkcia s exponentom zníženým o 1 a násobená pôvodným exponentom: $(x^a)' = ax^{a-1}$, pre $a \neq 0$. Z tohoto faktu dostaneme, že primitívnu funkciu k funkcii $y = x$ v intervale $(-1, 1)$ bude nejaký násobok funkcie $y = x^2$ a po krátkom experimentovaní určíme, že je to funkcia $y = \frac{x^2}{2}$.
- b) Keďže všetky úvahy v riešení predchádzajúceho príkladu ostávajú v platnosti aj pre interval $(-\infty, \infty)$, riešením je tá istá funkcia.
- c) Po úvahách analogických ako v predchádzajúcich častiach dostávame, že primitívnu funkciu je funkcia $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Môžeme praviť skúšku správnosti:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n,$$

pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$.

- d) Snažíme sa nájsť funkciu, ktorej deriváciou je funkcia $y = \frac{1}{x}$. Z prehľadu derivácií základných funkcií vyplýva, že takouto funkciou je funkcia $y = \ln|x|$, pričom v intervale $(0, \infty)$, ktorý nás zaujíma túto funkciu môžeme jednoduchšie zapísať ako $y = \ln x$. Skutočne:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

pre každé $x \in (0, \infty)$

- e) Podobnými argumentami ako v predchádzajúcej časti dostávame, že primitívnou funkciou k funkcii $y = \frac{1}{x}$ v intervale $(-\infty, 0)$ je funkcia $y = \ln|x| = \ln(-x)$.



Poznámka 1. V predchádzajúcom príklade sme našli ku každej danej funkcii v danom intervale jediná primitívnu funkciu. V skutočnosti má každá z týchto funkcií nekonečne veľa primitívnych funkcií. Platí:

Ak F je primitívna funkcia k funkcii f v intervale (a, b) , tak aj $F + c$, kde c je ľubovoľné reálne číslo, je primitívna funkcia k funkcii f v intervale (a, b) .

Uvedená skutočnosť vyplýva z faktu, že deriváciou konštanty je nula, a teda $(F(x) + c)' = F'(x)$. Dôležité je, že platí aj opačné tvrdenie:

Ak F a G sú primitívne funkcie k funkcii f v intervale (a, b) , tak existuje reálne číslo c tak, že $F(x) = G(x) + c$ pre všetky $x \in (a, b)$.

Z uvedeného vyplýva, že množina všetkých primitívnych funkcií k danej funkcii f v danom intervale (a, b) je nekonečná množina, v ktorej každá dvojica funkcií sa v danom intervale líši len o konštantu. Túto množinu funkcií voláme *neurčitý integrál funkcie f v intervale (a, b)* a označujeme $\int f(x) dx$. V tomto označení je teda napríklad

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathcal{R}.$$

Poznámka 2. V predchádzajúcom príklade je vidieť, že tá istá funkcia má často v rôznych intervaloch ten istý neurčitý integrál. V takomto prípade bude neurčitý integrál platiť v každom intervale, v ktorom sú príslušné funkcie definované, napr.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad c \in \mathcal{R}.$$

v každom intervale, kde sú funkcie $\ln|x|$ a $\frac{1}{x}$ definované, t.j. v každom intervale neobsahujúcom 0. V takýchto prípadoch často vynecháme interval, v ktorom sme pracovali.

Na otázku, ktoré funkcie majú primitívne funkcie (a teda neurčitý integrál) dáva čiastočnú odpoveď nasledujúce tvrdenie:

Každá spojitá funkcia v intervale (a, b) má v tomto intervale primitívnu funkciu.

Nie vždy však vieme túto primitívnu funkciu vyjadriť analytickým výrazom.

Priamo z definície neurčitého integrálu a príslušných vlastností pre derivácie vyplývajú jednoduché pravidlá:

Ak k funkcii f existuje primitívna funkcia v intervale (a, b) , tak pre všetky $x \in (a, b)$ platí

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \quad (1.1)$$

Ak f' existuje v intervale (a, b) , tak

$$\int f'(x) dx = f(x) + c \quad (1.2)$$

Ak majú funkcie f aj g v intervale (a, b) primitívne funkcie, tak v tomto intervale platí

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\int (cf(x)) dx = c \int f(x) dx,$$

kde c je ľubovoľné reálne číslo.

Obidva tieto vzťahy možno vyjadriť v jednom všeobecnom

$$\int (cf(x) + dg(x)) dx = c \int f(x) dx + d \int g(x) dx, \quad (1.3)$$

kde c a d sú ľubovoľné reálne čísla.

Príklad 2. Ukážeme platnosť posledného vzťahu

Riešenie: Označme F a G niektoré primitívne funkcie k funkciám f a g v intervale (a, b) . Potom pre všetky $x \in (a, b)$ platí

$$c \int f(x) dx + d \int g(x) dx = c(F(x) + c_1) + d(G(x) + d_1) = cF(x) + dG(x) + e,$$

kde $e = c.c_1 + d.d_1$ je ľubovoľné reálne číslo. Na druhej strane tiež

$$(cF(x) + dG(x))' = cF'(x) + dG'(x) = cf(x) + dg(x).$$

Preto $\int (cf(x) + dg(x)) dx = cF(x) + dG(x) + e$, kde e je ľubovoľné reálne číslo, takže obidva integrály sa rovnajú. ♣

1.1.1 Základné neurčité integrály

Nasleduje zoznam neurčitých integrálov, niektorých dôležitých funkcií. Platnosť väčšiny nasledovných vzťahov vyplýva z analogických vzťahov pre derivácie. Nasledujúce vzťahy platia v každom intervale, v ktorom sú funkcie definované.

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ ak } a \in \mathcal{R} \setminus \{-\infty\}.$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c.$$

$$3. \int e^x dx = e^x + c.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \text{ ak } a \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$6. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c.$$

$$7. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arccotg} x + c. \end{cases}$$

$$8. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c. \quad ^1$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c. \end{cases}$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + c.$$

$$11. \int \sinh x dx = \cosh x + c, \quad \int \cosh x dx = \sinh x + c.$$

$$12. \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + c, \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + c.$$

$$13. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

Príklad 3. Vypočítame integrály

$$\text{a) } \int (6x^5 - 2x^3 + 11x^2 + 3) dx \quad \text{b) } \int \frac{3x^2+4x+2}{5x} dx \quad \text{c) } \int (3 \sin x - 2 \cosh x) dx$$

$$\text{d) } \int \operatorname{tg}^2 x dx \quad \text{e) } \int \operatorname{cotg} x dx \quad \text{f) } \int (2^x - 3^{1-x}) dx$$

$$\text{g) } \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10}} \quad \text{h) } \int \frac{dx}{4+4x^2} \quad \text{i) } \int \frac{5}{\sqrt{3-3x^2}} dx$$

Riešenie: V riešení budeme používať základné vzorce pre neurčité integrály a pravidlo (1.3). Čitateľovi odporúčame v každom kroku určiť príslušný vzorec, resp. pravidlo.

a)

$$\begin{aligned} \int (6x^5 - 2x^3 + 11x^2 + 3) dx &= 6 \int x^5 dx - 2 \int x^3 dx + 11 \int x^2 dx + 3 \int x^0 dx = \\ &= 6 \frac{x^6}{6} - 2 \frac{x^4}{4} + 11 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^1}{1} = x^6 - \frac{x^4}{2} + \frac{11}{3} x^3 + 3x + c. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 4x + 2}{5x} dx &= \frac{3}{5} \int x dx + \frac{4}{5} \int x^0 dx + \frac{2}{5} \int \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{3}{10} x^2 + \frac{4}{5} x + \frac{2}{5} \ln |x| + c. \end{aligned}$$

c)

$$\int (3 \sin x - 2 \cosh x) dx = -3 \cos x - 2 \sinh x + c.$$

d)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + c. \end{aligned}$$

e)

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + c.$$

¹Namiesto $\int \frac{1}{f(x)} dx$ píšeme tiež $\int \frac{dx}{f(x)}$

f)

$$\int (2^x - 3^{1-x}) dx = \int 2^x dx - 3 \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} \left(\frac{1}{3}\right)^x + c.$$

g)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln |x + \sqrt{x^2 - 2}| + c.$$

h)

$$\int \frac{dx}{4 + 4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + c.$$

i)

$$\int \frac{5}{\sqrt{3 - 3x^2}} dx = \frac{5}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin x + c.$$



1.1.2 Cvičenia

Pomocou algebraických úprav, použitím pravidla (1.3) a základných vzorcov vypočítajte integrály.

1. $\int (3x^2 + 2x - 1) dx.$

2. $\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}\right) dx.$

3. $\int x^2(x^2 + 1) dx.$

4. $\int (x^3 + 1)^2 dx.$

5. $\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x} dx.$

6. $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x}} dx.$

7. $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} dx.$

8. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x} dx.$

9. $\int (\cos x + 2\sqrt[5]{x^3}) dx.$

10. $\int \left(\sin x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\right) dx.$

11. $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) dx.$

12. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx.$

13. $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)} dx.$

14. $\int \operatorname{cotg}^2 x dx.$

15. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx.$

16. $\int \frac{dx}{x^2+7}.$

17. $\int 4^{2-3x} dx.$

18. $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx.$

1.1.3 Výsledky

1. $x^3 + x^2 - x + c.$

2. $-\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} + c.$

3. $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + c.$

4. $\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x + c.$

5. $\frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + c.$

6. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + c.$

7. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c.$

8. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8\ln|x| + c.$

9. $\sin x + \frac{5}{4}x\sqrt[5]{x^3} + c.$

10. $-\cos x + \frac{3}{2}\arcsin x + c.$

11. $\frac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x} + c.$ 12. $x + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{10^x \ln 10} + c.$
 13. $\frac{1}{3}(x - \operatorname{arctg} x) + c.$ 14. $-x - \operatorname{cotg} x + c.$
 15. $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x} + x + c.$ 16. $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + c.$
 17. $-\frac{1}{3 \ln 4} 4^{2-3x} + c.$ 18. $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$

1.2 Metódy počítania neurčitého integrálu

Sú dve všeobecné metódy počítania neurčitých integrálov: substitučná metóda a metóda integrovania per partes.

1.2.1 Substitučná metóda

Táto metóda je odvodená od vzťahu pre deriváciu zloženej funkcie a jej princíp je v nasledujúcom tvrdení:

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f v intervale I , nech funkcia φ má deriváciu v intervale (a, b) a nech pre každé $x \in (a, b)$ je $\varphi(x) \in I$. Potom

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c, \quad \text{v intervale } (a, b). \quad (1.4)$$

Často sa vyskytujúci špeciálnym prípadom tejto metódy je situácia keď funkcia $\varphi(x) = ax + b$ je lineárna. Vtedy φ' existuje pre všetky $x \in \mathcal{R}$ a za predpokladov tvrdenia platí

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c. \quad (1.5)$$

Príklad 4. Ukážeme platnosť vzťahu 1.5.

Riešenie: Upravíme integrál na ľavej strane a použijeme vzťah 1.4:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) a dx = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = ax + b \\ \varphi'(x) = a \end{array} \right\} = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

Iné riešenie: Zderivujeme pravú stranu vzťahu 1.5.

$$\left(\frac{1}{a} F(ax + b) + c \right)' = \frac{1}{a} F'(ax + b) = \frac{1}{a} f(ax + b) \cdot a = f(ax + b).$$



Príklad 5. Vypočítame neurčité integrály

a) $\int \frac{dx}{3x+7},$ b) $\int (5-7x)^{21} dx,$ c) $\int \cos 2x dx.$

Riešenie: Budeme používať vzťah 1.5.

a) V tomto príklade je $ax + b = 3x + 7$ a funkcia f je definovaná vzťahom $f(t) = \frac{1}{t}$. Primitívna funkcia k f je funkcia $F(t) = \ln|t|$ v každom intervale neobsahujúcom 0. Preto platí

$$\int \frac{dx}{3x+7} = \frac{1}{3} \ln|3x+7| + c,$$

v každom intervale neobsahujúcom číslo $-\frac{7}{3}$.

b) Teraz je $ax + b = -7x + 5$ a $f(t) = t^{21}$. Preto

$$\int (5 - 7x)^{21} dx = -\frac{1}{7} \frac{(5 - 7x)^{22}}{22} + c = -\frac{(5 - 7x)^{22}}{154} + c$$

pre $x \in \mathcal{R}$.

c) Podobne ako v predchádzajúcich častiach dostávame

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c = \sin x \cos x + c, \quad x \in \mathcal{R}.$$



Niekedy je potrebné integrovanú funkciu pred použitím substitučnej metódy upraviť algebraickými alebo inými úpravami.

Príklad 6. Vypočítame neurčité integrály

a) $\int \frac{dx}{4+x^2}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

c) $\int \cos^2 x dx$.

Riešenie: a) Integrovanú funkciu upravíme

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

a integrujeme (pre $\varphi(x) = \frac{1}{2}x$ a $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$)

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c.$$

b) Integrovanú funkciu upravíme

$$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

a integrujeme (pre $\varphi(x) = \frac{1}{3}x$ a $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + c,$$

pre $x \in (-3, 3)$.

c) K úprave použijeme trigonometrický vzťah $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int 1 dx + \int \cos 2x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + c. \end{aligned}$$



Vo všeobecnosti je praktický postup pri používaní substitučnej metódy nasledujúci:

1. V integrovanej funkcii hľadáme takú funkciu φ , ktorá sa tam vyskytuje spolu so svojou deriváciou, alebo jej číselným násobkom.

2. Zavedieme novú premennú t , pre ktorú je $t = \varphi(x)$.
3. Upravíme daný integrál na tvar $\int f(t) dt$ kde $dt = \varphi'(x) dx$ a počítame $\int f(t) dt = F(t) + c$.
4. Vo výsledku nahradíme $t = \varphi(x)$: $F(\varphi(x)) + c$.

Niekedy, ak je funkcia φ monotónna, tretí bod tohoto postupu je výhodné realizovať tak, že si vyjadríme inverznú funkciu $x = \varphi^{-1}(t)$ a (alebo) $dx = (\varphi^{-1})'(t) dt$ a dosadíme do pôvodného integrálu (pozri napríklad integrovanie iracionálnych funkcií).

Príklad 7. Vypočítame neurčité integrály

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \cos^4 x \sin x dx & \text{b) } \int \frac{dx}{x \ln x} & \text{c) } \int 3x\sqrt{x^2 + 6} dx \\ \text{d) } \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arccotg} x}}{1+x^2} dx & \text{e) } \int xe^{7-x^2} dx & \text{f) } \int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \\ \text{g) } \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx & \text{h) } \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}} dx & \text{i) } \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx. \end{array}$$

Riešenie: a) V integrovanej funkcii sa vyskytuje funkcia $\varphi(x) = \cos x$ a zároveň násobok jej derivácie $-\varphi'(x) = \sin x$. (Prečo neuvažujeme $\varphi(x) = \sin x$ a $\varphi'(x) = \cos x$?). Daný integrál vypočítame preto nasledovne

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = \int t^4 (-dt) = \\ &= -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + c. \end{aligned}$$

b) V integrovanej funkcii sa vyskytuje funkcia $\varphi(x) = \ln x$ a zároveň jej derivácia $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$. Preto

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |\ln x| + c, \\ &x \in (0, 1) \quad \text{alebo} \quad x \in (1, \infty). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int 3x\sqrt{x^2 + 6} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 6 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \frac{3}{2} \int \sqrt{x^2 + 6} 2x dx = \frac{3}{2} \int \sqrt{t} dt = \\ &= \frac{3}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{3}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = (x^2 + 6)^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{(x^2 + 6)^3} + c. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arccotg} x}}{1+x^2} dx &= \int \sqrt[5]{\operatorname{arccotg} x} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{arccotg} x \\ dt = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = -dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \sqrt[5]{t} (-dt) = -\int t^{\frac{1}{5}} dt = -\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c = -\frac{5\sqrt[5]{\operatorname{arccotg}^6 x}}{6} + c. \end{aligned}$$

e)

$$\int xe^{7-x^2} dx = \int e^{7-x^2} (x dx) = \left\{ \begin{array}{l} t = 7 - x^2 \\ dt = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int e^t \left(-\frac{1}{2} dt\right) = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{7-x^2} + c.$$

f)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int \sinh \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \sinh t(2 dt) = 2 \cosh t + c = 2 \cosh \sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right\} = \int t^2 dt = \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c. \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-(3^x)^2}} (3^x dx) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \Rightarrow 3^x dx = \frac{dt}{\ln 3} \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\ln 3} = \frac{\arcsin t}{\ln 3} + c = \frac{\arcsin 3^x}{\ln 3} + c. \end{aligned}$$

i) V riešení tohoto príkladu využijeme trigonometrickú identitu

 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx &= \int \frac{1}{\sin^2 x + 3} (2 \sin x \cos x dx) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sin^2 x + 3 \\ dt = 2 \sin x \cos x dx \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln(\sin^2 x + 3) + c. \end{aligned}$$



Poznámka 3. Poučenie z predchádzajúceho príkladu môžeme voľne formulovať nasledovne

Ak $\int f(x) dx = F(x) + c$, tak v príslušných intervaloch platí

$$\int x f(x^2) dx = \frac{1}{2} F(x^2) + c, \quad \int \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(\ln x) + c,$$

$$\int \frac{f(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx = F(\operatorname{arctg} x) + c, \quad \int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2F(\sqrt{x}) + c,$$

$$\int f(\sin x) \cos x dx = F(\sin x) + c, \quad \int \frac{f(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx = F(\operatorname{tg} x) + c.$$

Ďalšie podobné vzťahy si čitateľ môže odvodiť sám.

1.2.2 Cvičenia

Použitím algebraickej úpravy (ak je potrebná) a substitúcie lineárnej funkcie vypočítajte integrály.

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 19. $\int \sin 3x \, dx.$ | 20. $\int \frac{dx}{5-3x}.$ |
| 21. $\int e^{3-2x} \, dx.$ | 22. $\int \sqrt[3]{3x-2} \, dx.$ |
| 23. $\int (4-7x)^{11} \, dx.$ | 24. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$ |
| 25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$ | 26. $\int \frac{dx}{x^2+16}.$ |

Použitím naznačenej substitúcie vypočítajte integrály.

27. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-4}}, \quad t = x^2 - 4.$
28. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} \, dx, \quad t = \sin x.$
29. $\int \sqrt{\cos^3 x} \sin x \, dx, \quad t = \cos x.$
30. $\int x e^{x^2} \, dx, \quad t = x^2.$
31. $\int \frac{dx}{x \ln x}, \quad t = \ln x.$
32. $\int x^2 \sqrt{x^3+1} \, dx, \quad t = x^3 + 1.$
33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+4)}}, \quad t = \frac{\sqrt{x}}{2}.$
34. $\int \frac{x \, dx}{1+x^4}, \quad t = x^2.$
35. $\int \frac{dx}{e^x-1}, \quad t = e^{-x}.$
36. $\int \frac{e^x \sqrt{\arctg e^x}}{1+e^{2x}} \, dx, \quad t = \arctg e^x.$
37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad t = \frac{1}{x}.$
38. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}}, \quad t = \sqrt{x+1}.$

Použitím substitučnej metódy vypočítajte integrály.

- | | |
|---|--|
| 39. $\int \sqrt{4x-11} \, dx.$ | 40. $\int \frac{6 \, dx}{5-3x}.$ |
| 41. $\int \frac{4x}{4+x^2} \, dx.$ | 42. $\int \frac{14 \, dx}{(2x+3)^8}.$ |
| 43. $\int 10x(x^2+7)^4 \, dx.$ | 44. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{3-x^2}}.$ |
| 45. $\int \frac{x^2}{1+x^6} \, dx.$ | 46. $\int x \sqrt[5]{4-x^2} \, dx.$ |
| 47. $\int \sin^6 x \cos x \, dx.$ | 48. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} \, dx.$ |
| 49. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$ | 50. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2}}.$ |
| 51. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx.$ | 52. $\int (x+2)e^{x^2+4x-5} \, dx.$ |
| 53. $\int \frac{\ln^4 x}{x} \, dx.$ | 54. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx.$ |

55. $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x \, dx.$ 56. $\int \frac{\operatorname{cotg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx.$
57. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} \, dx.$ 58. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{cotg} x - 1}}.$
59. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} \, dx.$ 60. $\int \frac{e^{2x}}{4+e^x} \, dx.$
61. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}.$ 62. $\int \frac{3 \, dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}.$

1.2.3 Výsledky

19. $-\frac{1}{3} \cos 3x + c.$ 20. $-\frac{1}{3} \ln |3x - 5| + c.$
21. $-\frac{1}{2} e^{3-2x} + c.$ 22. $\frac{1}{4} (3x - 2) \sqrt[3]{3x - 2} + c.$
23. $-\frac{(4-7x)^{12}}{84} + c.$ 24. $\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + c.$
25. $\arcsin \frac{x}{3} + c.$ 26. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + c.$
27. $\sqrt{x^2 - 4} + c.$ 28. $\ln |1 + \sin x| + c.$
29. $-\frac{2}{5} \sqrt{\cos^5 x} + c.$ 30. $\frac{1}{2} e^{x^2} + c.$
31. $\ln |\ln x| + c.$ 32. $\frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 1)^3} + c.$
33. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2} + c.$ 34. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + c.$
35. $\ln |e^{-x} - 1| + c.$ 36. $\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + c.$
37. $\arccos \frac{1}{x} + c.$ 38. $\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}.$

Vo výsledkoch nasledujúcich cvičení je ešte pred výsledkom uvedená substitúcia, ktorou je možné integrál riešiť.

39. $t = 4x - 11, I = \frac{1}{6} \sqrt{(4x - 11)^3} + c.$
40. $t = 5 - 3x, I = -2 \ln |5 - 3x| + c.$
41. $t = 4 + x^2, I = 2 \ln |4 + x^2| + c.$
42. $t = 2x + 3, I = \frac{1}{(2x+3)^7} + c.$
43. $t = x^2 + 7, I = (x^2 + 7)^5 + c.$
44. $t = 3 - x^2, I = -\sqrt{3 - x^2} + c.$
45. $t = 1 + x^6, I = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + c.$
46. $t = 4 - x^2, I = -\frac{5}{12} \sqrt[5]{(4 - x^2)^6} + c.$
47. $t = \sin x, I = \frac{1}{7} \sin^7 x + c.$
48. $t = 2 + \cos x, I = -2\sqrt{2 + \cos x} + c.$
49. $t = x + 1, I = \operatorname{arctg}(x + 1) + c.$
50. $t = 2x - 1, I = \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1) + c.$
51. $t = \frac{1}{x}, I = -e^{\frac{1}{x}} + c.$
52. $t = e^{x^2+4x-5}, I = \frac{1}{2} e^{x^2+4x-5} + c.$

53. $t = \ln x$, $I = \frac{1}{5} \ln^5 x + c$.
 54. $t = \sin(\ln x)$, $I = \sin(\ln x) + c$.
 55. $t = e^{\cos^2 x}$, $I = -e^{\cos^2 x} + c$.
 56. $t = \sin \sqrt{x}$, $I = 2 \ln |\sin \sqrt{x}| + c$.
 57. $t = \operatorname{tg} x$, $I = \frac{3}{5} \sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x} + c$.
 58. $t = \operatorname{cotg} x$, $I = -2\sqrt{\operatorname{cotg} x - 1} + c$.
 59. $t = 2^x$, $I = \frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + c$.
 60. $t = 4 + e^x$, $I = e^x - 4 \ln |4 + e^x| + c$.
 61. $t = \operatorname{arctg} x$, $I = \ln(\operatorname{arctg} x) + c$.
 62. $t = \ln x$, $I = 3 \arcsin(\ln x) + c$.

1.2.4 Metóda per partes (integrovanie po častiach)

Táto metóda je odvodená zo vzťahu pre deriváciu súčinu funkcií a spočíva v nasledovnom:

Nech funkcie u a v majú derivácie v intervale (a, b) . Potom

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx \quad (1.6)$$

v intervale (a, b) .

Ako je vidieť, metóda sa používa na integrovanie súčinu funkcií. Jednu z nich zvolíme za u' , druhú za v a výpočet daného integrálu prevedieme na výpočet iného integrálu. Pritom za funkciu $u(x)$ volíme ľubovoľnú (čo najjednoduchšiu) primitívnu funkciu k funkcii $u'(x)$.

Príklad 8. Vypočítame integrály

- a) $\int x e^x dx$ b) $\int 2x^3 \ln x dx$ c) $\int 3x \cos 5x dx$.

Riešenie: a) Ide o integrál súčinu funkcií $y = x$ a $y = e^x$. Máme dve možnosti ako požiť metódu:

$$\begin{array}{ll} u' = x & v = e^x \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = e^x \end{array} \quad \text{alebo} \quad \begin{array}{ll} u' = e^x & v = x \\ u = e^x & v' = 1 \end{array}$$

Po dosadení do 1.6 dostaneme v prvej možnosti integrál $\int \frac{x^2}{2} e^x dx$, ktorý je ešte zložitejší ako pôvodný, použitím druhej možnosti dostaneme jednoduchý integrál $\int e^x dx$.

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = e^x & v = x \\ u = e^x & v' = 1 \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = \\ &= x e^x - e^x + c = (x - 1) e^x + c. \end{aligned}$$

b) Znova máme dve možnosti voľby:

$$\begin{array}{ll} u' = 2x^3 & v = \ln x \\ u = \frac{x^4}{2} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{alebo} \quad \begin{array}{ll} u' = \ln x & v = 2x^3 \\ u = ? & v' = 6x^2 \end{array}$$

Pri druhej možnosti je v tejto chvíli obtiažne vypočítať aj funkciu $u = \int \ln x dx$ (pre riešenie pozri poznámku na konci tejto časti a tiež Cvičenia), preto zvolíme prvú možnosť:

$$\begin{aligned} \int 2x^3 \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = 2x^3 \quad v = \ln x \\ u = \frac{x^4}{2} \quad v' = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{2} \ln x - \int \frac{x^4}{2} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^3 dx = \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{x^4}{8} + c. \end{aligned}$$

c) Z dvoch možností zvolíme nasledovnú (odporúčame čitateľovi skúsiť druhú možnosť a porovnať):

$$\begin{aligned} \int 3x \cos 5x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = \cos 5x \quad v = 3x \\ u = \frac{\sin 5x}{5} \quad v' = 3 \end{array} \right\} = \frac{3}{5} x \sin 5x - \int 3 \frac{\sin 5x}{5} dx = \\ &= \frac{3}{5} x \sin 5x - \frac{3}{5} \int \sin 5x dx = \frac{3}{5} x \sin 5x + \frac{3}{25} \cos 5x + c. \end{aligned}$$



Ako voliť funkcie u' a v v metóde per partes, ak chceme byť úspešní?

1. Nemal by byť problém vypočítať funkcie $u(x) = \int u'(x) dx$ a $v'(x)$.
2. Integrál $\int u(x)v'(x) dx$ by mal byť ľahší ako pôvodný integrál.

V ďalšom príklade odporúčame čitateľovi preveriť správnosť voľby funkcií u' a v .

Príklad 9. Vypočítame neurčité integrály

- a) $\int x \operatorname{arctg} x dx$ b) $\int 5x \cosh \frac{x}{2} dx$ c) $\int \arcsin x dx$
d) $\int (2x + \sqrt[3]{x}) \ln x dx$ e) $\int (x^2 + 2x - 1) \sin 3x dx$ f) $\int x^3 4^{-\frac{x}{2}} dx$
g) $\int e^{-x} \sin x dx$ h) $\int \cos x \sin 3x dx$ i) $\int \sin(\ln x) dx$.

Riešenie: a)

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = x \quad v = \operatorname{arctg} x \\ u = \frac{x^2}{2} \quad v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(\int 1 dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + c = \frac{1}{2} ((x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - x) + c. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int 5x \cosh \frac{x}{2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = \cosh \frac{x}{2} \quad v = 5x \\ u = 2 \sinh \frac{x}{2} \quad v' = 5 \end{array} \right\} = \\ &= 10x \sinh \frac{x}{2} - 10 \int \sinh \frac{x}{2} dx = 10x \sinh \frac{x}{2} - 20 \cosh \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

c) V tomto príklade nejde o integrál súčinu, avšak integrovanú funkciu môžeme výhodne zapísať v tvare súčinu $\arcsin x = 1 \cdot \arcsin x$! Pri počítaní obdržaného integrálu použijeme substitučnú metódu. Odporúčame čitateľovi premyslieť si detaily.

$$\int \arcsin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = \arcsin x \\ u = x \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{(t=1-x^2)}{=} x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c, \quad x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\int (2x + \sqrt[3]{x}) \ln x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = 2x + \sqrt[3]{x} \quad v = \ln x \\ u = x^2 + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} \quad v' = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \\
&= \left(x^2 + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} \right) \ln x - \int \left(x^2 + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} \right) \frac{1}{x} dx = \\
&= \left(x^2 + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} \right) \ln x - \int x dx - \frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \\
&= \left(x^2 + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} \right) \ln x - \frac{x^2}{2} - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \sqrt[3]{x^4} + c = \\
&= x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4} \left(\ln x - \frac{3}{4} \right) \sqrt[3]{x^4} + c.
\end{aligned}$$

e) V tomto príklade budeme musieť použiť metódu per partes opakovane dvakrát.

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 2x - 1) \sin 3x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = \sin 3x \quad v = x^2 + 2x - 1 \\ u = -\frac{1}{3} \cos 3x \quad v' = 2x + 2 \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{1}{3} (x^2 + 2x - 1) \cos 3x + \frac{2}{3} \int (x + 1) \cos 3x \, dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u' = \cos 3x \quad v = x + 1 \\ u = \frac{1}{3} \sin 3x \quad v' = 1 \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{1}{3} (x^2 + 2x - 1) \cos 3x + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} (x + 1) \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x \, dx \right) = \\
&= -\frac{1}{3} (x^2 + 2x - 1) \cos 3x + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} (x + 1) \sin 3x + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cos 3x \right) + c = \\
&= \left(-\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{11}{27} \right) \cos 3x + \frac{2}{9} (x + 1) \sin 3x + c.
\end{aligned}$$

f) V tomto príklade musíme použiť metódu opakovane trikrát. Voľbu u' a v vyznačíme len prvýkrát a necháme na čitateľa doplnenie ďalších. Z technického hľadiska je výhodné prepísať funkciu $4^{-\frac{x}{2}} = \left(4^{-\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$$\begin{aligned}
\int x^3 4^{-2x} \, dx &= \int x^3 \left(\frac{1}{2} \right)^x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u' = \left(\frac{1}{2} \right)^x \quad v = x^3 \\ u = -\frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x \quad v' = 3x^2 \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{x^3}{\ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x + \frac{3}{\ln 2} \int x^2 \left(\frac{1}{2} \right)^x \, dx = \\
&= -\frac{x^3}{\ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x + \frac{3}{\ln 2} \left(-\frac{x^2}{\ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x + \frac{2}{\ln 2} \int x \left(\frac{1}{2} \right)^x \, dx \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x^3}{\ln 2} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{3}{\ln 2} \left(-\frac{x^2}{\ln 2} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{2}{\ln 2} \left(-\frac{x \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^x \right) \right) + c = \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{x^3}{\ln 2} + \frac{3x^2}{(\ln 2)^2} + \frac{6x}{(\ln 2)^3} + \frac{6}{(\ln 2)^4} \right) + c.
\end{aligned}$$

g) V tomto príklade použijeme metódu dvakrát, čo nám umožní vyjadriť hľadaný integrál pomocou neho samého. Z obdržanej rovnice ho potom vypočítame. Poznamenajme ešte, že v tomto príklade obidve voľby funkcií u' a v vedú k riešeniu.

$$\begin{aligned}
\int e^{-x} \sin x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = \sin x \quad v = e^{-x} \\ u = -\cos x \quad v' = -e^{-x} \end{array} \right\} = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u' = \cos x \quad v = e^{-x} \\ u = \sin x \quad v' = -e^{-x} \end{array} \right\} = -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, dx \right) = \\
&= -e^{-x} (\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x \, dx.
\end{aligned}$$

Ak označíme hľadaný integrál symbolom $I = \int e^{-x} \sin x \, dx$, tak sme dostali rovnicu $I = -e^{-x}(\cos x + \sin x) - I$, z ktorej vypočítame

$$I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + c.$$

h) Riešenie tohoto príkladu je podobné predchádzajúcemu.

$$\begin{aligned}
\int \cos x \sin 3x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = \cos x \quad v = \sin 3x \\ u = \sin x \quad v' = 3 \cos 3x \end{array} \right\} = \\
&= \sin x \sin 3x - 3 \int \sin x \cos 3x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u' = \sin x \quad v = \cos 3x \\ u = -\cos x \quad v' = -3 \sin 3x \end{array} \right\} = \\
&= \sin x \sin 3x - 3(-\cos x \cos 3x - 3 \int \cos x \sin 3x \, dx).
\end{aligned}$$

Po úprave, pri označení $I = \int \cos x \sin 3x \, dx$, dostávame rovnicu $I = \sin x \sin 3x + 3 \cos x \cos 3x + 9I$, ktorej riešením je

$$I = -\frac{1}{8}(\sin x \sin 3x + 3 \cos x \cos 3x) + c.$$

i)

$$\begin{aligned}
\int \sin(\ln x) \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = \sin(\ln x) \\ u = x \quad v' = \cos(\ln x) \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \\
&= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = \cos(\ln x) \\ u = x \quad v' = -\sin(\ln x) \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \\
&= x \sin(\ln x) - \left(x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx \right).
\end{aligned}$$

Po úprave, pri označení $I = \int \sin(\ln x) \, dx$, dostávame riešenie

$$I = \frac{1}{2}x (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c.$$



Poznámka 4. Ako sme videli v častiach c) a i), metódu môžeme použiť aj vtedy, ak integrovaná funkcia nie je súčinom dvoch funkcií. Vtedy za druhý činiteľ považujeme konštantu 1. Podobne sa riešia integrály

$$\int \ln x \, dx, \quad \int \operatorname{arctg} x \, dx, \quad \int \operatorname{arctg} x \, dx, \quad \int \arccos x \, dx.$$

V častiach g), h) a i) sme videli, že niekedy po použití metódy nedostaneme jednoduchší integrál, ale podobný pôvodnému. Po opakovanom použití metódy vyjadríme pôvodný integrál pomocou neho samého a z obdržanej rovnice ho vypočítame.

Záver:

Metódu integrovania per partes používame pri integrovaní typu $\int P(x)f(x) \, dx$, kde $P(x)$ je mnohočlen (môže byť aj $P(x) = 1!$), prípadne racionálna funkcia a f je trigonometrická alebo transcendentná funkcia (exponenciálna, logaritmická, cyklometrická alebo hyperbolická). Pritom volíme:

1. $u' = f$ a $v = P$, ak f je trigonometrická, exponenciálna alebo hyperbolická funkcia a postup opakujeme n -krát, kde n je stupeň polynómu P .
2. $u' = P$ a $v = f$, ak f je cyklometrická alebo logaritmická funkcia. Dostaneme tak integrál z racionálnej alebo iracionálnej funkcie. Pre ich výpočet pozri nasledujúcu časť.

Cvičenia

Použite naznačenie metódy per partes na výpočet integrálov.

63. $\int \ln x \, dx, \quad u' = 1, \quad v = \ln x.$
64. $\int \frac{\ln x \, dx}{x^2}, \quad u' = \frac{1}{x^2}, \quad v = \ln x.$
65. $\int x \cos x \, dx, \quad u' = \cos x, \quad v = x.$
66. $\int x e^{-2x} \, dx, \quad u' = e^{-2x}, \quad v = x.$
67. $\int \operatorname{arccotg} x \, dx, \quad u' = 1, \quad v = \operatorname{arccotg} x.$
68. $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx, \quad u' = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad v = x.$
69. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx, \quad u' = \frac{\cos x}{\sin^3 x}, \quad v = x.$
70. $\int x \sinh x \, dx, \quad u' = \sinh x, \quad v = x.$
71. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx, \quad u' = 1, \quad v = \sqrt{1-x^2}.$
72. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx, \quad u' = \operatorname{tg}^2 x, \quad v = x.$

Použitím metódy per partes vypočítajte integrály.

- | | |
|--|--|
| 73. $\int x \ln x \, dx.$ | 74. $\int x \sin 3x \, dx.$ |
| 75. $\int 5x e^{-4x} \, dx.$ | 76. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$ |
| 77. $\int \arccos x \, dx.$ | 78. $\int x \cosh x \, dx.$ |
| 79. $\int (2x+1) \cos\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) \, dx.$ | 80. $\int \frac{x \, dx}{5^x}.$ |
| 81. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx.$ | 82. $\int 4x^3 \ln(x^5) \, dx.$ |

Opakovaným použitím metódy per partes vypočítajte integrály.

- | | |
|---|---|
| 83. $\int x^2 \sin x \, dx.$ | 84. $\int e^x \cos 2x \, dx.$ |
| 85. $\int (x^2 + 5) \cos x \, dx.$ | 86. $\int x^2 \sinh x \, dx.$ |
| 87. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} \, dx.$ | 88. $\int x \ln^2 x \, dx.$ |
| 89. $\int \ln^2 x \, dx.$ | 90. $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} \, dx.$ |
| 91. $\int \sin(\ln x) \, dx.$ | 92. $\int x^2 e^{3x} \, dx.$ |
| 93. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x \, dx.$ | 94. $\int x^3 \cos x \, dx.$ |

1.2.5 Výsledky

- | | |
|---|--|
| 63. $x \ln x - x + c.$ | 64. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$ |
| 65. $x \sin x + \cos x + c.$ | 66. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$ |
| 67. $x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c.$ | 68. $-x \cotg x + \ln \sin x + c.$ |
| 69. $-\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \cotg x + c.$ | 70. $x \cosh x - \sinh x + c.$ |
| 71. $\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$ | 72. $x \operatorname{tg} x + \ln \cos x - \frac{x^2}{2} + c.$ |

Vo výsledkoch nasledujúcich cvičení je ešte pred výsledkom uvedená voľba funkcie u' v metóde per partes, ktorou je možné integrál riešiť. Funkciu v si čitateľ doplní.

- 73.** $u' = x, I = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$
- 74.** $u' = \sin 3x, I = -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + c.$
- 75.** $u' = e^{-4x}, I = -\frac{5}{4}xe^{-4x} - \frac{5}{16}e^{-4x} + c.$
- 76.** $u' = x, I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.$
- 77.** $u' = 1, I = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$
- 78.** $u' = \cosh x, I = x \sinh x - \cosh x + c.$
- 79.** $u' = \cos(\frac{\pi}{3} - 5x), I = -\frac{2x+1}{5} \sin(\frac{\pi}{3} - 5x) + \frac{2}{25} \cos(\frac{\pi}{3} - 5x) + c.$
- 80.** $u' = 5^{-x}, I = -\frac{x5^{-x}}{\ln 5} - \frac{5^{-x}}{\ln^2 5} + c.$
- 81.** $u' = \frac{1}{\sqrt{x}}, I = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + c.$
- 82.** $u' = 4x^3, I = 5x^4 \ln x - \frac{5}{4}x^4 + c.$
-
- 83.** $u' = \sin x, I = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$
- 84.** u' je jedno, $I = \frac{e^x}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) + c.$
- 85.** $u' = \cos x, I = (x^2 + 3) \sin x + 2x \cos x + c.$
- 86.** $u' = \sinh x, I = (x^2 + 2) \cosh x - 2x \sinh x + c.$
- 87.** $u' = e^{-x}, I = -e^{-x}(x^2 + 5) + c.$
- 88.** $u' = x, I = \frac{1}{2}x^2(\ln^2 x - \ln x) + \frac{1}{4}x^2 + c.$
- 89.** $u' = 1, I = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c.$

90. u' je jedno, $I = -\frac{8}{17}e^{-2x}(\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}) + c$.
 91. $u' = 1$, $I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$.
 92. $u' = e^{3x}$, $I = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + c$.
 93. $u' = \cos 2x$, $I = \frac{2x^2+10x+11}{4} \sin 2x + \frac{2x+5}{4} \cos 2x + c$.
 94. $u' = \cos x$, $I = (x^3 - 6x) \sin x + (3x^2 - 6) \cos x + c$.

1.3 Integrovanie elementárnych funkcií

1.3.1 Integrovanie racionálnych funkcií

Zopakujeme, že racionálnou funkciou rozumieme podiel dvoch mnohočlenov.

Integrovanie mnohočlenov

Postup pri integrovaní mnohočlenu vyplýva zo vzťahu (1.3) a integrálu mocninnej funkcie.

Príklad 10. Vypočítame $\int(5x^7 - 12x^3 + 3x^2 - 9) dx$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int(5x^7 - 12x^3 + 3x^2 - 9) dx &= \\ &= 5 \int x^7 dx - 12 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - 9 \int 1 dx = \\ &= \frac{5}{8}x^8 - 3x^4 + x^3 - 9x + c. \end{aligned}$$



Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií

Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov ([H], časť 6.4.2). Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky štyri typy elementárnych zlomkov.

a) Integrál prvého typu zlomkov prevedieme jednoduchou úpravou na základný integrál:

$$\int \frac{a}{x-r} dx \stackrel{(t=x-r)}{=} a \int \frac{dt}{t} = a \ln |t| + c = a \ln |x-r| + c.$$



Príklad 11. Vypočítame $\int \frac{3}{2-5x} dx$.

Riešenie:

$$\int \frac{3}{2-5x} dx = -\frac{3}{5} \int \frac{dx}{x-\frac{2}{5}} \stackrel{(t=x-\frac{2}{5})}{=} -\frac{3}{5} \ln \left| x - \frac{2}{5} \right| + c.$$



b) Integrál druhého typu zlomkov riešime analogicky. Pre $n > 1$

$$\int \frac{a}{(x-r)^n} dx \stackrel{(t=x-r)}{=} a \int t^{-n} dt = a \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + c.$$

Príklad 12. Vypočítame $\int \frac{8}{(2x+3)^4} dx$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int \frac{8}{(2x+3)^4} dx &= 8 \int \frac{dx}{2^4(x+\frac{3}{2})^4} \stackrel{(t=x+\frac{3}{2})}{=} \frac{1}{2} \int t^{-4} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{6(x+\frac{3}{2})^3} + c. \end{aligned}$$



c) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2 - 4q < 0$, integrujeme nasledovne:

1. Algebraickými úpravami rozdelíme zlomok na dva zlomky, ktorých menovatele sú zhodné s menovateľmi pôvodného zlomku. Čitateľ prvého je lineárna funkcia, ktorá je číselným násobkom derivácie menovateľa a čitateľ druhého je číslo:

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

2. Prvý zlomok integrujeme nasledovne:

$$\int \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} dx \stackrel{(t=x^2+px+q)}{=} \frac{a}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{a}{2} \ln(x^2+px+q) + c.$$

Prečo netreba v poslednom logaritme písať absolútnu hodnotu?

3. Integrál druhého zlomku úpravami a substitúciou prevedieme na $\int \frac{dt}{t^2+1}$.

Príklad 13. Vypočítame integrál $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+10} dx$.

Riešenie:

1. Najskôr upravíme integrovaný zlomok na súčet dvoch zlomkov s popísanými vlastnosťami

$$\frac{3x-1}{x^2+4x+10} = \frac{\frac{3}{2}(2x+4)}{x^2+4x+10} + \frac{-7}{x^2+4x+10}.$$

2. Počítame prvý integrál

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+10} dx &\stackrel{(t=x^2+4x+10)}{=} \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2} \ln|t| + c = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+4x+10) + c. \end{aligned}$$

3. Počítame druhý integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{-7}{x^2+4x+10} dx &= -7 \int \frac{dx}{x^2+4x+10} = -7 \int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \\ &= -\frac{7}{6} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2+1} \stackrel{(t=\frac{x+2}{\sqrt{6}})}{=} -\frac{7}{6} \int \frac{\sqrt{6}dt}{t^2+1} = \\ &= -\frac{7}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} t + c = -\frac{7}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c. \end{aligned}$$

Výsledok je súčtom obidvoch integrálov:

$$\int \frac{3x-1}{x^2+4x+10} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+4x+10) - \frac{7}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c.$$



d) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou. Pre výsledné vzťahy pozri [E], časť Integrovanie racionálnych funkcií.

Príklad 14. Vypočítame integrál $\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)} dx$.

Riešenie: Úlohu budeme riešiť v niekoľkých krokoch.

1. Integrovanú rýdzo racionálnu funkciu rozložíme na elementárne zlomky

$$\frac{4x^3 - 14x^2 + 28x - 7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{2x-3}{x^2-2x+5}.$$

2. Integrujeme prvý integrál

$$\int \frac{2}{x-2} dx = 2 \ln|x-2| + c.$$

3. Integrujeme druhý integrál

$$\int \frac{5}{(x-2)^2} dx = -\frac{5}{x-2} + c.$$

4. Podobne ako v predchádzajúcom príklade integrujeme tretí integrál. Podrobnosti necháme na čitateľa.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{x^2-2x+5} dx &= \int \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+5} - \frac{1}{x^2-2x+5} \right) dx = \\ &= \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \\ &= \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \\ &= \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

5. Sčítame všetky vypočítané integrály

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)} dx &= \\ &= 2 \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + c. \end{aligned}$$



Integrovanie racionálnych funkcií

Pri integrovaní racionálnych funkcií využívame známy fakt (pozri [H]):

Každá racionálna funkcia sa dá vyjadriť ako súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie.

Príklad 15. Vypočítame integrál $\int \frac{x^8+11x^6+15x^4+3x^3+12x^2-18x+27}{x^5+9x^3} dx$.

Riešenie:

1. Danú racionálnu funkciu rozložíme na súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie. Rozklad menovateľa na súčin je $x^3(x^2 + 9)$. Dostávame

$$\begin{aligned} \frac{x^8 + 11x^6 + 15x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 18x + 27}{x^5 + 9x^3} &= \\ &= x^3 + 2x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{4x - 5}{x^2 + 9}. \end{aligned}$$

2. Integrál mnohočlena je jednoduchý $\int (x^3 + 2x) dx = \frac{x^4}{4} + x^2 + c$.

3. Integrály prvých troch zlomkov sú jednoduché, integrál posledného je

$$\int \frac{4x - 5}{x^2 + 9} dx = 2 \int \frac{2x}{x^2 + 9} dx - 5 \int \frac{dx}{x^2 + 9} = 2 \ln(x^2 + 9) - \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c.$$

4. Výsledok je súčtom všetkých integrálov

$$\begin{aligned} \int \frac{x^8 + 11x^6 + 15x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 18x + 27}{x^5 + 9x^3} dx &= \\ &= \frac{x^4}{4} + x^2 + \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} - 2 \ln(x^2 + 9) + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c. \end{aligned}$$

**Cvičenia**

Vypočítajte integrály rýdzo racionálnych funkcií.

95. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

96. $\int \frac{dx}{x^2-1}$.

97. $\int \frac{dx}{x^3+x}$.

98. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

99. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

100. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$.

101. $\int \frac{2dx}{x^2+2x+5}$.

102. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.

103. $\int \frac{dx}{x^3+1} dx$.

104. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$.

Vypočítajte integrály racionálnych funkcií.

105. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$.

106. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$.

107. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}$.

108. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$.

109. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} dx$.

110. $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$.

111. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2} dx$.

112. $\int \frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)} dx$.

Výsledky

95. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + c.$

96. $\ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + c.$

97. $\ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c.$

98. $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+2)^4} \right| + c.$

99. $\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c.$

100. $\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + c.$

101. $\operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c.$

102. $\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} x \right) + c.$

103. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$

104. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$

105. $x + 3 \ln |x - 3| - 3 \ln |x - 2| + c.$

106. $5x + \ln \left| \frac{\sqrt{x}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}} \right| + c.$

107. $x + 3 \ln(x^2 - 6x + 10) + 8 \operatorname{arctg}(x - 3) + c.$

108. $x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + c.$

109. $x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 3x + 4) + \frac{9}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c.$

110. $x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.$

111. $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2} + c.$

112. $x + \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + c.$

1.3.2 Integrovanie trigonometrických funkcií

Pri integrovaní trigonometrických funkcií je väčšinou viac možností ako postupovať. Integrál z ľubovoľnej racionálnej funkcie z funkcií \sin a \cos , t.j. funkcie obsahujúcej algebraické operácie (sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie) a funkcie \sin a \cos (a teda aj tg a cotg), môžeme pomocou substitúcie

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi);$$

previesť na integrál z racionálnej funkcie. Postupujeme pritom tak, že vyjadríme inverznú funkciu, jej diferenciál dx a tiež funkcie $\sin x$ a $\cos x$ s pomocou premennej t

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Príklad 16. Vypočítame $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx$.

Riešenie: Skôr než začneme počítať, uvedomme si, že úlohu môžeme riešiť v ľubovoľnom intervale, v ktorom je integrovaná funkcia definovaná, t.j. v ľubovoľnom intervale $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4}) + k\pi$ alebo $(\frac{3\pi}{4} +$

$k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathcal{Z}$. Integrál upravíme a prevedieme spomínanou substitúciou na integrál z racionálnej funkcie.

$$\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx =$$

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2 - 4t - 2}{(t^2 + 1)(t^2 + 2t - 1)} dt.$$

Rýdzo racionálnu funkciu v poslednom integrále rozložíme na súčet elementárnych zlomkov

$$\frac{2t^2 - 4t - 2}{(t^2 + 1)(t^2 + 2t - 1)} = \frac{2t}{t^2 + 1} - \frac{1}{t + 1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{t + 1 - \sqrt{2}}$$

a tieto integrujeme.

$$\int \frac{2t^2 - 4t - 2}{(t^2 + 1)(t^2 + 2t - 1)} dt = \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt - \int \frac{dt}{t + 1 + \sqrt{2}} - \int \frac{dt}{t + 1 - \sqrt{2}} =$$

$$\ln(t^2 + 1) - \ln|t + 1 + \sqrt{2}| - \ln|t + 1 - \sqrt{2}| = \ln \left| \frac{t^2 + 1}{t^2 + 2t - 1} \right| + c.$$

Výpočet ukončíme spätnou substitúciou premennej t na pôvodnú premennú x .

$$\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx = \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + c.$$

Poznamenajme ešte, že tento výsledok platí v ľubovoľnom intervale, v ktorom je integrovaná funkcia definovaná. ♣

Substitúciu

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

je možné použiť pri integrále z ľubovoľnej racionálnej funkcie z funkcií $\sin x$ a $\cos x$, táto však vedie často ku integrálom z komplikovaných racionálnych funkcií a je možné ho v špeciálnych prípadoch zjednodušiť. Uvedieme tu niektoré možnosti a čitateľovi so záujmom o ďalšie odporúčame [1], [3], [4]. Často je možné použiť substitúciu

$$t = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

potom

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Táto substitúcia (ak je možné ju požiť) vedie väčšinou k integrálu z jednoduchšej racionálnej funkcie. Odporúčame čitateľovi vyriešiť predchádzajúci príklad pomocou substitúcie $t = \operatorname{tg} x$.

Neurčitý integrál

$$\int \sin^n x \cos^m x dx,$$

kde n a m sú celé čísla a aspoň jedno z nich je nepárne. Tento integrál úpravou a substitúciou $t = \cos x$, ak n je nepárne alebo $t = \sin x$, ak m je nepárne prevedieme na integrál z racionálnej funkcie.

Príklad 17. Vypočítame integrál $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$.

Riešenie: V integrovanej funkcii sa vyskytuje len funkcia $\cos x$ a to v nepárnej mocnine ($\cos^{-3} x$). Preto úpravou a substitúciou $t = \sin x$, kde $dt = \cos x dx$ a $\cos^2 x = 1 - t^2$, dostávame

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}.$$

Posledný integrál z rýdzoracionálnej funkcie riešime rozkladom na elementárne zlomky

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} dt &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1+t} + \ln|1+t| + \frac{1}{1-t} - \ln|1-t| \right) + c = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2t}{t^2-1} + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) + c. \end{aligned}$$

Po spätnej substitúcii dostávame výsledok

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{2 \sin x}{\cos^2 x} + \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \right) + c.$$



Neurčité integrály

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx$$

kde m a n sú prirodzené čísla prevedieme na jednoduché integrály pomocou trigonometrických vzťahov

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Príklad 18. Vypočítame $\int \sin 2x \cos 5x dx$.

Riešenie: Použijeme vyššie uvedený vzorec pre $\alpha = 2x$ a $\beta = 5x$.

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(-3x) + \sin 7x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 7x) dx = \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{14} \cos 7x + c. \end{aligned}$$



Cvičenia

Vypočítajte integrály trigonometrických funkcií.

- | | |
|--|---|
| 113. $\int \sin^3 x \cos x dx.$ | 114. $\int \cos^5 2x \sin 2x dx.$ |
| 115. $\int \operatorname{tg} 4x dx.$ | 116. $\int \cos^2 2x dx.$ |
| 117. $\int \cos^5 x dx.$ | 118. $\int \frac{dx}{\sin x}.$ |
| 119. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$ | 120. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$ |
| 121. $\int \operatorname{cotg}^3 x dx.$ | 122. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$ |
| 123. $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}.$ | 124. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx.$ |
| 125. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx.$ | 126. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$ |
| 127. $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$ | 128. $\int \sin 3x \sin 5x dx.$ |
| 129. $\int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4} dx.$ | 130. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$ |
| 131. $\int \cosh^3 x dx.$ | 132. $\int \operatorname{tgh} x dx.$ |

Výsledky

- | | |
|--|--|
| 113. $\frac{1}{4} \sin^4 x + c.$ | 114. $-\frac{\cos^6 x}{12} + c.$ |
| 115. $-\frac{1}{4} \ln \cos 4x + c.$ | 116. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + c.$ |
| 117. $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c.$ | 118. $\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + c.$ |
| 119. $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + c.$ | 120. $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln \operatorname{tg} x + c.$ |
| 121. $-\frac{1}{2 \sin^2 x} - \ln \sin x + c.$ | |
| 122. $-\ln \sin x + \cos x + c.$ | |
| 123. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c.$ | |
| 124. $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c.$ | |
| 125. $-x + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + c.$ | |
| 126. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right + c.$ | |
| 127. $\operatorname{arctg} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c.$ | |
| 128. $-\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$ | |
| 129. $-\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{x}{2} + c.$ | |
| 130. $-\frac{\cos 2x}{8} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} + c.$ | |
| 131. $\frac{\sinh^3 x}{3} + \sinh x + c.$ | |
| 132. $\ln \cosh x + c.$ | |

1.3.3 Integrovanie iracionálnych funkcií

Odmocnina z lineárnej lomenej funkcie

Ak máme integrovať funkciu, v ktorej sa okrem algebraických operácií vyskytuje odmocnina z lineárnej lomenej funkcie (špeciálne z lineárnej funkcie), t.j. $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (špeciálne $\sqrt[n]{ax+b}$), tak použijeme substitúciu $t = \varphi(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ($t = \sqrt[n]{ax+b}$). Pri tejto substitúcii je technicky výhodné vyjadriť inverznú funkciu $x = \varphi^{-1}(t)$ a $dx = (\varphi^{-1})'(t) dt$. Všetky tieto vzťahy dosadíme do riešeného integrálu, ktorý tak prevedieme na integrál z racionálnej funkcie premennej t .

Príklad 19. Vypočítame integrál $\int \frac{\sqrt{3x+4}}{x-\sqrt{3x+4}} dx$.

Riešenie: V tomto príklade použijeme substitúciu $t = \sqrt{3x+4}$, $x \in (-\frac{4}{3}, \infty)$ a vyjadříme inverznú funkciu $x = \frac{t^2-4}{3}$ a tiež $dx = \frac{2t}{3} dt$. Dosadením dostávame integrál z racionálnej funkcie premennej t

$$I = \int \frac{t}{\frac{t^2-4}{3} - t} \left(\frac{2t}{3}\right) dt = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 3t - 4} = 2 \int \left(1 + \frac{3t+4}{t^2 - 3t - 4}\right) dt.$$

Rýdzo racionálnu funkciu v integrále rozložíme na súčet elementárnych zlomkov.

$$\frac{3t+4}{t^2-3t-4} = \frac{\frac{16}{5}}{t-4} - \frac{\frac{1}{5}}{t+1}$$

a pokračujeme v integrovaní

$$I = 2 \left(t + \frac{16}{5} \ln |t-4| - \frac{1}{5} \ln |t+1| \right) + c.$$

Nakoniec výsledok vyjadříme v termínoch premennej x .

$$I = 2 \left(\sqrt{3x+4} + \frac{16}{5} \ln |\sqrt{3x+4} - 4| - \frac{1}{5} \ln |\sqrt{3x+4} + 1| \right) + c.$$



V prípade, že sa v integrovanej funkcii vyskytujú dve rôzne odmocniny $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ a $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, použijeme substitúciu $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, kde k je najmenší spoločný násobok čísel m a n . Podobne postupujeme aj vtedy, ak sa vyskytuje viac odmocnín z tej istej lineárnej lomenej funkcie.

Príklad 20. Vypočítame integrál $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx$.

Riešenie: Najmenší spoločný násobok čísel 2, 3 a 4 je číslo 12. Preto použijeme substitúciu $t = \sqrt[12]{x}$, vyjadříme $x = t^{12}$ a $dx = 12t^{11} dt$. Ďalej uvážime, že $\sqrt{x} = t^6$, $\sqrt[3]{x} = t^4$ a $\sqrt[4]{x} = t^3$ a dosadíme do pôvodného integrálu

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx = \int \frac{t^3}{t^4 + t^6} 12t^{11} dt = 12 \int \frac{t^{10}}{1+t^2} dt.$$

Posledný integrál (z racionálnej funkcie) rozložíme na súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie a zintegrujeme

$$I = 12 \left(\int (t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1) dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 12 \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \operatorname{arctg} t \right) + c = \\
&= 12 \left(\frac{\sqrt[12]{x^9}}{9} - \frac{\sqrt[12]{x^7}}{7} + \frac{\sqrt[12]{x^5}}{5} - \frac{\sqrt[12]{x^3}}{3} + \sqrt[12]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x} \right) + c.
\end{aligned}$$



Odmocnina z kvadratickej funkcie

Ak máme integrovať funkciu, v ktorej sa okrem algebraických operácií vyskytuje odmocnina z kvadratickej funkcie $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, postupujeme nasledovne:

1. Doplnením na štvorec a algebraickými úpravami a substitúciou prevedieme daný výraz na niektorý z výrazov $\sqrt{r^2 - u^2}$, $\sqrt{r^2 + u^2}$ alebo $\sqrt{u^2 - r^2}$.
2. Použitím substitúcií

$$\begin{array}{ll}
u = r \sin t & \text{pre } \sqrt{r^2 - u^2} \\
u = r \operatorname{tg} t & \text{pre } \sqrt{r^2 + u^2} \\
u = \frac{r}{\cos t} & \text{pre } \sqrt{u^2 - r^2}
\end{array}$$

prevedieme daný integrál na integrál z trigonometrickej funkcie.

Príklad 21. Vypočítame $\int \sqrt{4x^2 - 8x + 5} dx$.

Riešenie: Upravíme $\sqrt{4x^2 - 8x + 5} = \sqrt{(2x - 2)^2 + 1}$ a zvolíme $u = 2x - 2$. Potom $du = 2 dx$ a

$$I = \int \sqrt{4x^2 - 8x + 5} dx = \int \sqrt{u^2 + 1} \frac{du}{2}.$$

Použijeme substitúciu $u = \operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a počítame

$$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^3 t} dt.$$

Tento integrál sme už počítali v Príklade 17

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \frac{1}{8} \left(\frac{2 \sin t}{\cos^2 t} + \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| \right) + c.$$

Pre spätnú substitúciu potrebujeme vyjadriť $\sin t$ a $\cos t$ pomocou u . To spravíme umocnením substitučnej rovnice $u = \operatorname{tg} t$, úpravou a vyjadrením

$$u^2 = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}, \quad \sin t = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Po spätnej substitúcii dostávame

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{8} \left(2u\sqrt{1 + u^2} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + u^2} + u}{\sqrt{1 + u^2} - u} \right| \right) = \\
&= \frac{1}{8} \left(2u\sqrt{1 + u^2} + \ln(\sqrt{1 + u^2} + u)^2 \right) + c.
\end{aligned}$$

Nakoniec prejdeme k premennej x ($u = 2x - 2$).

$$I = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{4x^2 - 8x + 5} + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{4x^2 - 8x + 5} + 2x - 2) + c.$$



Príklad 22. Vypočítame integrál $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{8+2x-x^2}} dx$.

Riešenie:

1. Upravíme $\sqrt{8+2x-x^2} = \sqrt{9-(x-1)^2}$ a zvolíme $u = x-1$. Potom môžeme písať (Uvedomme si, že $du = dx$!)

$$I = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{8+2x-x^2}} dx = \int \frac{u^2}{\sqrt{9-u^2}} du.$$

2. Použijeme substitúciu podľa návodu

$$u = 3 \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom $du = 3 \cos t dt$ a

$$\sqrt{9-u^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9\cos^2 t} = 3 \cos t.$$

(Prečo nie $\sqrt{9-u^2} = -3 \cos t$?) Dosadíme, v úprave použijeme trigonometrickú identitu $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ a integrujeme.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{9 \sin^2 t}{3 \cos t} 3 \cos t dt = 9 \int \sin^2 t dt = 9 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{9}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) = \frac{9}{2} (t - \sin t \cos t) = \frac{9}{2} \left(\arcsin \frac{u}{3} - \frac{u}{3} \frac{\sqrt{9-u^2}}{3} \right) = \\ &= \frac{9}{2} \arcsin \left(\frac{x-1}{3} \right) - \frac{(x-1)}{2} \sqrt{8+2x-x^2} + c. \end{aligned}$$



Poznámka 5. Integrály obsahujúce odmocninu z kvadratickej funkcie je možné riešiť tiež inými typmi substitúcií ([E], [I], [K]). Niekedy je možné pri integrovaní tohoto typu funkcií použiť metódu per partes.

Príklad 23. Vypočítame integrál $\int \sqrt{1+x^2} dx$.

Riešenie: Metódou per partes dostávame

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - I + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Posledný integrál je jeden zo základných. Pričítaním hodnoty integrálu I k obidvom stranám rovnice a vydelením dvomi dostávame

$$I = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right) + c.$$



Cvičenia

Vypočítajte integrály iracionálnych funkcií.

133. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$

134. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

135. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx.$

136. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$

137. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx.$

138. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}.$

139. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$

140. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{(1-x)(1+x)^2} dx.$

141. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3(x-3)}}.$

142. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-5x^2}}.$

143. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx.$

144. $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}.$

145. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx.$

146. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx.$

147. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx.$

148. $\int \frac{dx}{\sqrt{25+9x^2}}.$

149. $\int \frac{3dx}{\sqrt{9x^2-1}}.$

150. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$

Výsledky

133. $x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) + c.$

134. $-2 \operatorname{arctg} \sqrt{1-x} + c.$

135. $2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}} + c.$

136. $3 \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln |1 + \sqrt[3]{x}| \right) + c.$

137. $-6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3\ln \left| \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[6]{x+1}} \right| + c.$

138. $\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x-4}}{2} \right) + c.$

139. $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c.$

140. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c.$

141. $2\sqrt{\frac{x-3}{x-2}} + c.$

142. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{5x+1}{4} + c.$

143. $\sqrt{x^2-2x+2} + c.$

144. $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}} + c.$

145. $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin \frac{x+1}{2} + c.$

146. $2\sqrt{x^2+x} + c.$

147. $\sqrt{x^2+2x} + \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x}| + c.$

148. $\frac{1}{3} \ln |3x + \sqrt{25 + 9x^2}| + c.$

149. $\ln |3x + \sqrt{9x^2 - 1}| + c.$

150. $-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c.$

1.3.4 Integrovanie transcendentných funkcií

Transcendentné funkcie integrujeme podľa okolností buď metódou substitučnou alebo metódou per partes (podrobnosti sú v závere prechádzajúcej časti). Pri riešení je často potrebné opakovane kombinovať obidve metódy.

Príklad 24. Vypočítame integrál $I = \int x^3 (e^{-x^4} + \operatorname{arccotg} x) dx$.

Riešenie: Daný integrál rozdelíme na dva. Prvý počítame pomocou substitučnej metódy, druhý metódou per partes.

$$\int x^3 e^{-x^4} dx \stackrel{t=-x^4}{=} -\frac{1}{4} \int e^t dt = -\frac{1}{4} e^{-x^4} + c,$$

$$\int x^3 \operatorname{arccotg} x = \left\{ \begin{array}{l} u' = x^3 \quad v = \operatorname{arccotg} x \\ u = \frac{x^4}{4} \quad v' = -\frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{4} \int \frac{x^4 dx}{1+x^2}.$$

Posledný integrál z racionálnej funkcie počítame rozkladom na mnohočlen a rýdzo racionálnu funkciu

$$\int \frac{x^4 dx}{1+x^2} = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - x - \operatorname{arccotg} x + c.$$

Poznamenajme, že namiesto $-\operatorname{arccotg} x$ sme mohli tiež písať $+\operatorname{arctg} x$. Celkový výsledok je súčtom obidvoch integrálov

$$I = -\frac{1}{4} e^{-x^4} + \frac{x^4}{4} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x - \operatorname{arccotg} x \right) + c.$$



Príklad 25. Vypočítame integrál $I = \int \left(4 \cosh^2 x - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$.

Riešenie: Daný integrál vypočítame ako rozdiel dvoch integrálov.

$$I_1 = \int 4 \cosh^2 x dx = \int 4 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} = \sinh x + 2x + c.$$

Druhý integrál riešime metódou per partes.

$$I_2 = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad v = \arcsin x \\ u = -\sqrt{1-x^2} \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\} =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int 1 dx = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c.$$

Nakoniec

$$I = I_1 - I_2 = \sinh x + x + \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c.$$



1.3.5 Záver

Vo všeobecnosti je hľadanie neurčitého integrálu k danej funkcii činnosť náročnejšia ako hľadanie derivácie danej funkcie. Na rozdiel od derivácií neexistuje všeobecný algoritmus ako nájsť integrál ľubovoľnej elementárnej funkcie. Ten istý integrál je často možné riešiť rôznymi metódami (napr. $\int x\sqrt{1-x}$). Na druhej strane existujú elementárne funkcie, ktorých neurčité integrály sa nedajú vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Také sú napríklad

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \sin(x^2) dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \sqrt{1+x^4} dx$$

a ďalšie. Určitou výhodou pri počítaní integrálov oproti počítaniu derivácií je fakt, že v prípade pochybností môžeme správnosť výpočtu integrálu overiť skúškou. Zo vzťahu (1.1)

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

totiž vyplýva, že ak sme pri výpočte postupovali správne, tak deriváciou výslednej funkcie dostaneme integrovanú funkciu.

Cvičenia

Kombináciou rôznych metód vypočítajte integrály.

151. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-3x)^2}}$.

152. $\int e^{-x} \sin^2 x dx$.

153. $\int e^{ax} \cos bx dx$.

154. $\int (3x^2 + 2x + 1) \sin \frac{x}{3} dx$.

155. $\int \sin x \sqrt{(3 + 2 \cos x)^5} dx$.

156. $\int (3x^2 + 1) \ln(x - 4) dx$.

157. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$.

158. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx$.

159. $\int \arcsin^2 x dx$.

160. $\int \sin x \sinh x dx$.

161. $\int (4x^3 + 2x) \operatorname{arctg} x dx$.

162. $\int \frac{dx}{(2x^2+2)\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}}$.

163. $\int (2x - 1) \arccos x dx$.

164. $\int (x^2 - 3x + 1) \cosh 2x dx$.

Výsledky

151. $-\sqrt[3]{4-3x} + c$.

152. $-e^{-x} \sin^2 x - \frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) + c$.

153. $\frac{ae^{ax}}{(a^2+b^2)} (\cos bx + b \sin bx) + c$.

154. $(-9x^2 - 6x + 159) \cos \frac{x}{3} + (54x + 18) \sin \frac{x}{3} + c$.

155. $-\frac{1}{7} \sqrt{(3 + 2 \cos x)^7} + c$.

156. $(x^3 + x - 68) \ln(x - 4) - \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 17x + c$.

157. $-\frac{\ln^2 x + 2 \ln x + 2}{x} + c$.

158. $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{\ln(9x^2+1)}{162} + c$.

159. $x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + c.$

160. $\frac{1}{2}(\sin x \cosh x - \cos x \sinh x) + c.$

161. $(x^4 + x^2) \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} + c.$

162. $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{arccotg} x}} + c.$

163. $(x^2 - x - \frac{1}{2}) \arccos x + (1 - \frac{x}{2})\sqrt{1-x^2} + c.$

164. $(x^2 - 3x + 1) \sinh 2x - (x - \frac{3}{2}) \cosh 2x + c.$

Kapitola 2

Určitý integrál

2.1 Pojem určitého integrálu

Definícia určitého integrálu je pomerne zložitá a čitateľ ju nájde napr. v [1], [5], [6]. Na tomto mieste ju len voľne opíšeme.

Predstavme si, že v intervale $\langle a, b \rangle$ je definovaná nezáporná spojitá funkcia f a potrebujeme vypočítať obsah plochy "pod jej grafom", t.j. obsah rovinatej oblasti ohraničenej grafom funkcie f , osou o_x a priamkami $x = a$ a $x = b$. Pokiaľ je f lineárna alebo konštantná, jedná sa o lichobežník, prípadne obdĺžnik a riešenie úlohy je jednoduché. Pre všeobecnú funkciu môžeme postupovať nasledovne.

Obr. 2.1: Určitý integrál.

1. Rozdelíme bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ interval $\langle a, b \rangle$ na n podintervalov $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Označme d dĺžku najdlhšieho z nich.
2. V každom podintervale zvolíme niektorý bod p_i .
3. V každom podintervale nahradíme príslušnú časť plochy obdĺžnikom so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(p_i)$.
4. Sčítame obsahy všetkých takýchto obdĺžnikov.

$$S = \sum_{i=1}^n f(p_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Dostávame tak aproximáciu (približnú hodnotu) hľadaného obsahu. S týmto výsledkom sa však nemôžeme uspokojiť. Z obrázku je vidieť, že ak zhrustíme deliace body, hodnota S sa viac priblíži skutočnej hodnote. Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka d najdlhšieho podintervalu sa bude blížiť k nule. Takto limitnou hodnotou aproximácie S bude hľadaný obsah.

Tento teoretický postup je však pre všeobecnú funkciu f prakticky neuskutočniteľný. Preto hľadáme iný spôsob, ako nájsť hľadaný obsah. Označme $S(x)$ obsah plochy pod grafom funkcie f v intervale $\langle a, x \rangle$. Všimnime si zmenu $S(x+h) - S(x)$ pre číslo h blízke k nule. Táto sa približne rovná obsahu obdĺžnika so stranami dĺžok h a $f(x)$, teda $S(x+h) - S(x) \approx hf(x)$.

$$\text{Obr. 2.2: } S'(x) = f(x)$$

Preto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x).$$

Výraz na ľavej strane je derivácia funkcie S v bode x , takže dostávame dôležitý fakt

$$S'(x) = f(x),$$

z ktorého vyplýva, že S je tá primitívna funkcia k funkcii f v intervale $\langle a, b \rangle$, pre ktorú platí $S(a) = 0$ (v bode a sa jedná o "plochu" s nulovým obsahom). Preto hľadaný obsah sa rovná rozdielu $S(b) - S(a)$.

V predchádzajúcich riadkoch je približne opísaný proces integrácie spojitej funkcie f v intervale $\langle a, b \rangle$ a motivuje nasledujúci pojem *určitého integrálu*. *Nech f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b \rangle$ a F je funkcia primitívna k f v intervale $\langle a, b \rangle$. Určitý integrál funkcie f v intervale $\langle a, b \rangle$ je číslo $F(b) - F(a)$.* Tento fakt zapisujeme nasledovne

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (2.1)$$

Poznámka 1. Uvedený vzťah sa volá **Newtonova-Leibnizova formula**. Neurčitý a určitý integrál sú vo svojej podstate naprosto odlišné matematické objekty. Kým neurčitý integrál je množina funkcií, určitý integrál je číslo. To, čo ich spája (okrem slova integrál v ich názvoch), je skutočnosť vyjadrená uvedeným vzťahom (2.1), že určitý integrál sa dá vyjadriť pomocou ľubovoľnej funkcie z neurčitého integrálu. Vo vzťahu (2.1) výraz na ľavej strane je označením určitého integrálu funkcie f v intervale $\langle a, b \rangle$ a výraz v strede je iný zápis čísla $F(b) - F(a)$. Pri samotnom výpočte postupujeme tak, že najskôr nájdeme niektorú primitívnu funkciu F k funkcii f (označenie výrazom v strede)

a potom dosadíme krajné body intervalu a odčítame (výraz na pravej strane). Odporúčame čitateľovi presvedčiť sa, že číslo $F(b) - F(a)$ nie je závislé od výberu primitívnej funkcie.

Príklad 1. Vypočítame a) $\int_1^4 x dx$, b) $\int_1^4 x^2 dx$, c) $\int_{-1}^1 x^2 dx$, d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, e) $\int_1^e \ln x dx$, f) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Riešenie: a)

$$\int_1^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{15}{2}.$$

b)

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{63}{3}.$$

c)

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

d)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 - (-1) = 1.$$

e)

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

f)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

♣

Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Nasledujúce vzťahy sú jednoduchými dôsledkami vzťahu (2.1) a vlastností neurčitého integrálu a platia, ak funkcie sú spojité v intervaloch, v ktorých integrujeme.

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (2.2)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (2.3)$$

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx, \quad c, d \in \mathcal{R}. \quad (2.4)$$

Vzťah (2.4) sa používa pri výpočte integrálov zložených z funkcií, ktorých integrál už poznáme.

Príklad 2. Vypočítame $\int_1^4 (3x^2 - 5x) dx$.

Riešenie: Výpočet môžeme uskutočniť priamo

$$\begin{aligned} \int_1^4 (3x^2 - 5x) dx &= \left[x^3 - 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \left(4^3 - 5 \cdot \frac{4^2}{2} \right) - \left(1^3 - 5 \cdot \frac{1^2}{2} \right) = \\ &= \left(64 - 5 \cdot \frac{16}{2} \right) - \left(1 - 5 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{51}{2} \end{aligned}$$

alebo použitím vzťahu (2.4) a prvých dvoch integrálov v Príklade 1

$$\int_1^4 (3x^2 - 5x) dx = 3 \int_1^4 x^2 dx - 5 \int_1^4 x dx = 3 \cdot \frac{63}{3} - 5 \cdot \frac{15}{2} = \frac{51}{2}.$$

Pri výpočte nasledujúceho integrálu použijeme vzťah (2.3).

Príklad 3. Vypočítame $\int_0^\pi |\cos x| dx$.

Riešenie: Pretože funkcia $\cos x$ mení v bode $\frac{\pi}{2}$ intervalu integrácie znamienko, integrál vypočítame podľa vzťahu (2.3) ako súčet integrálov.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x) dx = \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2. \end{aligned}$$



2.1.1 Cvičenia

Vypočítajte určité integrály.

1. $\int_{-1}^1 (x+1)^2 dx,$

2. $\int_0^1 (x^2 - 2x + 3) dx,$

3. $\int_0^\pi \sin x dx,$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$

5. $\int_{-7}^5 |x+1| dx,$

6. $\int_{-1}^1 \cosh x dx,$

7. $\int_1^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx,$

8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x + \cos x dx.$

9. Funkcia f je definovaná

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \sqrt{x}, & x \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

Vypočítajte $\int_0^2 f(x) dx$.

2.1.2 Výsledky

- | | | | |
|-----------------------------------|------------------------|---------------------|----------------------|
| 1. $\frac{8}{3}$, | 2. $\frac{7}{3}$, | 3. 2, | 4. $\frac{\pi}{4}$, |
| 5. 36, | 6. $e - \frac{1}{e}$, | 7. $\frac{64}{3}$, | 8. 0. |
| 9. $\frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 1)$. | | | |

2.2 Metódy počítania určitého integrálu

Pre výpočet určitého integrálu modifikujeme metódy výpočtu neurčitého integrálu nalsedovne.

Metóda per partes pre určité integrály.

Nech funkcie f a g majú spojité derivácie v intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad (2.5)$$

Substitučná metóda pre určité integrály.

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = (t = \varphi(x)) = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t) dt. \quad (2.6)$$

Tento vzťah platí, ak φ' je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b \rangle$ a f je spojitá funkcia v obore hodnôt funkcie φ . Uvedomme si, že hranice integrálu na pravej strane vzniknú dosadením hraníc pôvodnej premennej x do vzťahu medzi novou a starou premennou $t = \varphi(x)$.

Pri počítaní určitých integrálov zo zložitejších funkcií môžeme postupovať v zásade dvomi spôsobmi

- Oddelíme fázu výpočtu primitívnej funkcie od fázy výpočtu určitého integrálu. Najskôr si nevšimame hranice a počítame len neurčitý integrál danej funkcie. Po vypočítaní použijeme jednu z nájdených primitívnych funkcií (spravidla volíme integračnú konštantu $c = 0$) na dosadenie koncových bodov intervalu a výpočet určitého integrálu.
- Neoddelíme fázu výpočtu primitívnej funkcie od fázy výpočtu určitého integrálu. Počas výpočtu spájame techniku integrovania s dosadením hodnôt (metóda per partes), prípadne so zmenami hraníc (substitučná metóda).

Veríme, že použitie prvého spôsobu výpočtu čitateľovi nebude robiť problémy, preto sa v riešeniach obmedzíme na výpočet druhým spôsobom.

Príklad 4. Substitučnou metódou vypočítame určité integrály

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}, \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, \quad \int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx.$$

Riešenie: V každom riešení naznačíme substitúciu a zmenu hraníc. Podrobnosti výpočtu necháme na čitateľa.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = (t = x+2) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= [\operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx &= (t = x^2 + 1) = \int_1^4 \frac{2dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= 4 [\sqrt{t}]_1^4 = 4(2 - 1) = 4. \end{aligned}$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = (t = 1 + \sqrt{x}) = \int_2^3 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = (t = \cos x) = \int_{\cos 0}^{\cos \frac{\pi}{4}} -\frac{1-t^2}{t^3} dt = \\ &= \left[\frac{1}{2t^2} + \ln t\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1 + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{1}{2} + \ln 1\right)\right) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2). \end{aligned}$$



Príklad 5. Metódou per partes vypočítame určité integrály

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx, \int_0^3 \ln(x+3) dx, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx, \int_0^{\ln 2} x \cosh x dx.$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx &= \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= 0 - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \ln(x+3) dx &= [x \ln(x+3)]_0^3 - \int_0^3 \frac{x}{x+3} dx = 3 \ln 6 - [x - 3 \ln(x+3)]_0^3 = \\ &= 3 \ln 6 - (3 - 3 \ln 6 + 3 \ln 3) = 6 \ln 6 - 3 \ln 3 - 3 = 3(\ln 12 - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx &= [-x \cotg x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cotg x dx = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + [\ln(\sin x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} x \cosh x dx &= [x \sinh x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \sinh x dx = \\ &= \ln 2 \left(\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2}\right) - 0 - [\cosh x]_0^{\ln 2} = \\ &= \ln 2 \left(\frac{2 - \frac{1}{2}}{2}\right) - \left(\frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} - \frac{e^0 + e^0}{2}\right) = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



2.2.1 Cvičenia

Vypočítajte určité integrály.

$$10. \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3},$$

$$12. \int_9^{49} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$$

$$14. \int_0^{\pi} x \cos(2x - \frac{\pi}{2}) dx,$$

$$16. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$18. \int_1^3 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx,$$

$$20. \int_0^1 \frac{3x}{1+x^2} dx,$$

$$22. \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}},$$

$$24. \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx,$$

$$26. \int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 2x dx,$$

$$28. \int_0^{2\pi} |\sin x| dx,$$

$$30. \int_{\frac{\omega}{2\pi}}^{\omega} \cos(\omega x) dx,$$

$$32. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x} dx,$$

$$34. \int_0^{\pi} \cos 3x \cos 4x dx,$$

$$36. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2},$$

$$38. \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x-x^2},$$

$$40. \int_0^1 \frac{3x^2}{x^2+2x+1} dx,$$

$$42. \int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx,$$

$$44. \int_0^1 \frac{12 dx}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$46. \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{5}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$$

$$48. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\cos^2 2x} dx,$$

$$11. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx,$$

$$13. \int_{-1}^0 x \sqrt{1-x^2} dx,$$

$$15. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$17. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}},$$

$$19. \int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

$$21. \int_{\sqrt{\ln 2}}^0 x e^{x^2} dx,$$

$$23. \int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$$

$$25. \int_0^1 \sqrt{x^5 + 2x}(5x^4 + 2) dx,$$

$$27. \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx,$$

$$29. \int_0^{\pi} \cos^2 x dx,$$

$$31. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}},$$

$$33. \int_{-\pi}^0 \sin 3x \cos 2x dx,$$

$$35. \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x dx,$$

$$37. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{x^2+1} dx,$$

$$39. \int_{-1}^0 \frac{x dx}{x^2-3x+2},$$

$$41. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{5x^2}{x^2+1} dx,$$

$$43. \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+2} dx,$$

$$45. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$47. \int_0^2 \frac{x dx}{x^2+4x+3},$$

$$49. \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} dx,$$

$$50. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\cot^2 x + 1} dx,$$

$$52. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx,$$

$$54. \int_0^1 \ln(x+1) dx,$$

$$56. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx,$$

$$58. \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{dx}{\cos^3 x},$$

$$60. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx,$$

$$62. \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx,$$

$$64. \int_0^{\ln 2} x \cosh x dx,$$

$$51. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} dx,$$

$$53. \int_1^2 x \ln x dx,$$

$$55. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx,$$

$$57. \int_0^4 (x-1)\sqrt{2x+1} dx,$$

$$59. \int_0^1 \ln(x^2+1) dx,$$

$$61. \int_0^1 \arcsin x dx,$$

$$63. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx,$$

$$65. \int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$$

2.2.2 Výsledky

$$10. \frac{2}{9},$$

$$13. -\frac{1}{3},$$

$$16. \frac{\pi}{12},$$

$$19. \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right),$$

$$22. 2 \ln 2,$$

$$25. 2\sqrt{3},$$

$$28. 4,$$

$$31. \frac{\pi}{2},$$

$$34. 0,$$

$$37. 4 - \ln 3,$$

$$40. \frac{9}{2} - 6 \ln 2,$$

$$43. 2 \ln 3 - 3 \ln 2,$$

$$46. -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$49. 4,$$

$$52. 2 - \frac{\pi}{2},$$

$$55. \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2},$$

$$58. \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3}),$$

$$61. \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$64. \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{1}{4},$$

$$11. \sqrt{2} - 1,$$

$$14. -\frac{\pi}{2},$$

$$17. \frac{\pi}{6},$$

$$20. \frac{3}{2} \ln 2,$$

$$23. 2 - \sqrt{3},$$

$$26. 0,$$

$$29. \frac{\pi}{2},$$

$$32. \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

$$35. \pi,$$

$$38. 2 \ln 3,$$

$$41. 5\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$44. 2\pi,$$

$$47. \ln \frac{5\sqrt{5}}{9},$$

$$50. 2 \ln(\sqrt{2} + 1),$$

$$53. 2 \ln 2 - \frac{3}{4},$$

$$56. \frac{1}{2},$$

$$59. \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2},$$

$$62. -4\pi,$$

$$65. \frac{e^2+3}{8}.$$

$$12. 3,$$

$$15. \frac{\pi}{12},$$

$$18. \sin(\ln 3),$$

$$21. \frac{1}{2},$$

$$24. \frac{2}{\ln 2},$$

$$27. 2,$$

$$30. 0,$$

$$33. -\frac{6}{5},$$

$$36. \ln \sqrt{3},$$

$$39. 3 \ln 2 - 2 \ln 3,$$

$$42. \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4},$$

$$45. \frac{2-\sqrt{2}}{3},$$

$$48. 2,$$

$$51. \ln 2,$$

$$54. 2 \ln 2 - 1,$$

$$57. \frac{168}{15},$$

$$60. \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

$$63. \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right),$$

2.3 Vlastnosti určitého integrálu

Nasledujúca vlastnosť sa volá Veta o strednej hodnote pre určitý integrál a vyplýva zo vzťahu (2.1) a Vety o strednej o hodnote pre derivácie.

Ak f je spojitá funkcia v intervale (a, b) , tak existuje také číslo $c \in (a, b)$, že platí

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a). \quad (2.7)$$

Hodnota $f(c)$ v tomto vzťahu sa volá **stredná hodnota** integrálu $\int_a^b f(x) dx$.

Dôsledkom Vety o strednej hodnote sú nasledujúce dva vzťahy, ktoré sa používajú na odhady integrálov (alebo iných hodnôt), ktoré je ťažké alebo nemožné presne vypočítať.

Ak pre všetky $x \in (a, b)$ platí $f(x) \leq g(x)$, tak

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (2.8)$$

Ak pre všetky $x \in (a, b)$ platí $m \leq f(x) \leq M$, tak

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a). \quad (2.9)$$

Príklad 6. Odhadneme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

Riešenie: Tento integrál nie je možné presne vypočítať elementárnymi metódami. Z vety o strednej hodnote pre derivácie a z konkávnosti funkcie $\sin x$ v intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ vyplýva (načrtnite si obrázok a overte), že pre všetky $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$$

a po vydelení kladným číslom x dostaneme

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Použitie vzťahu (2.8) dáva

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx.$$

Po výpočte jednoduchých integrálov z konštant dostávame odhad

$$1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2}.$$



Príklad 7. Odhadneme integrál $\int_2^4 e^{-x^2} dx$.

Riešenie: Integrovaná funkcia je klesajúca v intervale $(2, 4)$, preto pre všetky $x \in (2, 4)$ platí

$$e^{-16} < e^{-x^2} < e^{-4}.$$

Použitím vlastnosti (2.9) dostávame odhad

$$2 \cdot 10^{-7} \approx 2e^{-16} = \int_2^4 e^{-16} dx \leq \int_2^4 e^{-x^2} dx \leq \int_2^4 e^{-4} = 2e^{-4} \approx 0,0366.$$



Vlastnosti symetrie integrovanej funkcie majú vplyv na určitý integrál.

Ak f je spojitá párna funkcia, tak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad (2.10)$$

Ak f je spojitá nepárna funkcia, tak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad (2.11)$$

Ak f je spojitá periodická funkcia s periodou p a $a, c \in \mathcal{R}$, tak

$$\int_0^p f(x) dx = \int_a^{a+p} f(x) dx = \int_a^{a+p} f(x-c) dx. \quad (2.12)$$

Príklad 8. Ukážeme platnosť vzťahu (2.11) a pomocou neho a vzťahu (2.12) vypočítame integrál

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px dx, \quad p \in \mathcal{R}.$$

Riešenie: Nech f je spojitá nepárna funkcia a F je niektorá jej primitívna funkcia v intervale $\langle -a, a \rangle$. Najskôr ukážeme, že F je párna funkcia. Deriváciou zloženej funkcie $F(-x)$ a použitím vlastnosti nepárnej funkcie $f(x) = -f(-x)$ dostávame

$$[F(-x)]' = F'(-x) \cdot (-1) = -f(-x) = f(x) = F'(x).$$

Integrovaním obidvoch krajných výrazov rovnosti dostávame

$$F(-x) + c_1 = \int [F(-x)]' dx = \int F'(x) dx = F(x) + c_2$$

a úpravou dostaneme rovnosť

$$F(x) - F(-x) = c_1 - c_2 = c,$$

ktorá platí pre všetky $x \in D(f)$. Dosadením $-x$ namiesto x do tejto rovnosti máme

$$c = F(-x) - F(x) = -(F(x) - F(-x)) = -c.$$

Preto $c = 0$ a $F(-x) = F(x)$ pre všetky $x \in D(F)$ a F je párna funkcia. Pretože F je párna funkcia, platí

$$\int_{-a}^a f(x) dx = [F(x)]_{-a}^a = F(a) - F(-a) = 0.$$

Keďže funkcia $\sin px$ je nepárna, pre každé reálne číslo p , platí $\int_{-\pi}^{\pi} \sin px dx = 0$. ♣

Poznámka 2. Pomocou vzťahu (2.11) môžeme vypočítať aj integrály z nepárnych funkcií, ku ktorým je veľmi ťažké alebo nemožné nájsť primitívnu funkciu, napr.

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0.$$

Príklad 9. Nech m a n sú prirodzené čísla. Ukážeme, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad \text{ak } m \neq n$$

a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \pi, \quad \text{ak } m = n.$$

Riešenie: Integrovanú funkciu upravíme podľa vzťahu

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Potom s použitím predchádzajúceho príkladu

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx \right). \end{aligned}$$

Druhý integrál je nulový pre všetky dvojice prirodzených čísel m , n , prvý je nulový ak $m \neq n$. Ak $m = n$, tak

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi.$$

♣

Niekedy je možné použitím vlastností (2.12) vypočítať určitý integrál bez výpočtu primitívnej funkcie.

Príklad 10. Vypočítame $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Riešenie: Použijeme vzťahy (2.12) a trigonometrické identity $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ a $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$. Substitúciou $t = x - \frac{\pi}{2}$ dostávame

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^4(x - \frac{\pi}{2}) \sin^2(x - \frac{\pi}{2}) dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx. \end{aligned}$$

Sčítaním integrálov na ľavej a pravej strane a použitím vzťahov $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ dostávame

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^2 x dx + \int_0^{2\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2x dx. \end{aligned}$$

Opätovným použitím trigonometrických vzťahov dostávame (podrobnosti nechávame čitateľovi)

$$I = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} (\sin^2 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} 1 dx = \frac{\pi}{8}.$$



2.3.1 Cvičenia

V nasledujúcich šiestich cvičeniach bez výpočtu určite, ktorý z dvojice integrálov je väčší.

66. a) $\int_0^1 x dx$ b) $\int_0^1 x^2 dx$. 67. a) $\int_{\frac{1}{2}}^2 x dx$ b) $\int_1^2 x^2 dx$.
68. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$. 69. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$.
70. a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ b) $\int_0^1 e^{-x^3} dx$. 71. a) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{3} x dx$ b) $\int_{-2}^{-1} 3^x dx$.

V nasledujúcich cvičeniach bez výpočtu pomocou vzťahu (2.9) odhadnite dané integrály.

72. $\int_0^2 \frac{dx}{10+x}$, 73. $\int_0^1 e^{x^2} dx$,
74. $\int_1^2 \frac{x dx}{x^2+1}$, 75. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$,
76. $\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx$, 77. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3 \cos^2 x}$.

78. Ukážte platnosť vzťahov (2.10) a (2.12).

79. Ukážte platnosť vzťahov

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0, \quad n \in \mathcal{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0, \quad m, n \in \mathcal{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \quad m \neq n \quad \text{a} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi, \quad m = n.$$

V nasledujúcich cvičeniach nech f a g sú spojité funkcie v intervale $\langle a, b \rangle$.

80. Ukážte, že platí $\int_a^b f(x)g(a+b-x) \, dx = \int_a^b g(x)f(a+b-x) \, dx$. (Návod: Použite substitúciu $t = a + b - x$.)

Vhodnou voľbou funkcie g v predchádzajúcom cvičení ukážte, že platí

$$\mathbf{81.} \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx.$$

$$\mathbf{82.} \quad \int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_{-a}^a f(-x) \, dx.$$

$$\mathbf{83.} \quad \int_0^1 x^m(1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m \, dx.$$

Použitím trigonometrického vzťahu $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ a predchádzajúcich cvičení ukážte, že platí

$$\mathbf{84.} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, dx.$$

$$\mathbf{85.} \quad \text{Pomocou predchádzajúceho cvičenia vypočítajte} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \quad \text{a} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx.$$

$$\mathbf{86.} \quad \text{Pomocou vzťahu (2.11) ukážte, že} \quad \int_{-a}^a \sin x f(\cos x) \, dx = 0.$$

$$\mathbf{87.} \quad \text{Ukážte, že platí} \quad \int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) \, dx.$$

$$\mathbf{88.} \quad \text{Ukážte, že platí} \quad \int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx.$$

$$\mathbf{89.} \quad \text{Použitím predchádzajúceho cvičenia vypočítajte} \quad \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx.$$

90. Použitím vzťahov v tejto časti oddôvodnite, prečo sú všetky nasledujúce integrály rovné 0.

$$\int_{-1}^1 \sin 3x \cos 5x \, dx, \quad \int_{-\ln 2}^{\ln 2} x \cosh x \, dx, \quad \int_{-a}^a \frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin x \sqrt{\cos^3 x + 1} \, dx.$$

2.3.2 Výsledky

66. a), **67.** b), **68.** a), **69.** a), **70.** b), **71.** a),

$$\mathbf{72.} \quad \frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5},$$

$$\mathbf{73.} \quad 1 < \int_0^1 e^{x^2} \, dx < e,$$

$$\mathbf{74.} \quad \frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{x \, dx}{x^2+1} < \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{75.} \quad \frac{\pi}{2} x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx < x,$$

$$\mathbf{76.} \quad -0,08 < \int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} \, dx < 0,08,$$

$$\mathbf{77.} \quad \frac{\pi}{16} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} < \frac{\pi}{10}.$$

2.4 Integrály s premennou hranicou

Vieme, že hodnota určitého integrálu závisí od dvoch činiteľov: od integrovanej funkcie a od intervalu, v ktorom integrujeme. V prípade, keď je integrovaná funkcia pevne daná a jedna z hraníc pevná a druhá pohyblivá, je výsledná hodnota funkciou druhej hranice. Uvažujme prípad, keď je dolná hranica pevná a horná pohyblivá (opačný prípad vedie k analogickým výsledkom).

Nech f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b \rangle$ a nech $c \in \langle a, b \rangle$. Potom funkcia

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

je tá primitívna funkcia k funkcii f v intervale $\langle a, b \rangle$, pre ktorú platí $F(c) = 0$.

Z tohoto vyplývajú nasledujúce vzťahy

$$\frac{d}{dx} \left(\int_c^x f(t) dt \right) = f(x), \quad (2.13)$$

ak f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b \rangle$ a

$$f(x) = \int_c^x f'(t) dt + f(c), \quad (2.14)$$

ak f má deriváciu v intervale $\langle a, b \rangle$.

Príklad 11. Nech $F(x) = \int_x^0 \frac{\sin t}{1+t^2} dt$ a $G(x) = \int_0^{x^2} \cos t dt$. Vypočítame $\frac{dF}{dx}$ a $\frac{dG}{dx}$.

Riešenie: Úpravou a použitím vzťahu (2.13) dostávame

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_x^0 \frac{\sin t}{1+t^2} dt \right) = \frac{d}{dx} \left(- \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} dt \right) = - \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

V druhom príklade ide o deriváciu zloženej funkcie. Integrál je funkciou premennej $u = x^2$. Preto platí

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \cos t dt \right) = \left(\frac{d}{du} \left(\int_0^u \cos t dt \right) \right) \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) = \\ &= \cos u \cdot \frac{du}{dx} = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2. \end{aligned}$$



Príklad 12. Nájdeme tú primitívnu funkciu F k funkcii $y = x \operatorname{arctg} x$, pre ktorú platí $F(1) = \pi$.

Riešenie: Použijeme vzťah (2.14) a integráciu per partes.

$$F(x) = \int_1^x t \operatorname{arctg} t dt + \pi = \left[\frac{1}{2} t^2 \operatorname{arctg} t \right]_1^x - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt + \pi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} [t - \operatorname{arctg} t]_1^x + \pi = \\
&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} x - 1 + \frac{\pi}{4}\right) + \pi = \\
&\quad \frac{1}{2} \left(x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x + \frac{3\pi}{2} + 1\right).
\end{aligned}$$



2.4.1 Cvičenia

V nasledujúcich príkladoch vypočítajte $\frac{dF}{dx}$.

91. $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt,$

92. $F(x) = \int_x^5 \frac{dt}{t},$

93. $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{1+\sqrt{1-t}},$

94. $F(x) = \int \cos(t^2) dt,$

95. $F(x) = \int_{\sin x}^0 \frac{dt}{2+t},$

96. $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t},$

97. $F(x) = \int_{\cos x}^0 \frac{dt}{1-t^2},$

98. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{10} \sin(t^2) dt,$

99. $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt,$

100. $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} e^{\sqrt{t}} dt.$

Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte limity.

101. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt,$

102. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt,$

V nasledujúcich príkladoch nájdite tú primitívnu funkciu F k danej funkcii f , ktorá spĺňa danú podmienku.

103. $f(x) = x \ln x, \quad F(1) = 0,$

104. $f(x) = \cos^2 2x \sin x, \quad F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -13,$

105. $f(x) = \operatorname{tgh}^2 x, \quad F(0) = -1,$

106. $f(x) = 4x^3 - 6x + 11, \quad F(1) = 2F(2).$

107. Nech f má kladnú deriváciu pre všetky $x \in \mathcal{R}$ a nech $f(1) = 0$. Ktoré z nasledujúcich tvrdení o funkcii $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ sú určite pravdivé?

a) F má deriváciu v každom $x \in \mathcal{R}$.

b) F je spojitá funkcia.

c) Graf funkcie F má dotyčnicu rovnobežnú s osou o_x v bode $[1, 0]$.

d) F má lokálne maximum v bode $[1, 0]$.

e) F má lokálne minimum v bode $[1, 0]$.

f) F má inflexný bod v bode $[1, 0]$.

g) Graf $\frac{dF}{dx}$ pretína os o_x v bode $[1, 0]$.

2.4.2 Výsledky

91. $\sqrt{1+x^2}$, 92. $-\frac{1}{x}$, 93. $\frac{2x}{1+\sqrt{1-x^2}}$,
 94. $2 \cos(4x^2)$, 95. $-\frac{\cos x}{2+\sin x}$, 96. $-\frac{1}{x}$,
 97. $\frac{1}{\sin x}$, 98. $-\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$, 99. $(9x^2 - 4x) \ln x$,
 100. $2xe^x + \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$, 101. 1, 102. $\frac{2}{3}$,

103. $F(x) = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$,
 104. $F(x) = -\frac{4}{5} \cos^5 x + \frac{4}{3} \cos^3 x - \cos x - 13$,
 105. $F(x) = x - \operatorname{tgh} x - 1$,
 106. $F(x) = x^4 - 3x^2 + 11x - 43$.
 107. a), b), c), e), g).

2.5 Nevlastné integrály

Ak sa v určitom integrále vyskytne neohraničený interval alebo neohraničená funkcia, hovoríme o **nevlastnom integrále**. Rozoznávame dva druhy nevlastných integrálov.

- Ak interval, v ktorom integrujeme je neohraničený, hovoríme o **nevlastnom integrále prvého druhu**. Ide o integrály

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_a^{\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

- Ak je integrovaná funkcia v intervale integrácie $\langle a, b \rangle$ neohraničená (a teda nespojitá), hovoríme o **nevlastnom integrále druhého druhu**.

Naviac sa môže vyskytnúť kombinácia oboch uvedených možností, napríklad $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$.

2.5.1 Nevlastné integrály prvého druhu

Pri počítaní integrálu $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ zo zrejmých dôvodov nemôžeme použiť vzťah (2.1). Preto postupujeme nasledovne

1. Vypočítame integrál $F(a) = \int_a^b f(x) dx$ ako funkciu dolnej hranice.
2. Hľadáme $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$.

Pritom môžu nastať dva prípady.

Ak hľadaná limita existuje a je vlastná, hovoríme, že daný integrál **konverguje**.

Ak hľadaná limita neexistuje alebo je nevlastná, hovoríme, že daný integrál **diverguje**.

Analogicky postupujeme pri výpočte integrálu $\int_a^\infty f(x) dx$.

Pri výpočte integrálu $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ postupujeme tak, že zvolíme ľubovoľné číslo $a \in \mathcal{R}$ a vypočítame integrály $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ a $\int_a^\infty f(x) dx$. Hľadaný integrál konverguje práve vtedy, ak konvergujú obidva počítané integrály a potom

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx.$$

Výpočet príslušných primitívnych funkcií v príkladoch tejto časti necháme na čitateľa.

Príklad 13. Vypočítame nevlastné integrály prvého druhu $\int_{-\infty}^0 x^2 e^{x^3} dx$, $\int_0^\infty \cos x dx$, $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$, $p > 0$ $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x^2 e^{x^3} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x^2 e^{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} [e^{x^3}]_a^0 = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^{a^3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{a^3} = \frac{1}{3}. \\ \int_0^\infty \cos x dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\sin x]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b. \end{aligned}$$

Posledná limita neexistuje, preto integrál diverguje.

Pri počítaní tretieho integrálu najskôr predpokladajme, že $p \neq 1$.

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_a^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - a^{1-p}) = \frac{1}{1-p} (\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} - a^{1-p}). \end{aligned}$$

Limita v poslednom výraze je ∞ , ak $1-p > 0$ a rovná sa nule, ak $1-p < 0$. Preto integrál diverguje pre $p < 1$. Pre $p > 1$ je

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}.$$

V prípade $p = 1$ máme

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - \ln a = \infty.$$

Integrál preto diverguje aj v prípade $p = 1$.

Integrovaná funkcia je párna. Preto podľa vlastnosti (2.10) platí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= 2 \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctg x]_0^b = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - 0) = 2 \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$



Niekedy nie je potrebné zistiť presnú hodnotu nevlastného integrálu, ale máme len rozhodnúť či integrál konverguje alebo diverguje. Vtedy môžeme použiť nasledujúce kritériá.

- Ak $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konverguje, tak aj $\int_a^\infty f(x) dx$ konverguje.
- Nech f a g sú spojité funkcie a nech $0 \leq f(x) \leq g(x)$ platí pre všetky $x \geq x_0$ pre niektoré $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom, ak $\int_a^\infty g(x) dx$ konverguje, tak aj $\int_a^\infty f(x) dx$ konverguje.
- Nech existuje konečná $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je rôzna od nuly. Potom obidva nevlastné integrály $\int_a^\infty g(x) dx$ a $\int_a^\infty f(x) dx$ buď súčasne konvergujú alebo súčasne divergujú.

Analogické kritériá platia pre konvergenciu nevlastných integrálov typu $\int_{-\infty}^b f(x) dx$. Pri porovnávaní konvergencie integrálov často požívame výsledok predchádzajúceho príkladu, že $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$, $p > 0$ konverguje práve vtedy, ak $p > 1$.

Príklad 14. Rozhodnite o konvergencii integrálov

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^{10}}, \quad J = \int_1^\infty \frac{dx}{x+\sin^2 x}, \quad K = \int_0^\infty \sin(x^2) dx.$$

Riešenie: V predchádzajúcom príklade sme ukázali, že $\int_1^\infty \frac{1}{x^{10}} dx$ konverguje. Pretože pre všetky $x \geq 1$ je $\frac{1}{1+x^{10}} < \frac{1}{x^{10}}$, konverguje aj integrál $I = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^{10}} dx$.

V predchádzajúcom príklade sme ukázali, že $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ diverguje. Pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{x+\sin^2 x} = 1$, diverguje aj $J = \int_1^\infty \frac{dx}{x+\sin^2 x}$.

Substitúciou $x = \sqrt{t}$ prevedieme daný integrál

$$K = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \right)$$

Prvý integrál je vlastný, lebo funkcia $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ je ohraničená, keďže $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$ (overte!). Druhý integrujeme metódou per partes

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\infty - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} dt = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} dt.$$

Pri výpočte sme použili

$$\left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \right]_{\frac{\pi}{2}}^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \right]_{\frac{\pi}{2}}^b = 0.$$

Pre všetky t platí $\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^3}}$ a integrál $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt$ konverguje podľa predchádzajúceho príkladu. Preto

aj integrál $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} dt$ konverguje, a tiež pôvodný integrál K konverguje. ♣

2.5.2 Nevlastné integrály druhého druhu

Pri počítaní nevlastných integrálov druhého druhu môžeme používať premennú hranicu a výpočet limity podobne ako pri nevlastných integráloch prvého druhu ([E], [I], [K]), alebo môžeme postupovať nasledovne.

Nazvime funkciu F **zovšeobecnou primitívnou** k funkcii f v intervale $\langle a, b \rangle$, ak $F'(x) = f(x)$ pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$ s možnou výnimkou konečného počtu.

Nech f je funkcia neohraničená v intervale $\langle a, b \rangle$.

Ak existuje **spojitá** zovšeobecnená primitívna funkcia F v intervale $\langle a, b \rangle$, tak $\int_a^b f(x) dx$ konverguje a

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ak existuje **neohraničená** zovšeobecnená primitívna funkcia F v intervale $\langle a, b \rangle$, tak $\int_a^b f(x) dx$ diverguje.

Príklad 15. Vypočítame nevlastné integrály druhého druhu

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cotg x dx, \quad \text{c) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p \in \mathcal{R}.$$

Riešenie: a) Integrovaná funkcia má primitívnu funkciu (overtel!) $F(x) = -\sqrt{1-x^2}$, ktorá je spojitá v intervale $\langle -1, 1 \rangle$. Navyiac integrovaná funkcia je nepárna, preto daný integrál existuje a rovná sa 0.

b) Integrovaná funkcia má primitívnu funkciu (overtel!) $F(x) = \ln(\sin x)$ v intervale $(0, \frac{\pi}{2})$, ktorá je v tomto intervale neohraničená (prečo?). Preto $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cotg x dx$ diverguje.

Budeme uvažovať tri prípady vzhľadom k parametru p .

Pre $p < 1$ má integrovaná funkcia spojitú primitívnu funkciu $F(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p}$ v intervale $\langle -1, 1 \rangle$ a preto daný integrál konverguje a platí

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{1-p}.$$

Pre $p = 1$ má integrovaná funkcia zovšeobecnú primitívnu funkciu $F(x) = \ln|x|$, ktorá je neohraničená v intervale $\langle -1, 1 \rangle$ a preto v tomto prípade integrál diverguje (funkcia $\ln|x|$ nie je primitívna, ale len zovšeobecná primitívna k funkcii $\frac{1}{x}$ v intervale $\langle -1, 1 \rangle$, lebo funkcie nie sú definované v bode 0).

Pre $p > 1$ má integrovaná funkcia zovšeobecnú primitívnu funkciu $F(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p} = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}}$ v intervale $\langle -1, 1 \rangle$, ktorá v tomto intervale nie je ohraničená a preto aj v tomto prípade integrál diverguje. ♣

Príklad 16. Vypočítame nevlastné integrály

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4} \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Riešenie: a) Integrovaná funkcia má zovšeobecnú primitívnu funkciu $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$, ktorá je v okolí bodu 0 neohraničená, preto daný integrál diverguje.

b) Substitúciou $t = \frac{1}{x}$ prevedieme daný nevlastný integrál (prvého aj druhého druhu !) na iný nevlastný integrál (len) prvého druhu

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = - \int_{\infty}^0 \sin t dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\cos t]_a^0 = 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \cos a.$$

Keďže táto limita neexistuje, daný integrál diverguje. K tomuto príkladu poznamenajme, že pôvodný integrál môžeme napísať ako súčet dvoch integrálov

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx + \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx,$$

z ktorých prvý je nevlastný druhého druhu a druhý nevlastný prvého druhu. Ktorý z nich spôsobuje divergenciu? ♣

Nasledujúci príklad upozorňuje na nutnosť overiť si pred počítaním integrálu, či ide o integrál vlastný alebo nevlastný.

Príklad 17. Počítame $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Riešenie:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - (-1) = 0.$$

Na druhej strane, v celom intervale $\langle -1, 1 \rangle$ platí $0 < \frac{1}{x^2}$ a preto podľa vlastnosti (2.8) musí byť

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx > 0$$

Nesprávnosť postupu spočíva v jeho výpočte. Integrovaná funkcia je neohraničená v okolí bodu 0 a preto sa jedná o nevlastný integrál druhého druhu. Zovšeobecnená primitívna funkcia $-\frac{1}{x}$ je neohraničená v okolí bodu 0 a preto daný integrál diverguje. ♣

2.5.3 Cvičenia

Vypočítajte nevlastné integrály.

108. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx,$

110. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}},$

112. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3},$

114. $\int_{-\infty}^0 x e^{5x} dx,$

116. $\int_0^{\infty} x \sin x dx,$

118. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2(1-x)},$

109. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3},$

111. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3},$

113. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$

115. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x^3},$

117. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x+x^3},$

119. $\int_{-\infty}^0 e^x \sin x dx,$

120. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$,
 122. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$,
 124. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$,
 126. $\int_{-\ln 2}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$,
 128. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$,
 130. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$,
 132. $\int_1^e \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}}$,
 134. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$,
 136. $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$,
121. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$,
 123. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-7x+10}$,
 125. $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$,
 127. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,
 129. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$,
 131. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$,
 133. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$,
 135. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$,
 137. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^p x}$,

Rozhodnite, či daný integrál konverguje alebo diverguje.

138. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{3x^4+2x^2+1}$,
 140. $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x} dx$,
 142. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$,
 144. $\int_0^{\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^3}} dx$,
 146. $\int_1^{\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx$,
139. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sin^2 x}$,
 141. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$,
 143. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$,
 145. $\int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$,
 147. $\int_0^{\infty} e^{-px} dx$,

2.5.4 Výsledky

108. $\frac{\pi^2}{8}$,
 111. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$,
 114. $-\frac{1}{25}$,
 117. $-\frac{1}{2} \ln 2$,
 120. π ,
 123. diverguje,
 126. $\frac{\pi}{3}$,
 129. 6,
 132. $\frac{3}{2}$,
 135. diverguje,
109. $\frac{1}{2}$,
 112. $\frac{1}{2}$,
 115. $\frac{1}{8}$,
 118. $1 - \ln 2$,
 121. $\frac{\pi}{6}$,
 124. 2,
 127. π ,
 130. π ,
 133. diverguje,
 136. $\pi + 2$,
110. diverguje,
 113. $\frac{\pi}{2}$,
 116. diverguje,
 119. $-\frac{1}{2}$,
 122. $\frac{\pi}{2}$,
 125. $\frac{8}{3}$,
 128. diverguje,
 131. diverguje,
 134. $\frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})$,

137. $\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}$, ak $p < 1$, diverguje, ak $p \geq 1$.

138. konverguje, 139. diverguje, 140. diverguje,
 141. konverguje, 142. diverguje, 143. konverguje,
 144. diverguje, 145. konverguje, 146. diverguje,
 147. konverguje pre $p > 0$ a diverguje pre $p \leq 0$.

2.6 Použitie určitého integrálu

Viacere úlohy z geometrie a fyziky riešime pomocou výpočtu určitých integrálov. Takéto úlohy sa skladajú z dvoch častí. V prvej prevedieme riešenie daného geometrického alebo fyzikálneho problému na riešenie niektorého určitého integrálu. V druhej tento určitý integrál vypočítame. Druhú fázu v riešeniach niektorých príkladov tejto kapitoly prenecháme čitateľovi.

Rôznorodé použitie určitého integrálu prebieha podľa nasledujúceho všeobecného princípu.

Predpokladajme, že hodnoty niektorej veličiny $y = f(x)$ v ľubovoľnom intervale svojho definičného oboru $x \in \langle a, b \rangle$ jednoznačne určujú číselnú hodnotu $z(f, a, b)$ veličiny z (závislú od funkcie f a hraníc intervalu!). Nech táto závislosť spĺňa dve podmienky

- $z(f, a, b) = z(f, a, c) + z(f, c, b)$, ak $c \in (a, b) \subset D(f)$ (aditivita),
- Ak $m < f(x) < M$ pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$, tak $m(b - a) < z(f, a, b) < M(b - a)$ (ohraničenosť).

Potom platí

$$z(f, a, b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Príkladmi takýchto závislostí sú napríklad funkcia $S(f, a, x)$ spomínaná ako $S(x)$ v úvode tejto kapitoly alebo práca vykonaná pôsobením sily po niektorej krivke.

2.7 Použitie určitého integrálu v geometrii

2.7.1 Obsah rovinnej oblasti

Všeobecný princíp pre výpočet obsahu rovinnej oblasti je

Predpokladajme, že každá priamka $x = r$, $r \in \langle a, b \rangle$ má s danou obastou spoločnú úsečku dĺžky $l(r)$. Potom obsah oblasti v intervale $\langle a, b \rangle$ vypočítame integrálom

$$P = \int_a^b l(r) dr. \tag{2.15}$$

Z tohoto princípu vyplývajú nasledujúce vzťahy.

Obsah rovinatej oblasti ohraničenej grafom $f \geq 0$ (priamkami $x = a$, $x = b$) a osou o_x v intervale $\langle a, b \rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$P = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.16)$$

Obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f \geq g$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) v intervale $\langle a, b \rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (2.17)$$

Ak je krivka daná parametrickými rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \quad (2.18)$$

tak obsah oblasti ohraničenej krivkou vypočítame pomocou integrálu

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \right|. \quad (2.19)$$

Poznámka 3. V niektorých prípadoch je oblasť ohraničená len grafom funkcie a osou o_x , v iných prípadoch je potrebné hranicu doplniť časťou priamky $x = a$ a (alebo) $x = b$. Poznamenajme, že posledný vzorec dostaneme substitúciou parametrického vyjadrenia (2.18) premenných x , y do vzorca (2.16).

Tento vzorec platí aj pre krivky, ktoré sú grafmi funkcií (vtedy druhú časť hranice tvorí os o_x) aj pre uzavreté krivky.

Poznámka 4. Pri riešení príkladov na geometrické použitie určitého integrálu je väčšinou dôležité načrtnúť si obrázok situácie. Preto to odporúčame čitateľovi urobiť v každom príklade a cvičení tejto kapitoly.

Príklad 18. Nájdeme obsah oblasti ohraničenej parabolou $x^2 = 4y$ a krivkou $y = \frac{8}{x^2+4}$.

Riešenie: Najskôr nájdeme x -ové súradnice priesečníkov oboch kriviek (hranice intervalu integrácie). Porovnaním y -ových súradníc bodov obidvoch kriviek dostávame rovnicu $\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4}$, ktorá po úprave vedie k rovnici

$$x^4 + 4x^2 - 32 = 0.$$

Túto substitúciou $t = x^2$ prevedieme na kvadratickú a vyriešime. Dostaneme reálne riešenia $x_1 = -2$ a $x_2 = 2$. Zo spojitosti a porovnaním hodnôt obidvoch funkcií dosadením niektorého čísla intervalu integrácie (napr. 0) dostávame, že $\frac{8}{x^2+4} \geq \frac{x^2}{4}$ pre všetky $x \in \langle -2, 2 \rangle$. Preto

$$P = \int_{-2}^2 \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left[4 \arctg \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_{-2}^2 = 2\pi - \frac{4}{3}.$$

♣

Príklad 19. Nájdeme obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y .

Obr. 2.3: $y = 3 - 2x - x^2$ s dotyčnicou

Riešenie: Spomínaná dotyčnica má rovnicu $y = 7 - 6x$ (oddôvodnite!). V intervale integrácie $\langle 0, 2 \rangle$ platí $7 - 6x \geq 3 - 2x - x^2$, preto

$$P = \int_0^2 (7 - 6x - (3 - 2x - x^2)) dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{8}{3}.$$



Niekedy je potrebné pre výpočet interval integrácie rozložiť na dve časti.

Príklad 20. Vypočítame obsah oblasti ohraničenej priamkou $y = x + 1$, grafom funkcie $y = \cos x$ a osou o_x .

Riešenie: Priamka $y = x + 1$ pretína o_x v bode $[-1, 0]$, graf funkcie $y = \cos x$ pretne os o_x v bode $[\frac{\pi}{2}, 0]$. Priamka a graf sa pritom pretínajú v bode $[0, 1]$. To znamená, že oblasť, ktorej obsah počítame je v intervale $\langle -1, 0 \rangle$ zhora ohraničená grafom priamky $y = x + 1$ a v intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ grafom funkcie $y = \cos x$ (načrtnite obrázok!). Preto hľadaný obsah oblasti počítame ako súčet integrálov

$$P = \int_{-1}^0 (x + 1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{3}{2}.$$



Ak v rovniciach kriviek ohraničujúcich oblasti je premenná x funkciou premennej y zameníme ich pozície vo vzťahu (2.17).

Príklad 21. Vypočítame obsah oblasti ohraničenej dvojicou parabol $x = -2y^2$ a $x = 1 - 3y^2$.

Riešenie: V rovnicach obidvoch parabol je súradnica x funkciou súradnice y . Obidve paraboly sa pretínajú v bodoch $[-2, -1]$ a $[-2, 1]$ a ich osi sú rovnobežné s osou o_x . Nezávislá premenná y je ohraničená v intervale $\langle -1, 1 \rangle$. V tomto intervale platí $-2y^2 \leq 1 - 3y^2$, preto

$$P = \int_{-1}^1 (1 - 3y^2 - (-2y^2)) dy = \frac{4}{3}.$$



Príklad 22. Vypočítame obsah oblasti ohraničenej krivkou určenou implicitne rovnicou $(y-x)^2 = x^3$ a priamkou $x = 1$.

Riešenie: Ľavá strana rovnice je nezáporná, preto $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Pre každú hodnotu r z tohoto intervalu existujú práve dva body na danej krivke, ktorých x -ová súradnica má danú hodnotu. Ich y -ové súradnice sú $y_1 = r - r\sqrt{r}$ a $y_2 = r + r\sqrt{r}$. Preto priamka $x = r$ pretína danú oblasť v úsečke dĺžky $2r\sqrt{r}$ a podľa vzťahu (2.15) platí

$$P = \int_0^1 2r\sqrt{r} dr = \frac{4}{5}.$$



Príklad 23. Vypočítame obsah elipsy určenej parametrickými rovnicami $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Riešenie: Použijeme vzťah (2.19) pre $\varphi(t) = a \cos t$ a $\psi(t) = b \sin t$.

$$P = \int_0^{2\pi} b |\sin t| - a |\cos t| dt = \pi a b.$$



Príklad 24. Vypočítame obsah oblasti ohraničenej asteroidou určenou rovnicou $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{a})^{\frac{2}{3}} = 1$.

Riešenie: Uzavretú krivku ohraničujúcu oblasť najskôr vhodne parametrizujeme $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (overtel!). Pretože obidve funkcie v parametrizácii majú periodu 2π , body zodpovedajúce hodnotám parametra $t = r$ a $t = r + 2\pi$ sú zhodné. Preto oblasť integrácie je interval $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$P = \int_0^{2\pi} a \sin^3 t |3a \cos^2 t (-\sin t)| dt = 3a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

Pre výpočet posledného integrálu pozri Príklad 10. ♣

Cvičenia

Vypočítajte obsahy rovinných oblastí ohraničených uvedenými krivkami. **148.** Parabolou $y = 4x - x^2$ a osou o_x . **149.** Parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $x + y = 3$. **150.** Parabolou $y = x^2 - 2$ a priamkou $y = 2$. **151.** Osou o_y a krivkou $x = y^2 - y^3$. **152.** Krivkami $y = x^2$ a $y = x^3$. **153.** Krivkou $y = \cos x$ a priamkou $y = -\pi$ pre $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$. **154.** Krivkou $y = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ a priamkou $y = x$. **155.** Krivkami $y = \sin x$ a $y = \cos x$ pre $x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle$. **156.** Krivkami $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, priamkou $x = 2$ a osou o_y . **157.** Hyperbolou $xy = a$, priamkami $x = a$, $x = b$, $b > a$ a osou o_x . **158.** Krivkou $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$,

osou o_x a priamkami $x = -1$, $x = 1$ (nevlastný integrál). **159.** Krivkou $y = \ln x$ a osami o_x , o_y (nevlastný integrál). **160.** Krivkou $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, priamkou $x = 4$ a osou o_y (nevlastný integrál). **161.** Krivkou $y = \frac{1}{1+x^2}$ a osou o_x (nevlastný integrál). **162.** Parabolami $y = 4x^2$, $y = \frac{x^2}{9}$ a priamkou $y = 2$. **163.** Krivkami $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$. **164.** Parabolou $y = x^2 - 2x + 2$, jej dotyčnicou v bode $T = [3, 5]$ a osou o_y . **165.** Krivkou $y^2 = x(x-1)^2$. **166.** Krivkou $y = e^{-x} \sin x$ a osou o_x v intervale $\langle 0, \pi \rangle$. **167.** Krivkou určenou parametricky $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a osou o_x . **168.** Krivkou určenou parametricky $x = 12 \cos t + 5 \sin t$, $y = 5 \cos t - 12 \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. **169.** Krivkou určenou parametricky $x = a \sin t$, $y = b \sin 2t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. **170.** Krivkou určenou parametricky $x = 3 \cos^3 t$, $y = -6 \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. **171.** Krivkou určenou parametricky $x = a \cos t$, $y = b \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. **172.** Krivkou určenou parametricky $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$. **173.** Krivkou určenou parametricky $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$. **174.** Nech f je spojitá a kladná funkcia v intervale $\langle 0, 1 \rangle$ a nech plocha medzi grafom funkcie f a osou o_x v intervale $\langle 0, x \rangle$ je $\sin x$. Nájdite vyjadrenie funkcie f . **175.** Nech f je spojitá a kladná funkcia v intervale $\langle 0, \infty \rangle$ a nech plocha medzi grafom funkcie f a osou o_x v intervale $\langle 0, x \rangle$ je $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sin x + \frac{\pi}{2} \cos x$. Nájdite $f(\frac{\pi}{2})$.

Výsledky

- | | | | |
|---|-----------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| 148. $\frac{32}{3}$, | 149. $\frac{9}{2}$, | 150. $\frac{32}{3}$, | 151. $\frac{1}{12}$, |
| 152. $\frac{1}{12}$, | 153. $2\pi^2$, | 154. $\frac{4}{\pi} - 1$, | 155. $2\sqrt{2}$, |
| 156. $\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$, | 157. $a \ln \frac{b}{a}$, | 158. 6, | 159. 1, |
| 160. 4, | 161. π , | 162. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$, | 163. $3 - e$, |
| 164. 9, | 165. $\frac{8}{15}$, | 166. $\frac{1+e^{-\pi}}{2}$, | 167. $3\pi a^2$, |
| 168. 169π , | 169. $\frac{4}{3}ab$, | 170. $\frac{27\pi}{4}$, | 171. $\frac{3}{4}\pi ab$, |
| 172. $\frac{8}{15}$, | 173. $\frac{8}{15}$, | 174. $f(x) = \sin x$, | 175. $\frac{1}{2}$. |

2.7.2 Objem telies

Všeobecný princíp pre výpočet objemu telesa pomocou integrálu je

Predpokladajme, že každá rovina $x = r$, $r \in \langle a, b \rangle$ má s daným telesom spoločnú oblasť s obsahom $s(r)$. Potom objem telesa v intervale $\langle a, b \rangle$ vypočítame integrálom

$$S = \int_a^b s(r) dr. \quad (2.20)$$

Z tohoto princípu dostávame:

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinatej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f \geq 0$, (priamkami $x = a$, $x = b$) a osou o_x v intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2.21)$$

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinatej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f \geq g \geq 0$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) v intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx. \quad (2.22)$$

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej uzavretou krivkou určenou parametrickými rovnicami 2.18, kde $\psi(t) \geq 0$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt \right|. \quad (2.23)$$

Poznamenaľme, že na platnosť vzťahu je potrebná existencia derivácie funkcie φ v intervale integrácie a odvodíme ho dosadením rovníc 2.18 do vzťahu 2.21.

Príklad 25. Vypočítame objem elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Riešenie: Použijeme všeobecný princíp výpočtu objemu. Pre $r \in \langle -a, a \rangle$ rovina $x = r$ pretne elipsoid v elipse s rovnicou $\frac{y^2}{b^2(1-\frac{r^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1-\frac{r^2}{a^2})} = 1$. Aplikáciou Príkladu 23 dostávame, že obsah tejto elipsy je

$$S(r) = \pi b \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} c \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} = \pi bc \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Preto

$$V = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr = \pi bc \left[r - \frac{r^3}{3a^2} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a bc.$$



Príklad 26. Overíme vzorec pre výpočet objemu kužeľa s polomerom podstavy r a výškou v .

Riešenie: Kužeľ umiestnime vrcholom do začiatku súradnicovej sústavy tak, že jeho os splyva s osou o_x . Takto umiestnený kužeľ je vytvorený rotáciou priamky $y = \frac{r}{v}x$ okolo osi o_x v intervale $\langle 0, v \rangle$. Použijeme vzťah (2.21).

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx = \pi \left(\frac{r}{v}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3} \pi r^2 v.$$

Odporúčame čitateľovi vyriešiť tento príklad pomocou všeobecného princípu pre výpočet objemov. ♣

Príklad 27. Vypočítame objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkou $y^2 = (x-1)^3$ a priamkou $x = 2$ okolo osi o_x .

Riešenie: Ľavá strana rovnice definujúcej krivku je nezáporná. Z toho vyplýva, že $x \geq 1$ a preto interval integrácie bude $\langle 1, 2 \rangle$. Navyac, krivka je symetrická podľa osi o_x , skladá sa totiž z grafov dvoch funkcií $y = (x-1)^{\frac{3}{2}}$ a $y = -(x-1)^{\frac{3}{2}}$. Preto

$$V = \pi \int_1^2 (x-1)^3 dx = \frac{1}{4} \pi.$$



Príklad 28. Vypočítame objem telesa, ktoré vznikne rotáciou jedného oblúka cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ okolo osi o_x .

Riešenie: Použijeme vzťah (2.23).

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt = \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 5\pi^2 a^3.$$



Cvičenia

Vypočítajte objemy telies určených rotáciou rovinných oblastí ohraničených danými krivkami okolo osi o_x . **176.** Parabolou $y = x^2$ a priamkou $y = 4$. **177.** Parabolou $y = 3x - x^2$ a priamkou $y = x$. **178.** Parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $y = x + 3$. **179.** Krivkami $y = \sqrt{x}$ a $y = \frac{x^2}{8}$. **180.** Krivkou $y = \sin x$ a osou o_x v intervale $\langle 0, \pi \rangle$. **181.** Krivkami $y = \sin x$, $y = \cos x$ a osou o_y v intervale $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$. **182.** Krivkami $y = x^2$ a $x = y^2$. **183.** Krivkami $y = \frac{x^2}{2}$ a $y = \frac{x^3}{8}$. **184.** Krivkou $y = e^x \sqrt{x}$ a priamkami $x = 1$ a $y = 0$. **185.** Hyperbolou $xy = a$, osou o_x a priamkami $x = b$, $x = c$, $0 < b < c$. **186.** Kružnicou $x^2 + y^2 = 1$ a parabolou $y^2 = \frac{3}{2}x$. **187.** Časťou hyperboly $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$ a priamkou $x = a + 1$, $a > 0$. **188.** Krivkou $y = \sin x$ a priamkou $y = \frac{2}{\pi}x$. **189.** Krivkou $y = e^{-x}$ a osami o_x a o_y , $x > 0$ (nevlastný integrál). **190.** Krivkou $y = \ln x$ a osami o_x a o_y (nevlastný integrál). **191.** Uzavretou krivkou s parametrickými rovnicami $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. **192.** Uzavretou krivkou s parametrickými rovnicami $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$, $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$. **193.** Uzavretou krivkou s parametrickými rovnicami $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $c^2 = a^2 - b^2$. **194.** Guľa s polomerom r je preťatá rovinou vzdialenou $d < r$ od jej stredu. Vypočítajte objem menšej časti. **195.** Nájdite vzorec pre objem pravidelného ihlana s obsahom podstavy P a výškou h .

Výsledky

- | | | |
|--|-----------------------------------|--|
| 176. $\frac{256\pi}{5}$, | 177. $\frac{56\pi}{15}$, | 178. $\frac{117\pi}{5}$, |
| 179. $\frac{24\pi}{5}$, | 180. $\frac{\pi^2}{2}$, | 181. $\frac{\pi}{2}$, |
| 182. $\frac{3\pi}{10}$, | 183. $\frac{512\pi}{35}$, | 184. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$, |
| 185. $\frac{\pi a^2}{bc}(c - b)$, | 186. $\frac{19}{48}\pi$, | 187. $\frac{\pi}{3}(a^3 + 3a^2)$, |
| 188. $\frac{\pi^2}{6}$, | 189. $\frac{\pi}{2}$, | 190. π , |
| 191. $\frac{32}{105}\pi a^2$. | 192. $\frac{3\pi}{4}$, | 193. $\frac{32\pi c^6}{105a b^2}$, |
| 194. $V = \pi(\frac{2}{3}r^3 - dr^2 + \frac{d^2}{3})$, | | |
| 195. $V = \frac{1}{3}hS$. | | |

2.7.3 Dĺžka krivky

Dĺžku rovinatej krivky, ktorá je grafom funkcie f , ktorá má spojitú deriváciu v intervale $\langle a, b \rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$D = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2.24)$$

Dĺžku rovinatej krivky, ktorá je určená parametrickými rovnicami 2.18, ak derivácie $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ sú spojité v intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (2.25)$$

Príklad 29. Vypočítame dĺžku krivky $y = 2x - x^2$ v intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Riešenie: Použijeme vzťah (2.24) a pri výpočte primitívnej funkcie použijeme výsledok Príkladu (21) z časti Neurčitý integrál.

$$\begin{aligned} D &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2 - 2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{4x^2 - 8x + 5} dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} x(x-1) \sqrt{4x^2 - 8x + 5} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{4x^2 - 8x + 5} + 2x - 2) \right]_0^1 = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} - 2). \end{aligned}$$

♣

Príklad 30. Vypočítame dĺžku polokubickej paraboly $y^2 = x^3$ v intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Obr. 2.4: $y^2 = x^3$

Riešenie: Krivka sa skladá z dvoch častí $y = x^{\frac{3}{2}}$ a $y = -x^{\frac{3}{2}}$ symetrických podľa osi o_x . Preto jej dĺžka bude dvojnásobkom dĺžky jednej z nich. Použijeme vzťah (2.24), pričom $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ a $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$$D = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{9}{4} \frac{2}{3} \left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{16}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1 \right).$$

♣

Príklad 31. Vypočítame dĺžku jedného oblúka cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Riešenie: Použijeme vzťah (2.25) a trigonometrickú identitu $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$.

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = a \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$



Príklad 32. Vypočítame dĺžku jednej časti asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Riešenie:

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{3}{2}a.$$

Cvičenia

Vypočítajte dĺžky daných kriviek.

196. $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$, **197.** $y = \frac{x^2}{4}$, $x \in \langle 0, 2\sqrt{2} \rangle$, **198.** $y = \ln(\sin x)$, $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$, **199.** $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, **200.** $y = (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x)$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$, **201.** $y = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$, $x \in \langle a, b \rangle$, **202.** $y = \cosh x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, **203.** $y = \ln x$, $x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$, **204.** $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, **205.** $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, **206.** $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$, $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$, **207.** $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$, $t \in \langle 0, 3 \rangle$, **208.** $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, **209.** $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, **210.** $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, **211.** $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \in \langle 0, \ln \pi \rangle$, **212.** $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, **213.** $y = 2\sqrt{x}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

Výsledky

196. 12,	197. $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{6}$,	198. $\frac{1}{2} \ln 3$,
199. $\frac{2}{3}(\sqrt[4]{8} - 1)$,	200. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$,	201. $\ln\left(\frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}\right)$,
202. $\sinh 1 \approx 1,17$,	203. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$,	204. $4 - 2\sqrt{2}$,
205. 4,	206. $2\sqrt{3}$,	207. 12,
208. $6a$,	209. $\frac{\pi^2}{8}$,	210. $\sqrt{2}$,
211. $\sqrt{2}(\pi - 1)$,	212. 5π ,	
213. $\sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}$.		

2.7.4 Obsah povrchu rotačnej plochy

Obsah povrchu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie f v intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2.26)$$

Osah povrchu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou uzavretej krivky určenej parametrickými rovnicami 2.18 okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (2.27)$$

Poznamenajme, že na platnosť vzťahu je potrebná existencia derivácie funkcií φ a ψ v intervale integrácie.

Príklad 33. Vypočítame obsah povrchu plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky $y = \sin 2x$ v intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ okolo osi o_x .

Riešenie: Použijeme vzťah (2.26) a substitúciu $t = 2 \cos 2x$.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + 4 \cos^2 2x} dx = \\ &= 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1 + t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1 + t^2} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \right]_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} (2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)). \end{aligned}$$

Pri výpočte primitívnej funkcie v poslednom integrále sme použili výsledok Príkladu (23) z časti Neurčitý integrál. ♣

Príklad 34. Vypočítame obsah povrchu plochy, ktorá vznikne rotáciou asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Riešenie: Podrobnosti výpočtu sú podobné ako v Príklade 32.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t (3a \cos t \sin t) dt = \frac{6}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

♣

Príklad 35. Overíme vzorec pre výpočet povrchu gule s polomerom r .

Riešenie: Stred gule umiestnime do začiatku súradnicovej sústavy. Guľa tak vznikne rotáciou oblasti ohraničenej polkružnicou určenou parametrickými rovnicami $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou o_x okolo osi o_x . Použijeme vzťah (2.27).

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} r \sin t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 4\pi r^2.$$

♣

Cvičenia

Vypočítajte obsahy povrchov rotačných plôch, ktoré vzniknú rotáciou danej krivky okolo osi o_x . **214.** $y = kx$, $x \in \langle a, b \rangle$, $0 < a < b$, $k > 0$, **215.** $y = x^3$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, **216.** $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, **217.** $y = e^{-x}$, $x \in \langle 0, \infty \rangle$, **218.** $y = 2 \cosh(\frac{x}{2})$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, **219.** $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in \langle 0, \frac{3}{4} \rangle$, **220.** $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, **221.** $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, **222.** $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, **223.** $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, **224.** $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$, $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$, **225.** $x = a \sin 2t$, $y = 2a \sin^2 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

Výsledky

$$\begin{array}{lll} \mathbf{214.} & \pi k \sqrt{k^2 + 1}(b^2 - a^2), & \mathbf{215.} & \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1), & \mathbf{216.} & \frac{13\pi}{3}, \\ \mathbf{217.} & \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})), & \mathbf{218.} & \pi(e^2 - e^{-2} + 4), & \mathbf{219.} & \pi\left(\frac{255}{1024} - \frac{\ln 2}{8}\right), \\ \mathbf{220.} & 4\pi^2, & \mathbf{221.} & \frac{12\pi a^2}{5}, & \mathbf{222.} & \pi\sqrt{2}, \\ \mathbf{223.} & \frac{64\pi}{3}, & \mathbf{224.} & 3\pi, & \mathbf{225.} & 4\pi^2 a^2. \end{array}$$

2.7.5 Výpočet súradníc ťažiska

Ťažisko plošnej hmotnej oblasti s plošnou hustotou $\varrho(x)$ ohraničenej grafmi funkcií f a g v intervale $\langle a, b \rangle$ má súradnice

$$T_x = \frac{M_y}{M}, \quad T_y = \frac{M_x}{M},$$

kde

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \varrho(x)(f^2(x) - g^2(x)) dx,$$

$$M_y = \int_a^b \varrho(x)x(f(x) - g(x)) dx,$$

$$M = \int_a^b \varrho(x)(f(x) - g(x)) dx.$$

Ťažisko hmotného oblúka s dĺžkovou hustotou $\mu(t)$ určeného parametrickými rovnicami (2.18) má súradnice

$$T_x = \frac{M_y}{M}, \quad T_y = \frac{M_x}{M},$$

kde

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(t)\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(t)\varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Poznámka 5. Veličiny M_x resp. M_y voláme **statický moment** vzhľadom k osi o_x resp. o_y .

Poznámka 6. Poznamenajme, že v prípade homogénnej oblasti alebo oblúka (t.j. funkcia hustoty je konštantná) je pri výpočte ťažiska informácia o hustote zbytočná a môžeme integrály v čitateli aj menovateli počítat bez funkcie hustoty pomocou veličín $M'_x = \frac{M_x}{\rho}$, $M'_y = \frac{M_y}{\rho}$, $M' = \frac{M}{\rho}$. Uvedomme si, že veličina M' predstavuje obsah oblasti, resp. dĺžku oblúka.

Príklad 36. Nájdeme súradnice ťažiska hmotnej rovinatej oblasti ohraničenej parabolou $y = 9 - x^2$ a osou o_x

a) ak je oblasť homogénna b) ak jej plošná hustota je $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Riešenie: V oboch prípadoch stačí počítat súradnicu y ťažiska, v prípade a) vďaka symetrii oblasti podľa osi o_y a homogenite, v prípade b) vďaka spomínanej symetrii paraboly a tiež symetrii funkcie hustoty podľa tej istej osi. V oboch prípadoch bude x -ová súradnica ťažiska $T_x = 0$. Skúste ešte pred výpočtom odhadnúť, v ktorom prípade bude ťažisko vyššie! a) Potrebujeme vypočítat M_x a M , z homogenity vyplýva, že $\rho(x) = c$, preto použijeme hodnoty M'_x a M' .

$$M'_x = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (9 - x^2)^2 dx = \frac{648}{5}.$$

$$M' = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 36.$$

Preto

$$T = \left[0, \frac{M'_x}{M'}\right] = \left[0, \frac{18}{5}\right] = [0, 3,6].$$

b) Pri výpočte využijeme párnosť integrovanej funkcie (premýšlite si kde a ako) a techniku integrovania racionálnej funkcie.

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \frac{1}{1+x^2} (9-x^2)^2 dx = \int_0^3 \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{1+x^2} dx = 100 \operatorname{arctg} 3 - 48.$$

$$M = \int_{-3}^3 \frac{1}{1+x^2} (9-x^2) dx = 2 \int_0^3 \frac{9-x^2}{1+x^2} dx = 20 \operatorname{arctg} 3 - 6.$$

Preto

$$T = \left[0, \frac{100 \operatorname{arctg} 3 - 48}{20 \operatorname{arctg} 3 - 6}\right] \approx [0, 4,05].$$



Príklad 37. Vypočítame súradnice ťažiska homogénneho štvrtkruhu so stredom v začiatku súradnicovej sústavy a polomerom r , ležiaceho v prvom kvadrante.

Riešenie: Vďaka homogenite a symetrii podľa priamky $y = x$, leží ťažisko na tejto priamke. Preto nám stačí vypočítat jednu zo súradníc, v tomto prípade je o niečo jednoduchšie počítat súradnicu y (skúste vypočítat súradnicu x). Daný štvrtkruh je grafom funkcie $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle 0, r \rangle$.

$$M'_x = \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{1}{3} r^3.$$

Druhá veličina, ktorú máme vypočítať je $M' = \frac{M}{\rho}$, čo je vlastne obsah štvŕkruhu a preto $M' = \frac{\pi}{4}r^2$ (skúste overiť výpočtom príslušného integrálu). Preto

$$T = \left[\frac{M'_x}{M'}, \frac{M'_y}{M'} \right] = \left[\frac{4}{3\pi}r, \frac{4}{3\pi}r \right].$$



Príklad 38. Nájdeme súradnice ťažiska homogénnej polkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$.

Riešenie: Polkružnicu parametrizujeme $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Vzhľadom k symetrii je x -ová súradnica ťažiska 0.

$$M'_y = \int_0^\pi r \sin t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = r^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2r^2.$$

$$M' = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \pi r.$$

Preto

$$T = \left[0, \frac{2r^2}{\pi r} \right] = \left[0, \frac{2r}{\pi} \right].$$



Príklad 39. Nájdeme ťažisko homogénneho oblúka cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Riešenie: Oblúk je súmerný podľa priamky $x = \pi a$, preto ťažisko leží na tejto priamke (overte!). Dĺžka oblúka je $8a$ (pozri Príklad 31) Stačí teda počítať

$$\begin{aligned} T_y &= \frac{M'_x}{8a} = \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \frac{a}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\ &= \frac{a}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) 2 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{4}{3}a. \end{aligned}$$

Preto $T = \left[\pi a, \frac{4}{3}a \right]$. ♣

2.7.6 Guldinove vety

Guldinova prvá veta.

Majme v rovine danú priamku o a krivku C ležiacu celú v jednej polrovine určenej priamkou o . Obsah povrchu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky C okolo osi o sa rovná súčinu dĺžky krivky a dĺžky kružnice, ktorú pri tejto rotácii opíše ťažisko krivky.

Guldinova druhá veta.

Majme v rovine danú priamku o a oblasť D ležiacu celú v jednej polrovine určenej priamkou o . Objem

rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti D okolo osi o sa rovná súčinu obsahu oblasti a dĺžky kružnice, ktorú pri tejto rotácii opíše ťažisko oblasti.

Poznamenajme, že obidve vety platia len pre **homogénne útvary**. Obidve vety vyjadrujú vzťah medzi tromi veličinami, z ktorého je možné z hodnôt dvoch z nich vypočítať tretiu.

Príklad 40. Nájdeme súradnice ťažiska

a) homogénnej polkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$, b) homogénneho polkruhu $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$.

Riešenie: a) Poznamenajme, že túto úlohu sme riešili v predchádzajúcej časti priamo. Z dôvodov symetrie je x -ová súradnica ťažiska rovná 0. Rotáciou okolo osi o_x vytvorí polkružnica guľovú plochu so známym povrchom $S = 4\pi r^2$. Podľa prvej Guldinovej vety sa táto hodnota rovná súčinu dĺžky polkružnice πr a dĺžky kružnice, ktorú vytvorí pri rotácii ťažisko $2\pi T_y$. Preto

$$4\pi r^2 = (\pi r)(2\pi T_y),$$

odkiaľ $T_y = \frac{2r}{\pi}$.

b) Z dôvodov symetrie je x -ová súradnica ťažiska 0. Podľa druhej Guldinovej vety je objem gule vytvorenej rotáciou polkruhu rovný obsahu polkruhu a dĺžky kružnice opísanej pri rotácii ťažiskom

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{\pi}{2}r^2\right)(2\pi T_y).$$

Preto $T = [0, \frac{4}{3\pi}r]$. ♣

Príklad 41. Vypočítame povrch a objem anuloidu vytvoreného rotáciou kružnice (kruhu) so stredom $S = [0, a]$ s polomerom $r < a$.

Riešenie: Použijeme Guldinove vety. Keďže ťažiskom homogénnej kružnice (aj kruhu) je jej stred, pre povrch anuloidu platí

$$S = (2\pi r)(2\pi a) = 4\pi^2 a r$$

a pre jeho objem

$$V = (\pi r^2)(2\pi a) = 2\pi^2 a r^2.$$

♣

Príklad 42. Nájdeme súradnice ťažiska časti asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Riešenie: Krivka je súmerná podľa priamky $y = x$, preto sa obidve súradnice ťažiska rovnajú. Na výpočet súradnice T_y použijeme prvú Guldinovu vetu (prečo nie druhú?) a využijeme výsledok Príkladu 32 $S = \frac{6}{5}\pi a^2$ a výsledok Príkladu 34 $D = \frac{3}{2}a$. Preto

$$S = D(2\pi T_y), \quad \frac{6}{5}\pi a^2 = \frac{3}{2}a (2\pi T_y),$$

odkiaľ $T = [\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a]$. ♣

Kvôli oceneniu užitočnosti Guldinových viet odporúčame čitateľovi vyriešiť nasledujúci príklad aj bez použitia týchto viet.

Príklad 43. Vypočítame objem a obsah povrchu rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou štvorca so stredom v bode $C = [0, c]$ a stranou dĺžky $a < c\sqrt{2}$ (prečo je potrebná táto podmienka?, nezávisia hľadané veličiny aj na polohe strán štvorca?).

Riešenie: Ťažisko je totožné so stredom štvorca. Podľa prvej Guldinovej vety platí

$$S = (4a)(2\pi c) = 8\pi ac.$$

Podľa druhej Guldinovej vety platí

$$V = (a^2)(2\pi c) = 2\pi a^2 c.$$



Cvičenia

Vypočítajte súradnice ťažiska homogénnych rovinných oblastí ohraničených krivkami. **226.** $y = 4 - x^2$, $y = 0$, **227.** $y = x - x^2$, $x + y = 0$, **228.** $x = y - y^3$, $x = 0$, $y \in \langle 0, 1 \rangle$, **229.** $y = 2x^2 - 4x$, $y = 2x - x^2$, **230.** $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = 0$, **231.** $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = 0$. **232.** Vypočítajte súradnice ťažiska nehomogénnej rovinatej oblasti s plošnou hustotou $\rho(x) = cx^2$ ohraničenej krivkou $y = 4 - x^2$ a osou o_x .

Vypočítajte súradnice ťažiska homogénneho hmotného oblúka určeného parametrickými rovnicami. **233.** $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, **234.** $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, **235.** $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$, $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$, **236.** $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, **237.** Nájdite súradnice ťažiska štvrtkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, ktorej lineárna hustota je v každom bode rovná súčinu súradníc bodu.

V nasledujúcich príkladoch použite Guldinove vety. **238.** Vypočítajte súradnice ťažiska oblúka kružnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$. **239.** Vypočítajte objem telesa vytvoreného rotáciou polkruhu s polomerom r okolo dotyčnice rovnobežnej s jeho priemerom. **240.** Vypočítajte objem a povrch telesa, ktoré vznikne rotáciou obdĺžnika so stranami dĺžky 6 a 8 okolo osi prechádzajúcej vrcholom a kolmej na jeho uhlopriečku. **241.** Vypočítajte objem a povrch telesa, ktoré vznikne rotáciou pravidelného n -uholníka so stranou dĺžky a okolo jednej z jeho strán.

Výsledky

- 226.** $T = [0, \frac{8}{5}]$, **227.** $T = [1, -\frac{3}{5}]$, **228.** $T = [\frac{16}{105}, \frac{8}{15}]$,
229. $T = [1, -\frac{2}{5}]$, **230.** $T = [\frac{\pi-2}{2}, \frac{\pi}{8}]$, **231.** $T = [1, \frac{\pi}{8}]$,
232. $T = [0, \frac{8}{7}]$, **233.** $T = [\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}]$, **234.** $T = [\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}]$,
235. $T = [\frac{7}{5}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$, **236.** $T = [2a\frac{\pi^2-6}{\pi^2}, \frac{6a}{\pi}]$, **237.** $T = [\frac{2r}{3}, \frac{2r}{3}]$,
238. $T = [r\frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}, 0]$,
239. $V = \pi r^3 \frac{3\pi-4}{3}$,
240. $V = 480\pi$, $S = 280\pi$,
241. $V = \frac{1}{4}n\pi a^3 \cotg^2 \frac{\pi}{n}$, $S = n\pi a^2 \cotg \frac{\pi}{n}$.

2.8 Použitie určitého integrálu vo fyzike

2.8.1 Práca

Na výpočet práce vykonanej silou $F(x)$ pôsobiacej v intervale $\langle a, b \rangle$ používame vzťah

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Príklad 44. Akú prácu potrebujeme na roztiahnutie pružiny o 4 cm, ak sila potrebná na jej roztiahnutie o 1 cm je 1 N.

Riešenie: Označme x dĺžku, o ktorú je pružina rozťahnutá. Hookov zákon hovorí, že sila potrebná na rozťahovanie pružiny je priamo úmerná dĺžke rozťahnutia pružiny, t.j. $F(x) = kx$. Konštantu k vypočítame z podmienky $F(0,01) = k \cdot 0,01 = 1$ (kvôli súladu fyzikálnych jednotiek meriame dĺžku v metroch), teda $k = 100$. Hľadaná práca je

$$A = \int_0^{0,04} 100x \, dx = 50[x^2]_0^{0,04} = 0,08J.$$



Príklad 45. Nájďme prácu potrebnú na odčerpanie vody z koryta tvaru polvalca dĺžky h a polomerom podstavy r .

Riešenie: Rozložme celý objem vody v koryte na veľmi tenké vodorovné vrstvy hrúbky dx .

Obr. 2.5: Voda v koryte.

Tvar vrstvy, ktorá je v hĺbke x pod hladinou môžeme považovať za kváder s rozmermi h , $2\sqrt{r^2 - x^2}$ (podstava) a dx (výška). Na jej odčerpanie vynaložíme prácu rovnú súčinnu jej objemu, hustoty vody ρ , gravitačného zrýchlenia g a dráhy x

$$A(x) = \rho g h x 2\sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Preto celková práca potrebná na odčerpanie vody je

$$A = \int_0^r 2\rho g h x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 2\rho g h \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{2}{3} \rho g h r^3.$$



2.8.2 Tlaková sila

Pre výpočet celkovej tlakovej sily (tlaku) kvapaliny v konštantnej hĺbke h sa používa Pascalov zákon

$$P = \rho g h S,$$

kde ρ je hustota kvapaliny, $g = 9,81m/s^2$ je gravitačná konštanta a S je veľkosť plochy. Pri meniacej sa hĺbke vypočítame celkový tlak integrálom

$$P = \rho g \int_{h_1}^{h_2} h S(h) \, dh,$$

kde h_1 , h_2 sú hranice hĺbky a $S(h)$ je veľkosť plochy, na ktorú tlak pôsobí v hĺbke h .

Príklad 46. Nájdeme tlak vody na vertikálnu sklenenú stenu tvaru polkruhu umiestnenú priemerom dĺžky 6 m na hladine vody. Hustota vody je $\rho = 1000\text{ kgm}^{-3}$ a gravitačné zrýchlenie $g = 9,81\text{ m/s}^2$.

Riešenie: Celkový tlak na úzky vodorovný pruh steny výšky dh v hĺbke h je rovný veľičine $P(h) = \rho ghS(h)$, kde $S(h) = 2\sqrt{9-h^2}dh$ je obsah pruhu. Potom celkový tlak je limitou súčtu takýchto tlakov $P(h)$ pre $dh \rightarrow 0$, preto

$$\begin{aligned} P &= \int_0^3 \rho gh 2\sqrt{9-h^2} dh = 19620 \int_0^3 h\sqrt{9-h^2} dh = \\ &= -\frac{19620}{3} [(9-h^2)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = 176580\text{ N}. \end{aligned}$$



Cvičenia

242. Akú prácu treba na roztiahnutie pružiny o 6 cm , ak na jej roztiahnutie o 1 cm je potrebná sila $2,5\text{ N}$? **243.** Akú prácu treba na stlačenie pružiny o 5 cm , ak na jej stlačenie o 3 cm je potrebná sila 15 N ? **244.** Nádobu tvaru pologule priemeru 20 m je naplnená vodou. Aká práca je potrebná na jej odčerpanie? **245.** Nádobu tvaru valca priemeru 4 m a výšky 5 m je naplnená vodou. Aká práca je potrebná na jej odčerpanie otvorom na vrchnej časti nádoby, ak

a) je os valca v zvislej polohe,

b) je os valca vo vodorovnej polohe? Skúste si premyslieť, ktorá práca bude väčšia ešte pred počítaním.

246. Vodná nádrž má tvar polovice rotačného elipsoidu, ktorý vznikne rotáciou elipsy s osami 1000 m a 100 m okolo kratšej osi. Nájdite prácu, ktorú je potrebné vykonať na jej naplnenie vodou z jazera, ktoré je 100 m pod dnom nádrže. **247.** Kotol má tvar rotačného paraboloidu s polomerom hornej základne R a výškou h . Kotol je naplnený kvapalinou o hustote ρ . Nájdite prácu potrebnú na odčerpanie kvapaliny z kotla. **248.** Akým tlakom pôsobí voda na zvislý obdĺžnikový uzáver 8 m dlhý a 12 m vysoký, ktorého vrchná hrana je v hĺbke 5 m pod hladinou vody? **249.** Priehrada má tvar rovnoramenného lichobežníka so spodným ramenom dĺžky 50 m , vrchným ramenom dĺžky 200 m a výškou 50 m . Výška vody za priehradou je 30 m . Vypočítajte tlak vody na priehradu. **250.** Nájdite celkový tlak vody na steny a dno akvária tvaru kvádra s hranami dĺžok 1 m , 80 cm (podstava) a 50 cm , ktoré je naplnené vodou na 80% . **251.** Vypočítajte tlak na povrch gule s polomerom 3 m , ktorej stred je 10 m pod hladinou vody. **252.** Nádobu tvaru valca s polomerom základne $1,5\text{ m}$ a výškou $3,5\text{ m}$ je naplnená benzínom hustoty 900 kg/m^3 . Nájdite tlak benzína na vnútorné steny nádoby.

Výsledky

242. $0,45\text{ J}$,

243. $0,613\text{ J}$,

244. $24,525 \cdot 10^6 \pi\text{ J}$,

245. a) $50000\pi\text{ J}$,

b) $40000\pi\text{ J}$,

246. $531,57 \cdot 10^9\text{ J}$,

247. $\frac{\pi \rho g R^2 h^2}{5}$,

248. $10359 \cdot 10^6\text{ N}$,

249. $912330 \cdot 10^6\text{ N}$,

250. $5964,5\text{ N}$,

251. $3,5316 \cdot 10^6 \pi\text{ N}$,

252. $161700\pi\text{ N}$,

2.9 Přibližné integrování funkcí

V mnohých případech nemůžeme najít primitivnu funkci $F(x)$ alebo je táto funkcia veľmi zložitá. Okrem toho v praxi môže byť funkcia $f(x)$ zadaná tabuľkou. Preto majú pre výpočet určitých integrálov veľký význam približné numerické metódy. Akúkoľvek metódu však môžeme použiť len vtedy, ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na danom intervale $\langle a, b \rangle$, kde $a < b$.

Metódy numerického výpočtu hodnoty integrálu $\int_a^b f(x) dx$ sa zakladajú na tom, že sa funkcia $f(x)$ nahradí jednoduchšou, aproximujúcou funkciou $\varphi(x)$ (napr. polynómom) a potom sa približne kladie

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \varphi(x) dx.$$

V jednej z najjednoduchších metód sa krivka $f(x)$ nahradí na intervale $\langle a, b \rangle$ úsečkou priamky prechádzajúcej bodmi $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$, t.j. polynómom 1. stupňa.

Obr. 2.6: Lichobežníkový vzorec.

Plocha útvaru ohraničeného zhora $f(x)$ sa nahradí približne plochou útvaru ohraničeného zhora spomínanou úsečkou. Dostávame vzorec

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)), \quad (2.28)$$

známy pod menom **lichobežníkový vzorec**. Ak položíme

$$h = \frac{b-a}{n}$$

a rozdelíme interval $\langle a, b \rangle$ pomocou ekvidistantných bodov

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad x_n = b$$

na n rovnakých častí, na každej z nich použijeme vzorec (2.28) a výsledky sčítame, dostaneme

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

a po úprave **všeobecný lichobežníkový vzorec**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)). \quad (2.29)$$

Obr. 2.7: Simpsonov vzorec.

Pri inej často používanej metóde približného výpočtu hodnoty integrálu sa funkcia $f(x)$ nahradí polynómom 2. stupňa, ktorého grafom je parabola prechádzajúca tromi bodmi $[a, f(a)]$, $[(a+b)/2, f((a+b)/2)]$, $[b, f(b)]$.

Po integrovaní takého polynómu dostávame vzorec

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3}(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)), \quad (2.30)$$

známy pod menom **Simpsonov vzorec**. Nech $n = 2m$ je párne čí slo. Ak položíme

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

a rozdelíme interval $\langle a, b \rangle$ pomocou ekvidistantných bodov

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, 2, \dots, 2m-1), \quad x_{2m} = b$$

na $n = 2m$ rovnakých častí, na každom z m intervalov $\langle x_{2i}, x_{2i+2} \rangle$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ použijeme vzorec (2.30) a výsledky sčítame, dostaneme po úprave **všeobecný Simpsonov vzorec**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} & (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots \\ & \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ak je funkcia $f(x)$ daná analyticky (nie tabuľkou), treba ešte odhadnúť chybu, s akou sme integrál vypočítali. Nepresnosť

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

lichobežníkového vzorca (2.28) je

$$R = -(b-a)\frac{h^2}{12}f''(x^*),$$

kde $x^* \in \langle a, b \rangle$. Nepresnosť Simpsonovho vzorca (2.30) je

$$R = -(b-a)\frac{h^4}{180}f^{(4)}(x^*),$$

kde $x^* \in \langle a, b \rangle$. Vidíme teda, že výpočet hodnoty určitého integrálu podľa Simpsonovho vzorca je väčšinou presnejší.

Príklad 1. Vypočítajme približnú hodnotu integrálu $\int_2^3 x/(1+x^2)dx$ podľa lichobežníkového vzorca (2.29) s $n = 10$ a podľa Simpsonovho vzorca (2.31) s $n = 2m = 10$.

Riešenie: Budeme potrebovať tieto hodnoty $f(x) = x/(1+x^2)$:

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
$f(x)$	0,4	0,3882	0,3767	0,3657	0,3550	0,3448	0,3351

x	2,7	2,8	2,9	3,0
$f(x)$	0,3257	0,3167	0,3082	0,3

Podľa lichobežníkového vzorca (2.29) dostaneme

$$\int_2^3 \frac{x}{1+x^2} dx \approx \frac{1}{20}(f(2) + 2f(2,1) + 2f(2,2) + \dots + 2f(2,9) + f(3)) = 0,34661.$$

Podľa Simpsonovho vzorca (2.31) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x}{1+x^2} dx \approx \frac{1}{30}(f(2) + 4f(2,1) + 2f(2,2) + \dots \\ \dots + 2f(2,8) + 4f(2,9) + f(3)) = 0,34658. \end{aligned}$$

Presná hodnota integrálu je 0,34657. ♣

Literatúra

- [1] P. E. DANKO, A. G. POPOV, T. JA. KOŽEVNIKOVA,
Vysšaja matematika v upražnenijach i zadačach,
Vysšaja škola, Moskva 1980
- [2] N. A. DAVYDOV, P. P. KOROVKIN, V. N. NIKOĽSKIJ,
Zbornik zadač po matematičeskomu analizu,
GIFML, Moskva 1953
- [3] B. P. DEMIDovič A KOL.,
Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu,
GIFML, Moskva 1963
- [4] J. ELIAŠ, J. HORVÁTH, J. KAJAN,
Zbierka úloh z vyššej matematiky,
*Alfa, vydavat. technickej a ekon. literatúry 6. prepracované
vydanie 1986*
- [5] L. Gillman, R. H. McDowell,
Matematická analýza,
SNTL, Praha 1980
- [6] I. A. Maron,
Differencialnoje i integralnoe isčislenije v primerach i zadačach,
Nauka, Moskva 1970
- [7] G. B. THOMAS, R. L. FINNEY
Calculus and Analytic Geometry
Addison-Wesley Publishing Company 1988

Kapitola 3

Obyčajné diferenciálne rovnice

K štúdiu tejto kapitoly treba mať vedomosti z teórie funkcií jednej reálnej premennej a diferenciálneho počtu funkcie jednej premennej, stačí v rozsahu prvého dielu týchto skrípt. Problematika obyčajných diferenciálnych rovníc bude v tejto kapitole vysvetlená veľmi stručne a zjednodušene, s jednoduchými príkladmi. Náročnejšiemu čitateľovi odporúčame najmä [8] alebo tiež [1], kde získa solídne vedomosti z tejto problematiky.

3.1 Základné pojmy

Diferenciálnymi rovnicami modelujeme mnohé zákony rôznych vedeckých disciplín, počnúc technickými, ekonomickými, prírodovednými až po spoločenské. Za všetky, na úvod tejto kapitoly, uvedieme aspoň jeden model. V ďalšom sa budeme snažiť uviesť ich ešte niekoľko.

Príklad 1. (Newtonov zákon ochladzovania). Umiestnime teleso do prostredia, ktoré je chladnejšie ako teleso. Teleso sa začne ochladzovať rýchlosťou úmernou rozdielu teplôt telesa a prostredia v danom časovom okamihu. Matematicky tento fakt môžeme vyjadriť takto:

Nech $T(t)$ je rozdiel teplôt telesa a prostredia v danom čase t . Potom platí:

$$\frac{dT}{dt} = -kT,$$

kde k je konštanta úmernosti a $\frac{dT}{dt}$ označuje prvú deriváciu funkcie T podľa premennej t . Dostali sme rovnicu, v ktorej sa vyskytuje derivácia funkcie. Takýmito rovnicami sa budeme teraz zaoberať.

Rovnicu, ktorá obsahuje funkciu a prvú alebo aj vyššie derivácie tejto funkcie definované na nejakom intervale I , nazývame *diferenciálnou rovnicou*. Ak je funkcia y v rovnici reálnou funkciou *jednej* reálnej premennej a rovnica obsahuje jej n -tú deriváciu, napr.

$$y + a(x)y' + \dots + b(x)y^{(n)} = f(x), \quad (3.1)$$

nazývame ju *obyčajnou diferenciálnou rovnicou (ODR) n -tého rádu*. Každú funkciu $y = \varphi(x)$ z množiny všetkých n -krát diferencovateľných funkcií na intervale I , pre ktorú platí

$$\varphi(x) + a(x)\varphi(x)' + \dots + b(x)\varphi(x)^{(n)} = f(x),$$

pre každé $x \in I$, nazývame *riešením diferenciálnej rovnice (3.1) na intervale I* .

Graf riešenia $y = \varphi(x)$ diferenciálnej rovnice (3.1) nazývame *integrálnou krivkou* diferenciálnej rovnice (3.1). V obyčajných diferenciálnych rovnicach často používame zápis $y'(x)$ pre prvú deriváciu

funkcie y a analogicky pre vyššie derivácie, ak je jasné, že ide o deriváciu podľa premennej x . V odbornej literatúre sa však často vyskytuje aj zápis $\frac{dy}{dx}$ pre prvú deriváciu funkcie y , ktorý je presnejší, pretože je vždy uvedené o deriváciu podľa akej premennej ide. My budeme používať obidva typy zápisov, aby čitateľovi nerobil problémy ani jeden z nich.

Príklad 2. Za určitých zidealizovaných podmienok sa rast hmotnosti m organizmu dá popísať pomocou ODR

$$\frac{dm}{dt} = km$$

a rýchlosť šírenia choroby v populácii, kde x je pomerné množstvo infikovaných, popíše ODR

$$\frac{dx}{dt} = kx(1-x).$$

V oboch týchto ODR premenná t predstúva čas a konštanta k koeficient úmernosti. Tieto typy ODR sú diferenciálne rovnice *prvého rádu* (najvyššia derivácia v rovnici je prvá).

Príklad 3. Rovnica typu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

popisujúca tok elektrického prúdu v špeciálnom elektrickom okruhu, je *druhého rádu*.

Nech pre riešenie $y = \varphi(x)$, $x \in I$, diferenciálnej rovnice (3.1) v čísle $a \in I$ platí

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}, \quad (3.2)$$

pričom b_0, b_1, \dots, b_{n-1} sú ľubovoľné čísla. Potom podmienky (3.2) nazývame *Cauchyovskými začiatočnými podmienkami*.

Príklad 4. Kameň s hmotnosťou m padá z výšky h so začiatočnou rýchlosťou v_0 zvisle nadol. Odpor vzduchu je priamo úmerný štvorcu rýchlosti padajúceho telesa. Nájdite diferenciálnu rovnicu pohybu padajúceho telesa a začiatočné podmienky.

Riešenie: Kameň padá po priamke k zemi. Na priamke zvolíme súradnicový systém tak, že jeho počiatok bude na zemi a kladná časť osi o_x je nad zemským povrchom. Nech $x = f(t)$ je poloha kameňa v čase t . Potom v čase t je rýchlosť \mathbf{v} daná vzťahom $\mathbf{v} = x'\mathbf{i} = f'(t)\mathbf{i}$, kde \mathbf{i} je jednotkový vektor v kladnom smere osi o_x . Jeho zrýchlenie je $\mathbf{a} = x''\mathbf{i} = f''(t)\mathbf{i}$. Na padajúci kameň pôsobí v každom čase t tiaž a odpor vzduchu, pričom $t < T$, kde T je doba padania kameňa. Podľa Newtonovho zákon platí :

$$mx''\mathbf{i} = (-mg + k(x')^2)\mathbf{i},$$

kde g je tiažové zrýchlenie a k je koeficient odporu prostredia. Z tohoto vzťahu dostávame diferenciálnu rovnicu

$$x'' - \frac{k}{m}(x')^2 + g = 0.$$

Začiatočné podmienky sú určené výškou, odkiaľ kameň padá a začiatočnou rýchlosťou:

$$x(0) = h, x'(0) = v(0) = v_0.$$



Príklad 5. Dokonale votknutý nosník s dĺžkou l , má konštantný moment zotrvačnosti prierezu J a modul pružnosti E s rovnomerným zatažením p . Rovnica pre ohybovú čiaru $w(x)$ je nasledovná diferenciálna rovnica 4. rádu

$$EJy^{IV}(x) = p(x),$$

Vzťahy medzi ohybovými momentami $M(x)$, a posúvajúcimi silami $T(x)$ sa dajú vyjadriť v tvare

$$M(x) = -EJw''(x), \quad T(x) = -EJw'''(x).$$

Fakt, že nosník je na oboch stranách dokonale votknutý, vyjadríme okrajovými podmienkami:

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0.$$

Všimnite si, že tento príklad je trochu iný, ako predchádzajúce napríklad tým, že k diferenciálnej rovnici (v tomto prípade 4. rádu) sme nepridali začiatočné podmienky, ale tzv. *okrajové podmienky*. Takýmto úlohám hovoríme *okrajové úlohy*. Týmto sa ale v tejto kapitole nebudeme zaoberať.

Príklad 6. Máme diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{dy}{dx} = x^2.$$

Jej integrovaním hneď dostávame

$$y = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Toto riešenie vyššie uvedenej diferenciálnej rovnice pre ľubovoľnú konštantu c , nazývame *všeobecné riešenie* ODR. Pre konkrétnu hodnotu c dostávame *partikulárne riešenie* ODR. Napríklad:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 2, \quad \text{alebo} \quad y = \frac{1}{3}x^3 - 4.$$

Príklad 7. Nech $x^2 + y^2 = a^2$, reprezentuje množinu všeobecných riešení diferenciálnej rovnice, ktorá nezávisí na a . Pre rôzne hodnoty a rovnica $x^2 + y^2 = a^2$ predstavuje množinu kružníc so stredom v počiatku súradnicovej sústavy s polomerom a . Zderivovaním tejto rovnice (a je konštanta a y je funkcia premennej x) dostávame

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0,$$

a teda

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{alebo} \quad \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = -1.$$

Táto diferenciálna rovnica vyjadruje fakt, že dotyčnica ku každej kružnici v ľubovoľnom bode je kolmá na jej polomer.

Cvičenia

1. Overte, že nasledujúce ODR majú uvedené riešenia (A, B sú ľubovoľné konštanty):

- $\frac{dx}{dt} = 3x, \quad x = Ae^{3t}$
- $x \frac{dy}{dx} = 2y, \quad y = Ax^2$
- $y \frac{dy}{dx} = x, \quad x^2 - y^2 = A$
- $\frac{dx}{dt} = x(1-x), \quad x = \frac{1}{1+Ae^{-t}}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad x = Ae^{-t} + Be^{-2t}$

2. Zistite, ktoré z daných funkcií sú riešením ODR $yy''' - y'y'' = 0$, ak:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} y = e^{-x} & \text{b)} y = \cos x \\ \text{c)} y = \ln x & \text{d)} y = 2x + 5 \\ \text{e)} y = x + \cos x & \text{f)} y = \sin(2x) + \cos(2x). \end{array}$$

3. V nasledujúcich úlohách nájdite diferenciálne rovnice, ktorých riešeniami sú nasledujúce funkcie (a, b, c sú ľubovoľné konštanty):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} xy = c, & \text{b)} y = x - \frac{c}{x}, x \neq 0 \\ \text{c)} y = ax + b & \text{d)} y = be^x. \end{array}$$

4. Nájdite diferenciálnu rovnicu pre pohyb telesa s hmotnosťou m , ktoré sa priamočiario pohybuje v prostredí, ktorého odpor proti pohybu telesa je priamo úmerný druhej mocnine rýchlosti telesa a na teleso nepôsobia iné sily.

5. Dotyčnica ku krivke v ľubovoľnom bode P , pretína os x -ovú v bode A a os y -ovú v bode B , pričom platí: $2AP=PB$. Krivka prechádza bodom $(1, 1)$. Nájdite uvedenú krivku.

6. Nádrž tvaru kvádra umiestnená vo vodorovnej polohe je naplnená vodou do výšky h v čase $t = 0$. Voda vyteká z nádrže malým otvorom na dne nádrže rýchlosťou úmernou druhej odmocnine výšky hladiny vody. Nájdite čas, ktorý uplynie, kým sa nádrž vyprázdni.

3.2 Diferenciálna rovnica prvého rádu

ODR 1. rádu je rovnica, v ktorej sa vyskytuje najviac prvá derivácia neznámej funkcie, napríklad:

$$xy + x^2y' = \cos x.$$

Budeme skúmať ODR, ktorú možno vyjadriť v tvare

$$y' = f(x, y). \quad (3.3)$$

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathcal{R}^2$. Hovoríme, že funkcia $f(x, y)$ spĺňa na oblasti Ω Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y s konštantou L , ak pre každé dva body $(x, y), (x, \bar{y})$ z Ω platí:

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|.$$

Takúto vlastnosť majú napríklad funkcie $f(x, y)$, ktoré majú na oblasti Ω ohraničenú parciálnu deriváciu podľa y (pojem parciálna derivácia – viď kapitola o funkcii viac premenných týchto skrípt).

Veta 3.1 *Nech je funkcia $f(x, y)$ definovaná na oblasti*

$\Omega = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, (kde a, b sú kladné reálne čísla) *s vlastnosťami na celej Ω :*

- je spojitá,
- je ohraničená konštantou K ,
- spĺňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom na y .

Potom diferenciálna rovnica (3.3) má práve jedno riešenie $y = \varphi(x)$, ktoré prechádza bodom $A = (x_0, y_0)$, to jest $y_0 = \varphi(x_0)$ a to na intervale $(x_0 - c, x_0 + c)$, kde $c = \min\{a, \frac{b}{K}\}$.

Poznámka. Riešenie $y = \varphi(x)$ dostaneme ako limitu postupnosti funkcií $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Funkciu $y_n(x)$ nazývame *Picardovou aproximáciou*.

Príklad 8. Daná je ODR $y' = x + y$ a začiatočná podmienka $y(0) = 0$. Vypočítajte približne $y(x)$ pomocou Picardových aproximácií.

Riešenie: Z formule pre výpočet Picardových aproximácií postupne dostávame

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 0 + \int_0^x (t + 0) dt = \frac{x^2}{2}, \\ y_2(x) &= 0 + \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}, \\ y_3(x) &= 0 + \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}. \end{aligned}$$

n -tá Picardova aproximácia je tvaru:

$$y_n = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Z Taylorovho rozvoja funkcie e^x (viď 1. diel skrípt, str. 166) vidíme, že limita postupnosti Picardových aproximácií je

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e^x - 1 - x.$$



Ak je funkcia $f(x, y)$ definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathcal{R}$, kde sme zvolili pravouhlý súradnicový systém, tak diferenciálnou rovnicou $y' = f(x, y)$ je ku každému bodu $(x, y) \in \Omega$ priradená smernica y' dotyčnice integrálnej krivky v bode (x, y) . Oblasť Ω , ktorej každému bodu je uvedeným spôsobom priradená smernica, budeme nazývať *smerným poľom* diferenciálnej rovnice $y' = f(x, y)$.

Množinu všetkých bodov oblasti Ω , ktorým je priradený ten istý smer, budeme nazývať *izoklínu* a rovnicu $f(x, y) = c$, kde c je dané číslo, budeme nazývať *rovniceou izoklíny*.

Príklad 9. Znázorníme smerové pole diferenciálnej rovnice $y' = x + y$.

Riešenie:

Funkcia $f(x, y) = x + y$ je definovaná v každom bode \mathcal{R}^{∞} , teda smerové pole možno zostrojiť v celom tomto priestore. Smerové pole znázorníme pomocou izoklín. Rovnica izoklíny je $x + y = c$, kde c je ľubovoľné číslo. V každom bode (x_0, y_0) tejto izoklíny má dotyčnica k integrálnej krivke podľa diferenciálnej rovnice $y' = x + y$ smernicu $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = c$. Napríklad pre izoklínu $x + y = 0$ je uhol $\alpha = 0$, pre izoklínu $x + y = 1$ je $\alpha = 45$. Smerové pole danej rovnice je znázornené na obrázku 3.1.



Cvičenia

7. V nasledujúcich úlohách znázorníte pomocou izoklín smerové pole danej diferenciálnej rovnice:

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| a) $y' = -x$ | b) $yy' + x = 0$ |
| c) $xy' = 2y$ | d) $y' = \frac{x+y}{x-y}$ |
| e) $y' = x^2 + y^2$ | f) $y' = \cos x - y$. |

Obr. 3.1: Smerové pole rovnice $y' = x + y$

3.3 ODR so separovateľnými premennými

Diferenciálnu rovnicu tvaru

$$p(x) + q(y)y' = 0, \quad (3.4)$$

kde $p(x)$, $q(y)$ sú funkcie, nazývame ODR prvého rádu so separovanými premennými. ODR (3.4) sa často píše v tvare

$$p(x)dx + q(y)dy = 0. \quad (3.5)$$

Veta 3.2 *Nech je funkcia $p(x)$ spojitá na intervale I a funkcia $q(y)$ spojitá na intervale K . Potom každé riešenie ODR (3.4) na intervale $I_1 \subset I$ má tvar*

$$\int p(x) dx + \int q(y) dy = c, \quad (3.6)$$

kde c je ľubovoľná konštanta. Každá diferencovateľná funkcia na intervale I_1 , ktorá je implicitne určená rovnicou (3.6), je riešením ODR (3.4) na intervale I_1 .

Veta 3.3 *Nech je funkcia $p(x)$ spojitá na intervale (a, b) a $q(y)$ je zas spojitá na intervale (c, d) , pričom $q(y) \neq 0$ pre každé $y \in (c, d)$. Potom každým bodom oblasti $D = (a, b) \times (c, d)$ prechádza práve jedna integrálna krivka diferenciálnej rovnice (3.4).*

Osobitným prípadom ODR (3.4) je rovnica typu

$$y' = f(x), \quad x \in I.$$

Každé riešenie tejto ODR na intervale I je tvaru

$$y = \int f(x) dx + c,$$

kde c je ľubovoľná konštanta.

Ak je funkcia f spojitá na intervale I , potom podľa vyššie uvedených viet každým bodom (x_0, y_0) , kde $x_0 \in I$ a y_0 je ľubovoľné reálne číslo, prechádza jediné riešenie ODR tvaru

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Príklad 10. Nájďme riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' = \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

pre ktoré platí

$$y\left(\frac{2}{\pi}\right) = 2.$$

Riešenie: V našom prípade je funkcia $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ spojitá na množine $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Riešenie tejto diferenciálnej rovnice spolu s podmienkou $y(\frac{2}{\pi}) = 2$ je tvaru

$$y = 2 + \int_{\frac{2}{\pi}}^x \frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t} dt = 3 - \sin \frac{1}{x}.$$

(Na výpočet integrálu sme použili substitúciu $\frac{1}{t} = v$.) ♣

Príklad 11. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Riešenie: Máme

$$\int y dy = \int x dx,$$

z toho po zintegrovaní a úprave oboch strán dostávame

$$y^2 = x^2 + 2c,$$

čo je všeobecné riešenie pre danú ODR. Na obrázku môžeme vidieť jednotlivé riešenia pre rôzne hodnoty c .

♣

Obr. 3.2: Riešenia rovnice $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

Príklad 12. Riešme ODR

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Riešenie: Keďže ide opäť o rovnicu so separovanými premennými, jej všeobecné riešenie je tvaru

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x},$$

a teda

$$\ln y = -\ln x + c \quad \text{z čoho je} \quad \ln xy = c,$$

a preto

$$xy = a \quad (\text{kde } a = e^c).$$

Jednotlivé integrálne krivky teraz majú tvar, aký možno vidieť na obrázku 3.3



Obr. 3.3: Riešenia rovnice $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

Diferenciálnu rovnicu tvaru

$$p_1(x)p_2(y) + q_1(x)q_2(y)y' = 0, \quad (3.7)$$

kde $p_1(x)$, $q_1(x)$ sú spojité funkcie na intervale (a, b) , $p_2(y)$, $q_2(y)$ sú spojité funkcie na intervale (c, d) , nazývame *separovateľnou ODR prvého rádu*. ODR (3.7) možno písať aj v tvare

$$p_1(x)p_2(y)dx + q_1(x)q_2(y)dy = 0. \quad (3.8)$$

Ak $q_1(x)p_2(y) \neq 0$ na množine $I = (a, b) \times (c, d)$, dá sa diferenciálna rovnica (3.7) upraviť na rovnicu so separovanými premennými:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{q_2(y)}{p_2(y)}y' = 0, \quad (x, y) \in I.$$

Ak $q_1(x)p_2(y) = 0$ na množine $I = (a, b) \times (c, d)$, potom ODR (3.7) nie je ekvivalentná s ODR (3.4)

Príklad 13. Riešme ODR

$$y \cos x - y' \sin x = 0.$$

Riešenie: Uvedená ODR je tvaru (3.7), kde $p_1(x) = \cos x$, $q_1(x) = -\sin x$, $p_2(y) = y$, $q_2(y) = 1$. Pretože všetky funkcie sú spojité v \mathcal{R} , je $I = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$. Rovnica $p_2(y) = y = 0$ má jediný koreň $y = 0$. Rovnica $q_1(x) = 0$ čiže $-\sin x = 0$ má nekonečne mnoho riešení $x = k\pi$, k je celé číslo. Priamky $y = 0$ a $x = k\pi$ rozdeľujú rovinu na nekonečne mnoho oblastí tvaru

$$I'_k = (k\pi, (k+1)\pi) \times (0, \infty),$$

alebo

$$I''_k = (k\pi, (k+1)\pi) \times (-\infty, 0).$$

Na týchto čiastočných intervaloch je naša rovnica ekvivalentná s rovnicou

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{y}y' = 0.$$

Toto je už ODR so separovanými premennými a jej riešenie je dané implicitne rovnicou

$$\ln |\sin x| - \ln |y| = c_1,$$

kde c_1 je konštanta.

Z toho potom

$$\left| \frac{\sin x}{y} \right| = e^{c_1}.$$

Ak položíme $e^{c_1} = \frac{1}{c_2} > 0$, máme

$$|y| = c_2 |\sin x|.$$

Pre interval I'_k dostaneme riešenia

$$y = c_2 |\sin x|, \quad c_2 > 0.$$

Pre interval I''_k dostaneme riešenia

$$y = -c_2 |\sin x|, \quad c_2 > 0.$$

Keďže $\lim_{x \rightarrow k\pi} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow k\pi} y' = \pm c_2$, riešenia sa dajú rozšíriť tak, aby v bodoch $k\pi$ mali deriváciu c_2 . Ak vezmeme funkciu $y = c \sin x$, kde $c \neq 0$, $x \in (-\infty, \infty)$, táto spĺňa uvedené podmienky a zároveň je riešením ODR. Takýmto riešením je aj funkcia $y = 0$. Všetky riešenia ODR sú preto $y = c \sin x$, kde $c \in \mathcal{R}$. ♣

Príklad 14. Tekutina sa zohrieva v nádobe, ktorá má konštantnú teplotu 180°C . Predpokladá sa, že rýchlosť zvyšovania teploty tekutiny je úmerná $(180 - \Theta)$, kde $\Theta^\circ\text{C}$ je teplota tekutiny v čase t minút. Ak sa teplota tekutiny zvýši z 0°C na 120°C za 5 minút, nájdite teplotu tekutiny o ďalších 5 minút.

Riešenie: Rýchlosť zvyšovania sa teploty je $\frac{d\Theta}{dt}$. Z úlohy vieme, že:

$$\frac{d\Theta}{dt} = k(180 - \Theta),$$

kde k je konštanta. Toto je diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorú vieme ľahko vypočítať.

$$\int \frac{-1}{180 - \Theta} d\Theta = - \int k dt.$$

Pre $\Theta < 180$ máme:

$$\begin{aligned} \ln(180 - \Theta) &= -kt + c, \\ 180 - \Theta &= Ae^{-kt}, \quad \text{kde } A = e^c, \\ \Theta &= 180 - Ae^{-kt}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ak $t = 0$, je $\Theta = 0$, potom $0 = 180 - A$ a teda $A = 180$. Preto $\Theta = 180(1 - e^{-kt})$.

Pretože $\Theta = 120$ keď $t = 5$, máme

$$120 = 180(1 - e^{-5k}) \quad \text{a teda } e^{-5k} = \frac{1}{3}.$$

Keď $t = 10$, vtedy

$$\begin{aligned}\Theta &= 180(1 - e^{-10k}), \\ \Theta &= 180(1 - (e^{-5k})^2), \\ \Theta &= 180(1 - (\frac{1}{3})^2), \\ \Theta &= 160.\end{aligned}$$

Záver: teplota tekutiny o ďalších 5 minút bude 160°C . ♣

Poznámka. Existujú ešte aj iné typy diferenciálnych rovníc 1. rádu, napríklad homogénna alebo Bernoulliho, ktoré sa vhodnou substitúciou dajú previesť na separovateľné rovnice. Zájemcovi o tieto typy rovníc odporúčame napríklad knižku [4].

Cvičenia

V nasledujúcich úlohách riešte diferenciálne rovnice so separovanými premennými.

8. $10^x - 10^{-y}y' = 0$.

9. $1 - 2x - y^2y' = 0$.

10. $\frac{1}{1+x^2} + \frac{y'}{1+y^2} = 0$.

11. Nájdite riešenie ODR so separovanými premennými so začiatočnou podmienkou:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Riešte separovateľné ODR:

12. $1 + y^2 + xy' = 0$.

13. $-1 + e^{-y}(1 + y') = 0$.

14. $e^{x+y} - y' = 0$.

15. $2y - x^3y' = 0$.

16. $(y-1)(y-2) - y' = 0$.

17. $(1 + e^x)yy' = e^x$.

18. $y'x^3 + xy = 0$.

19. Pomocou substitúcie $z = (1+x)y$ riešte diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x} = \cos x,$$

ak pre $x = 0$ platí: $y = 0$.

V nasledujúcich cvičeniach nájdite riešenia ODR s Cauchyho začiatočnou podmienkou:

20.

$$\frac{x}{1+y} - \frac{yy'}{1+x} = 0, \quad y(0) = 1.$$

21.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} y \operatorname{cotg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

22.

$$e^{x-y} - y' = 0, \quad y(0) = 1.$$

3.4 LDR prvého rádu

Lineárnou diferenciálnou rovnicou (LDR) prvého rádu s pravou stranou nazývame ODR tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (3.10)$$

kde p, q sú funkcie premennej x definované na intervale I a $q(x)$ je rôzne od nuly pre každé $x \in I$.

Ak platí $q(x) = 0$ pre každé $x \in I$, potom rovnici

$$y' + p(x)y = 0, \quad (3.11)$$

hovoríme *homogénna lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu*. (alebo lineárna ODR 1. rádu bez pravej strany.)

Veta 3.4 Ak sú funkcie $p(x)$ a $q(x)$ spojité na intervale (a, b) , potom funkcia

$$y = \left[\int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + c \right] e^{-\int p(x) dx}, \quad (3.12)$$

kde c je ľubovoľná konštanta, je riešením diferenciálnej rovnice (3.10) na intervale (a, b) . Každým bodom množiny $(a, b) \times (-\infty, \infty)$ prechádza jediná krivka rovnice (3.10), ktorú dostaneme vhodnou voľbou konštanty c .

Funkciu (3.12) nazývame *všeobecným riešením* diferenciálnej rovnice (3.10). Diferenciálnu rovnicu (3.10) môžeme riešiť aj bez použitia vzťahu (3.12) metódou *variácie konštant* takto:

Najskôr nájdeme riešenie príslušnej homogénnej diferenciálnej rovnice (3.11). Je to separovateľná diferenciálna rovnica, ktorú vieme už riešiť z predchádzajúcej časti tejto kapitoly. Jej všeobecné riešenie je tvaru:

$$y = ce^{-\int p(x) dx}.$$

Partikulárne riešenie rovnice (3.10) budeme hľadať v tvare

$$y = c(x)e^{-\int p(x) dx}, \quad (3.13)$$

kde neznámu funkciu $c(x)$ určíme tak, aby funkcia (3.13) bola riešením diferenciálnej rovnice (3.10).

Poznámka. Existujú aj iné metódy riešenia diferenciálnej rovnice (3.10).

Príklad 15. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$\sin xy' + 2y \cos x = 1.$$

Riešenie: V štandardnej forme je uvedená rovnica tvaru

$$y' + (2 \cotg x)y = \frac{1}{\sin x}.$$

Funkcie $p(x) = 2 \cotg x$ a $q(x) = \frac{1}{\sin x}$ sú spojité na intervaloch $(k\pi, (k+1)\pi)$, k je celé číslo. Na týchto intervaloch hľadáme riešenie diferenciálnej rovnice. Riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice je potom tvaru

$$y = ce^{\int -2 \cotg x dx}.$$

Jednoduchým výpočtom integrálu dostávame

$$\int -2 \cot g x \, dx = -2 \ln(\sin x),$$

a preto všeobecné riešenie homogénnej rovnice je tvaru

$$y = ce^{-2 \ln \sin x} = c \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Metódou variácie konštánt pre neznámu funkciu $c(x)$ dostávame

$$\frac{c'(x)}{\sin^2 x} - c(x) \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} + 2c(x) \frac{\cos x}{\sin^2 x} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin x},$$

z čoho po úprave máme

$$c'(x) = \sin x,$$

a teda všeobecné riešenie tejto diferenciálnej rovnice je

$$c(x) = -\cos x + C.$$

Všeobecné riešenie pôvodnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou dostaneme dosadením funkcie $c(x)$ do riešenia typu (3.13). Máme

$$y = \frac{-\cos x + c}{\sin^2 x},$$

čo je všeobecné riešenie pôvodnej diferenciálnej rovnice. ♣

Príklad 16. Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, \quad (3.14)$$

ktoré vyhovuje začiatočnej podmienke $y(0) = 1$.

Riešenie: Funkcia $p(x) = \frac{2}{x+1}$ je spojitá na množine $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ a funkcia $q(x) = (x+1)^3$ je spojitá na celom \mathcal{R} . Riešenie diferenciálnej rovnice hľadáme na intervale $(-\infty, -1)$ resp. $(-1, \infty)$. Najprv nájdeme riešenie diferenciálnej rovnice bez pravej strany:

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0, \quad (3.15)$$

Jedno z riešení tejto diferenciálnej rovnice je funkcia $y = 0$. Ak predpokladáme, že $y \neq 0$, môžeme diferenciálnu rovnicu upraviť na tvar:

$$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x+1} = 0,$$

čo je diferenciálna rovnica so separovanými premennými, ktorej riešenie je

$$\ln |y| - 2 \ln |x+1| = c_1,$$

čiže

$$\ln \frac{|y|}{(x+1)^2} = \ln c_2, \quad \text{kde } c_2 > 0,$$

z čoho máme

$$|y| = c_2(x+1)^2, \quad \text{a teda } y = c_3(x+1)^2, \quad c_3 \neq 0.$$

Ak uvážime, že aj funkcia $y = 0$ je riešením homogénnej diferenciálnej rovnice (3.15), dostaneme, že všeobecným riešením rovnice (3.15) je

$$y = c(x+1)^2, \quad x \in (-1, \infty), \quad c \in \mathcal{R}.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (3.14) hľadáme metódou variácie konštant v tvare:

$$y = c(x)(x+1)^2. \quad (3.16)$$

Platí:

$$y' = c'(x)(x+1)^2 + 2c(x)(x+1).$$

Dosadením do pôvodnej rovnice (3.14) dostaneme:

$$c'(x)(x+1)^2 + 2c(x)(x+1) - \frac{2c(x)(x+1)^2}{(x+1)} = (x+1)^3$$

a po úprave máme

$$c'(x) = x+1,$$

z čoho je

$$c(x) = \int (x+1) dx = \frac{(x+1)^2}{2} + C,$$

kde C je ľubovoľné číslo. Výsledok je správny, aj keď integrál vyjadríme ako

$$c(x) = \int x+1 dx = \frac{x^2}{2} + x + C,$$

kde C bude zas reálne číslo a budeme dostávať tie isté hodnoty $c(x)$ pre iné hodnoty C . Dosadením do (3.16) máme všeobecné riešenie rovnice (3.14):

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

Pre riešenie, ktoré vyhovuje danej začiatočnej podmienke $y(0) = 1$, dostaneme $C = \frac{1}{2}$. Preto riešenie rovnice (3.14), ktoré vyhovuje začiatočnej podmienke $y(0) = 1$, je

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + \frac{1}{2}(x+1)^2, \quad x \in (-1, \infty).$$



Cvičenia

Riešte diferenciálne rovnice 1. rádu bez pravej strany:

23. $y' - y \operatorname{tg} x = 0.$

24. $y' - y(x \sin x - \cos x) = 0.$

25. $y' + \frac{1}{x^2}y = 0.$

Riešte diferenciálne rovnice 1. rádu s pravou stranou.

26. $y' + 3y = x.$

27. $x^2y' + xy = -1.$

28. $xy' + y = x^3.$

29. $y' + \frac{1}{x+1}y = \sin x$.
 30. $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$.
 31. $y' \cos x + 2y \sin x = 2 \sin x$.
 32. $x \ln xy' - 2y = \ln x$.
 33. $y' - xy = xe^{x^2}$.
 34. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x$.
 35. $xy' - y = x^2 \cos x$.
 36. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Nájdite riešenia nasledujúcich diferenciálnych rovníc, ktoré spĺňajú danú začiatočnú podmienku:

37. $y' + x^2y = x^2$, $y(2) = 1$.
 38. $y' + y = \cos x$, $y(0) = 1$.
 39. $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}$, $n = 2, 3, \dots$, $a > 0$, $y(1) = 0$.
 40. $y' + y \cotg x = \sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
 41. $y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$, $y(0) = 0$.
 42. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$, $y(e) = \frac{e^2}{2}$.
 43. $y' \sin x - y \cos x = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3.5 LDR vyšších rádov

Lineárnou diferenciálnou rovnicou (LDR) n -tého rádu nazývame diferenciálnu rovnicu tvaru

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (3.17)$$

kde funkcie $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$ sú spojité na intervale I , $a_0(x) \neq 0$ pre všetky $x \in I$.

Funkcie $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ nazývame *koefficientami* lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu. Rovnicu (3.17) môžeme upraviť na tvar

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x), \quad (3.18)$$

kde $p_i(x) = a_i(x)/a_0(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ a $g(x) = f(x)/a_0(x)$, $x \in I$. Skráteno túto rovnicu zapisujeme v tvare

$$L(y) = g(x).$$

Ak v rovnici (3.17) pre funkciu $f(x)$ platí $f(x) = 0$ pre všetky $x \in I$, hovoríme o lineárnej diferenciálnej rovnici *bez pravej strany* (*homogénna*). Ak v diferenciálnej rovnici (3.17) neplatí $f(x) = 0$ pre všetky $x \in I$, hovoríme o lineárnej diferenciálnej rovnici *s pravou stranou* (*nehomogénna*).

Veta 3.5 Pre každé $x_0 \in I$ a pre začiatočné podmienky $y(x_0) = b_1$, $y'(x_0) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n$, kde b_1, b_2, \dots, b_n sú ľubovoľné reálne čísla, existuje práve jedno riešenie $y(x), x \in I$, lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu (3.17), ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky.

Veta 3.6 Nech funkcie y_1, y_2, \dots, y_m sú riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany. Potom každá ich lineárna kombinácia $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_my_m$, kde c_1, c_2, \dots, c_m sú ľubovoľné čísla, je riešením tejto diferenciálnej rovnice.

Poznámka. Riešenie $y = 0$ pre každé $x \in I$ nazývame *triviálnym riešením* diferenciálnej rovnice. Každá lineárna diferenciálna rovnica bez pravej strany má triviálne riešenie.

Teraz sa budeme zaoberať otázkou hľadania riešenia diferenciálnej rovnice s pravou stranou. K tomu potrebujeme poznať niekoľko nasledujúcich pojmov.

Nech sú dané funkcie f_1, f_2, \dots, f_m definované na intervale I . Ak existuje taká nenulová m -tica reálnych resp. komplexných čísel c_1, c_2, \dots, c_m , že pre funkcie f_1, f_2, \dots, f_m platí

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x) = 0$$

pre každé $x \in I$, potom hovoríme, že funkcie f_1, f_2, \dots, f_m sú *lineárne závislé* na intervale I . Ak funkcie f_1, f_2, \dots, f_m nie sú lineárne závislé, hovoríme, že sú *lineárne nezávislé* na intervale I .

Nech funkcie f_1, f_2, \dots, f_m majú na intervale I derivácie až do rádu $m - 1$. Potom determinant

$$W(f_1, f_2, \dots, f_m) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_m'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & f_m''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \dots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazývame *Wronského determinantom* funkcií f_1, f_2, \dots, f_m alebo len *wronskiánom*.

Veta 3.7 Ak funkcie f_1, f_2, \dots, f_m sú lineárne závislé na intervale I , potom $W(f_1, f_2, \dots, f_m) = 0$ pre každé $x \in I$.

Veta 3.8 Nech y_1, y_2, \dots, y_m sú riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu bez pravej strany. Ak $m > n$, potom sú tieto riešenia lineárne závislé.

Veta 3.9 n -riešení y_1, y_2, \dots, y_n lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu bez pravej strany je lineárne závislých (nezávislých) práve vtedy keď ich wronskián sa rovná (nerovná sa) nule aspoň v jednom čísle $x \in I$.

Každých n lineárne nezávislých riešení lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu bez pravej strany nazývame *fundamentálnym systémom riešení*.

Veta 3.10 Každá lineárna diferenciálna rovnica n -tého rádu bez pravej strany má fundamentálny systém riešení.

Veta 3.11 Nech y_1, y_2, \dots, y_n je fundamentálny systém riešení lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu bez pravej strany na intervale I . Potom každé riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu bez pravej strany má tvar

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

kde c_1, c_2, \dots, c_n sú vhodne zvolené čísla.

Veta 3.12 Nech $Y(x)$ je riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice (3.18) s pravou stranou. Potom každé riešenie tejto diferenciálnej rovnice má tvar

$$y = Y + z, \tag{3.19}$$

kde $z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ je všeobecné riešenie zodpovedajúce lineárnej diferenciálnej rovnici bez pravej strany.

Riešenie y nazývame *všeobecným riešením* lineárnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou.

Veta 3.13 (Metóda variácie konštánt) Ak y_1, y_2, \dots, y_n je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice

$$L(y) = 0,$$

potom lineárna diferenciálna rovnica n -tého rádu s pravou stranou

$$L(y) = g(x)$$

má riešenie

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx,$$

kde $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ je wronskián fundamentálneho systému a $W_i(x)$ je determinant, ktorý vznikne z wronskiánu nahradením i -tého stĺpca wronskiánu stĺpcom, ktorého prvky sú $0, 0, \dots, 0, g(x)$.

Veta 3.14 (Princíp superpozície.) Nech funkcia $Y_i(x), x \in I$ je riešením lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu $L(y) = g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Potom funkcia $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$ je riešením lineárnej rovnice $L(y) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_m(x)$ na intervale I .

Uvedené vety poskytujú základné vedomosti o riešeníach lineárnych diferenciálnych rovníc. Existujú aj iné metódy ako určiť partikulárne riešenie rovnice $L(y) = g(x)$. O tých sa zmienime neskôr.

Príklad 17. Nájdime všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^3, \quad (3.20)$$

kde $x \in (0, \infty)$, ak fundamentálny systém riešení rovnice $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ je $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = 1+x$.

Riešenie: Všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou je súčet všeobecného riešenia tejto rovnice bez pravej strany a jedného riešenia Y tejto lineárnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou, teda

$$y = Y + c_1 e^x + c_2(1+x).$$

Partikulárne riešenie Y nájdeme metódou variácie konštánt. Našu rovnicu upravíme na tvar

$$y'' - \frac{1+x}{x}y' + \frac{1}{x}y = x^2.$$

Teda $g(x) = x^2$. Pre partikulárne riešenie platí:

$$Y = y_1 \int \frac{W_1}{W} dx + y_2 \int \frac{W_2}{W} dx. \quad (3.21)$$

Vypočítame wronskián:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & 1+x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = -xe^x.$$

Teraz vymeníme vo wronskiáne postupne prvý a druhý stĺpec za vektor $(0, x^2)$ a vypočítame W_1, W_2 .

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1+x \\ x^2 & 1 \end{vmatrix} = -x^3 - x^2,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 e^x.$$

Po dosadení do (3.21) dostávame

$$Y = e^x \int (x^2 + x)e^{-x} dx + (1 + x) \int (-x) dx,$$

čiže po zintegrovaní

$$Y = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)/2, \quad x \in (0, \infty).$$

Všeobecné riešenie rovnice (3.20) je preto

$$y = c_1 e^x + c_2(1 + x) - (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)/2, \quad x \in (0, \infty).$$



Z vyššie uvedeného je jasné, že ak poznáme fundamentálny systém riešení lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu bez pravej strany, pomocou metódy variácie konštánt vieme získať aj všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu s pravou stranou. V ďalšom teda pôjde o hľadanie fundamentálneho systému riešení niektorých lineárnych diferenciálnych rovníc.

3.6 LDR s konštantnými koeficientami

Rovnicu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (3.22)$$

kde a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sú reálne čísla, nazývame *lineárnou diferenciálnou rovnicou (LDR) s konštantnými koeficientami bez pravej strany*. Skráteno ju môžeme zapísať

$$L_n(y) = 0.$$

Fundamentálny systém takejto diferenciálnej rovnice vieme nájsť a to si teraz ukážeme.

Algebraickú rovnicu prislúchajúcu k diferenciálnej rovnici (3.22)

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

nazývame *charakteristickou rovnicou* diferenciálnej rovnice (3.22) a jej korene *charakteristickými koreňmi* diferenciálnej rovnice. Z algebry platí, že v obore komplexných čísel má polynóm n -tého stupňa práve n koreňov vrátane násobnosti týchto koreňov. Podľa toho, akého tvaru sú charakteristické korene, dostávame fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (3.22).

Veta 3.15 *Nech charakteristické korene diferenciálnej rovnice (3.22) sú*

1. r_1, r_2, \dots, r_m navzájom rôzne **reálne** korene
 r_1 je k_1 -násobný, r_2 je k_2 násobný, \dots , r_m je k_m násobný
2. $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2$, \dots , $\alpha_p \pm i\beta_p$, páry navzájom rôznych **komplexných** koreňov
 $\alpha_1 \pm i\beta_1$ ako s_1 násobný, $\alpha_2 \pm i\beta_2$ ako s_2 násobný, \dots $\alpha_p \pm i\beta_p$ ako s_p násobný koreň, pričom $\beta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Nech platí

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_p) = n.$$

Potom funkcie

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{r_1 x}, \\ e^{r_2 x}, x e^{r_2 x}, x^2 e^{r_2 x}, \dots, x^{k_2-1} e^{r_2 x},$$

.....
 $e^{r_m x}, xe^{r_m x}, x^2 e^{r_m x}, \dots, x^{k_m-1} e^{r_m x},$
 $e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, xe^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \dots, x^{s_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x,$
 $e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, xe^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \dots, x^{s_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x,$

 $e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x, xe^{\alpha_p x} \cos \beta_p x, \dots, x^{s_p-1} e^{\alpha_p x} \cos \beta_p x,$
 $e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x, xe^{\alpha_p x} \sin \beta_p x, \dots, x^{s_p-1} e^{\alpha_p x} \sin \beta_p x,$
 tvoria fundamentálny systém riešení rovnice (3.22).

Teraz si ukážeme použitie tejto vety na jednoduchých lineárnych diferenciálnych rovniciach druhého rádu s konštantnými koeficientami. Pre charakteristické korene tejto rovnice môžu nastať len tieto prípady:

1. Korene r_1, r_2 sú reálne a navzájom rôzne. Potom fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice tvoria funkcie

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}.$$

2. Koreň r_1 je dvojnásobným reálnym koreňom. Potom fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice tvoria funkcie

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}.$$

3. Korene r_1, r_2 sú komplexne združené čísla. To jest $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$. Potom fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice tvoria funkcie

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Uvedieme príklady na všetky tieto možnosti.

Príklad 18. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Riešenie: Charakteristická rovnica je tvaru

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Jej korene sú: $r_1 = 2, r_2 = 3$. Charakteristické korene sú teda dva reálne a navzájom rôzne. Preto fundamentálny systém riešení uvedenej diferenciálnej rovnice je:

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$$

Všeobecné riešenie je preto tvaru:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$



Príklad 19. Riešme diferenciálnu rovnicu:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Riešenie: Z charakteristickej rovnice, ktorá je tvaru $r^2 - 2r + 1 = 0$, hneď vidíme, že charakteristický koreň je jeden reálny dvojnásobný: $r_1 = 1$. Fundamentálny systém tvoria teda funkcie

$$y_1 = e^x, y_2 = xe^x.$$

Všeobecné riešenie je preto tvaru:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Príklad 20. Je daná diferenciálna rovnica:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Nájdime všeobecné riešenie.

Riešenie: V tomto prípade charakteristická rovnica $r^2 + 2r + 5 = 0$, má dva komplexne združené korene $r_1 = -1 + 2i$, $r_2 = -1 - 2i$. Fundamentálny systém tvoria teda funkcie

$$y_1 = e^{-x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{-x} \sin 2x.$$

Všeobecné riešenie je preto tvaru:

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$



Príklad 21. Je daná diferenciálna rovnica:

$$y'' + 4y = 0.$$

Nájdime všeobecné riešenie.

Riešenie: V tomto prípade charakteristická rovnica $r^2 + 4 = 0$, má dva komplexne združené rýdzoimaginárne korene $r_1 = +2i$, $r_2 = -2i$. Fundamentálny systém tvoria teda funkcie

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x.$$

Všeobecné riešenie je preto tvaru:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$



Príklad 22. Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

ak vieme, že $y(0) = 1$ a $y'(0) = -6$.

Riešenie: Charakteristická rovnica je tvaru $r^2 + 5r + 6 = 0$ a teda $r_1 = -3$, $r_2 = -2$. Všeobecné riešenie je tvaru

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Vypočítame teraz koeficienty c_1 , c_2 , tak, aby platili podmienky $y(0) = 1$ a $y'(0) = -6$.

Dosadíme do všeobecného riešenia prvú podmienku. Musí teda platiť:

$$1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1,$$

z čoho dostávame

$$c_1 = 1 - c_2.$$

Teraz to isté urobíme pre druhú podmienku:

$$-6 = -3c_1 \cdot 1 - 2c_2 \cdot 1.$$

Dosadíme $c_1 = 1 - c_2$ a vypočítame c_2 . Máme: $-6 = -3 + 3c_2 - 2c_2$ a z toho $c_2 = -3$. Vypočítame c_1 :

$$c_1 = 1 - c_2, \text{ a preto } c_1 = 4.$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice s uvedenými podmienkami je tvaru

$$y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}.$$



Príklad 23. Riešme danú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0$$

ak vieme, že $y = 1$ pre $x = 0$ a $y = 2$ pre $x = \frac{\pi}{2}$.

Riešenie: Charakteristická rovnica je tvaru $r^2 + 9 = 0$ a teda $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$. Korene sú v tomto prípade rýdzo imaginárne (reálna časť komplexného čísla je nulová) preto všeobecné riešenie je tvaru

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Vypočítame teraz koeficienty c_1 , c_2 , tak, aby platili podmienky $y = 1$ pre $x = 0$ a $y = 2$ pre $x = \frac{\pi}{2}$. Dosadíme do všeobecného riešenia prvú podmienku. Musí teda platiť:

$$1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0,$$

z čoho hneď dostávame $c_1 = 1$. Teraz to isté urobíme pre druhú podmienku:

$$2 = 1 \cdot 0 + c_2 \cdot (-1).$$

Pre c_2 máme: $c_2 = -2$. Riešenie tejto diferenciálnej rovnice s uvedenými podmienkami je tvaru

$$y = \cos 3x - 2 \sin 3x.$$



Poznámka. Všimnite si dodatočných podmienok pre nájdenie jediného riešenia v posledných dvoch príkladoch. V prvom príklade sú to *začiatočné podmienky*, tak ako boli definované v tejto kapitole, kdežto v druhom príklade sa jedná o tzv. *okrajové podmienky*, ktoré sme spomínali napríklad v príklade (3.1). Hlbšie skúmanie týchto okrajových podmienok však presahuje rámec týchto skrípt a my sa obmedzíme len na príklady, kde bude treba nájsť také riešenie, ktoré uvedené podmienky spĺňa.

Príklad 24. Ak $x = 4$ a $\frac{dx}{dt} = 6$ pre $t = 0$, nájdime riešenie rovnice

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 9x = 0,$$

ktorá reprezentuje kmitanie istej struny.

Riešenie: Požadované riešenie, ktoré reprezentuje kmitanie danej struny je tvaru

$$x = 4 \cos 3t + 2 \sin 3t.$$



Poznámka. Každý pohyb, ktorý sa dá popísať diferenciálnou rovnicou v tvare $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$, kde ω je konštanta, popisuje *jednoduchý harmonický pohyb*.

Teraz si povieme niečo o riešení LDR s konštantnými koeficientami s pravou stranou. V predchádzajúcej kapitole sme metódou variácie konštant ukázali, ako nájsť partikulárne riešenie LDR s pravou stranou, ak máme fundamentálny systém riešení LDR bez pravej strany. Túto metódu môžeme samozrejme použiť aj v prípade LDR s konštantnými koeficientami a výsledok je hneď zrejmý: ako už vieme z predchádzajúcej kapitoly všeobecné riešenie LDR n -tého rádu s konštantnými koeficientami bude

$$y = Y + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

kde Y je partikulárne riešenie a y_1, y_2, \dots, y_n je fundamentálny systém riešení prislúchajúcej LDR bez pravej strany ($c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathcal{R}$).

Teraz si ukážeme ešte inú metódu na hľadanie partikulárneho riešenia, ktorá je v niektorých prípadoch efektívnejšia, ako metóda variácie konštant. Táto metóda sa volá *metóda neurčitých koeficientov*. Dá sa použiť iba v prípade, že sa jedná o LDR s konštantnými koeficientami typu

$$L_n(y) = f(x), \tag{3.23}$$

kde $L_n(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y$ a pravá strana je tvaru:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

alebo je súčtom funkcií takéhoto tvaru (v takom prípade použijeme ešte princíp superpozície – viď predchádzajúca kapitola). V tomto prípade α, β sú konštanty a $P_n(x), Q_m(x)$ sú polynómy n -tého resp. m -tého stupňa. Partikulárne riešenie (3.23) hľadáme potom v tvare:

$$Y(x) = x^r e^{\alpha x} (P_l(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x),$$

kde r je násobnosť koreňa $\alpha + \beta i$ charakteristickej rovnice prislúchajúcej k danej LDR (ak $\alpha + i\beta$ nie je koreň charakteristickej rovnice volíme $r = 0$). $P_l(x), Q_l(x)$ sú polynómy stupňa l s neurčitými koeficientami, pričom l je rovné väčšiemu z čísel m a n , teda:

$$P_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \dots + A_l; \quad Q_l(x) = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \dots + B_l.$$

Tieto neurčité koeficienty je možné nájsť zo systému lineárnych rovníc, ktoré dostaneme porovnaním koeficientov zhodných členov v diferenciálnej rovnici, do ktorej sme dosadili takéto partikulárne riešenie.

Príklad 25. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = f(x),$$

kde

- a) $f(x) = x + 1$,
- b) $f(x) = (x - 1)e^{2x}$.

Riešenie: LDR bez pravej strany je tvaru: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$. Charakteristická rovnica $r^2 + r - 6 = 0$ má korene $r_1 = 2, r_2 = -3$. Preto riešenie rovnice bez pravej strany je tvaru

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Na nájdenie partikulárneho riešenia použijeme metódu neurčitých koeficientov.

a) $f(x) = x + 1$.

V tomto prípade pre pravú stranu platí:

$\alpha = \beta = 0, P_n(x) = x + 1$. Keďže číslo $\alpha + i\beta = 0 + i0$ nie je koreňom charakteristického polynómu

(korene sú 2 a -3), tak $r = 0$ a partikulárne riešenie navrhne v tvare lineárnej funkcie $Y(x) = ax + b$, kde a, b sú zatiaľ neznáme koeficienty, ktoré treba vypočítať. Pre takto navrhnuté riešenie máme: $Y'(x) = a$, $Y''(x) = 0$. Dosadíme takto navrhnuté riešenie a jeho derivácie do LDR s pravou stranou. Máme:

$$a - 6(ax + b) = x + 1.$$

Porovnaním koeficientov polynómu na ľavej strane s koeficientami polynómu na pravej strane dostávame

$$\begin{aligned} -6a &= 1, & a - 6b &= 1 \text{ a z toho máme} \\ a &= -\frac{1}{6}, & b &= -\frac{7}{36}. \end{aligned}$$

Preto je partikulárne riešenie tvaru:

$$Y(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{7}{36}.$$

Všeobecné riešenie rovnice s touto pravou stranou je preto:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}x - \frac{7}{36}$$

pre $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$.

b) $f(x) = (x - 1)e^{2x}$.

V tomto prípade pre pravú stranu platí:

$\alpha = 2$, $\beta = 0$, $P_n(x) = x - 1$. Keďže číslo $\alpha + i\beta = 2 + i0$ teraz je koreňom charakteristického polynómu a to jednonásobným, tak $r = 1$ a partikulárne riešenie navrhne v tvare $Y(x) = x(ax + b)e^{2x}$, kde a, b sú koeficienty, ktoré treba vypočítať. Opäť nájdeme derivácie navrhnutého riešenia: $Y'(x) = (2ax + b + 2ax^2 + 2bx)e^{2x}$, $Y''(x) = (2a + 8ax + 4b + 4ax^2 + 4bx)e^{2x}$ a dosadíme do LDR s pravou stranou. Máme:

$$(2a + 8ax + 4b + 4ax^2 + 4bx + 2ax + b + 2ax^2 + 2bx - 6ax^2 - 6bx)e^{2x} = (x - 1)e^{2x}.$$

Pretože funkcia e^{2x} je vždy kladná, máme:

$$2a + 8ax + 4b + 4ax^2 + 4bx + 2ax + b + 2ax^2 + 2bx - 6ax^2 - 6bx = x - 1.$$

Teraz porovnaním koeficientov polynómu na ľavej strane s koeficientami polynómu na pravej strane dostávame

$$\begin{aligned} 4a + 2a - 6a &= 0 \\ 8a + 4b + 2a + 2b - 6b &= 1 \\ 2a + 4b + b &= -1 \end{aligned}$$

a z toho máme $a = \frac{1}{10}$, $b = -\frac{6}{25}$. Preto partikulárne riešenie je tvaru:

$$Y(x) = x\left(\frac{1}{10}x - \frac{6}{25}\right)e^{2x}.$$

Všeobecné riešenie rovnice s touto pravou stranou je preto:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{2x}$$

pre $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$. ♣

Príklad 26. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$9y'' - 6y' + y = f(x),$$

kde

- a) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$,
 b) $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$.

Riešenie: LDR bez pravej strany je tvaru: $9y'' - 6y' + y = 0$.

Charakteristická rovnica $9r^2 - 6r + 1 = 0$ má jeden dvojnásobný koreň $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$. Preto riešenie rovnice bez pravej strany je tvaru

$$y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 x e^{\frac{x}{3}}.$$

a) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$.

V tomto prípade pre pravú stranu platí:

$\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{3}$, $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = 1$. Keďže číslo $\alpha + i\beta = 0 + \frac{1}{3}i$ nie je koreňom charakteristického polynómu (dvojnásobný koreň je $\frac{1}{3} + 0i$), tak $r = 0$ a partikulárne riešenie navrhujeme v tvare $Y(x) = a \sin \frac{x}{3} + b \cos \frac{x}{3}$, kde a, b sú zatiaľ neznáme koeficienty, ktoré treba vypočítať. (Zdôrazňujeme, že navrhnuté riešenie musí obsahovať obe goniometrické funkcie „sin“, „cos“.) Pre takto navrhnuté riešenie máme: $Y'(x) = \frac{a}{3} \cos \frac{x}{3} - \frac{b}{3} \sin \frac{x}{3}$, $Y''(x) = -\frac{a}{9} \sin \frac{x}{3} - \frac{b}{9} \cos \frac{x}{3}$. Dosadíme takto navrhnuté riešenie a jeho derivácie do LDR s pravou stranou. Máme:

$$9 \left(-\frac{a}{9} \sin \frac{x}{3} - \frac{b}{9} \cos \frac{x}{3} \right) - 6 \left(\frac{a}{3} \cos \frac{x}{3} - \frac{b}{3} \sin \frac{x}{3} \right) + a \sin \frac{x}{3} + b \cos \frac{x}{3} = \sin \frac{x}{3}$$

Porovnaním koeficientov pri funkciách „sin“, „cos“ na ľavej strane s koeficientami polynómu na pravej strane dostávame

$$-a + 2b + a = 1, \quad -b - 2a + b = 0 \text{ a z toho máme}$$

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Preto partikulárne riešenie je tvaru:

$$Y(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3}.$$

Všeobecné riešenie rovnice s touto pravou stranou je preto:

$$y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 x e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3},$$

pre $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$.

b) $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$.

V tomto prípade pre pravú stranu platí:

$\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 0$, $P_n(x) = 1$. Keďže číslo $\alpha + i\beta = \frac{1}{3} + i0$ teraz je koreňom charakteristického polynómu a tento koreň je dvojnásobný, tak $r = 2$ a partikulárne riešenie navrhujeme v tvare $Y(x) = ax^2 e^{\frac{x}{3}}$, kde a je neznámy koeficient. Opäť nájdeme derivácie navrhnutého riešenia: $Y'(x) = (2ax + \frac{a}{3}x^2)e^{\frac{x}{3}}$, $Y''(x) = (2a + \frac{4a}{3}x + \frac{a}{9}x^2)e^{\frac{x}{3}}$ a dosadíme do LDR s pravou stranou. Máme:

$$(18a + 12ax + ax^2 - 12ax - 2ax^2 + ax^2)e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{x}{3}}.$$

Pretože funkcia $e^{\frac{x}{3}}$ je vždy kladná, máme:

$$18a + 12ax + ax^2 - 12ax - 2ax^2 + ax^2 = 1.$$

Teraz porovnaním koeficientov polynómu na ľavej strane s koeficientami polynómu na pravej strane dostávame

$$a - 2a + a = 0, \quad 12a - 12a = 0, \quad 18a = 1.$$

a z toho máme $a = \frac{1}{18}$. Preto partikulárne riešenie je tvaru:

$$Y(x) = \frac{1}{18}x^2e^{\frac{x}{3}}.$$

Všeobecné riešenie rovnice s touto pravou stranou je preto:

$$y = c_1e^{\frac{x}{3}} + c_2xe^{-\frac{x}{3}} + \frac{1}{18}x^2e^{\frac{x}{3}}$$

pre $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$. ♣

Príklad 27. V elektrickom okruhu so striedavým prúdom je pri vhodne použitých jednotkách kapacity kondenzátora, ohmického odporu indukčnej cievky a samoindukčnosti hodnota elektrického prúdu v čase t je daná diferenciálnou rovnicou:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = \sin t.$$

Nájďme všeobecné riešenie.

Riešenie: Homogénna rovnica je tvaru $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$, jej charakteristický polynóm je $r^2 + 4r + 3 = 0$, jeho korene sú $r_1 = -1$, $r_2 = -3$. Riešenie homogénnej rovnice je

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t},$$

kde $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$. Pre pravú stranu platí:

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_n(t) = 0$, $Q_m(t) = 1$. Keďže číslo $\alpha + i\beta = 0 + i$ nie je koreňom charakteristického polynómu, tak $r = 0$ a partikulárne riešenie navrhne v tvare $X(t) = a \sin t + b \cos t$, kde a, b sú zatiaľ neznáme koeficienty, ktoré treba vypočítať. Pre takto navrhnuté riešenie máme: $X'(t) = a \cos t - b \sin t$, $X''(t) = -a \sin t - b \cos t$. Dosadíme takto navrhnuté riešenie a jeho derivácie do LDR s pravou stranou. Máme:

$$-a \sin t - b \cos t + 4(a \cos t - b \sin t) + 3(a \sin t + b \cos t) = \sin t.$$

Porovnaním koeficientov pri funkciách „sin“, „cos“ na ľavej strane s koeficientami polynómu na pravej strane dostávame

$$-a - 4b + 3a = 1, \quad -b + 4a + 3b = 0 \text{ a z toho máme}$$

$$a = \frac{1}{10}, \quad b = -\frac{1}{5}.$$

Preto partikulárne riešenie je tvaru:

$$X(t) = \frac{1}{10} \sin t - \frac{1}{5} \cos t.$$

Všeobecné riešenie je teda tvaru

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t} + \frac{1}{10}(\sin t - 2 \cos t).$$

V špeciálnom prípade budú konštanty c_1, c_2 určené pomocou počiatkových podmienok, napríklad ak vieme hodnotu elektrického prúdu v čase $t = 0$ a ako sa mení. Všimnime si ale, že oba tieto členy c_1e^{-t} aj c_2e^{-3t} pre $t \rightarrow \infty$ konvergujú k nule a to pomerne rýchlo. Takže pre akékoľvek hodnoty počiatkových podmienok stacionárny stav (ustálený stav pre $t \rightarrow \infty$) je tvaru $\frac{1}{10}(\sin t - 2 \cos t)$. ♣

Cvičenia

V nasledujúcich príkladoch nájdite všeobecné riešenia diferenciálnych rovníc:

44. $y'' - y' - 2y = 0$.
45. $y'' + 25y = 0$.
46. $y'' - y' = 0$.
47. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
48. $y'' - 7y' + 6y = 0$.
49. $y'' + y' - 2y = 0$.
50. $y'' + y = 0$.
51. $y'' - 2y' - y = 0$.
52. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$.
53. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Nájdite také riešenia nasledujúcich diferenciálnych rovníc, ktoré vyhovujú podmienkam:

54. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
55. $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(\frac{\pi}{6}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}$
56. $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
57. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y(3\pi/4) = 3$
58. $y'' - 12y = 0$, $y = \frac{4}{e^2}$, pre $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $y = 4$ ak $x = 0$
59. $9\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$, $y(0) = -9$, $y'(0) = 12\frac{1}{2}$

Riešte diferenciálne rovnice s pravou stranou:

60. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.
61. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2} \cos 2x$.
62. $2y'' + y' - y = 2e^x$.
63. $y'' + a^2y = e^x$.
64. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.
65. $y'' + 4y' - 5y = 1$.

Pre diferenciálnu rovnicu

$$y'' - 4y' + 4y = f(x)$$

nájdite všeobecné riešenia, ak pravá strana $f(x)$ je tvaru:

66. $f(x) = e^{-x}$.
67. $f(x) = 3e^{2x}$.
68. $f(x) = 2(\sin 2x + x)$.
69. $f(x) = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$.

Pre diferenciálnu rovnicu

$$y'' + y = f(x)$$

nájdite všeobecné riešenia, ak pravá strana $f(x)$ je tvaru:

70. $f(x) = 2x^3 - x + 2$.
71. $f(x) = -8 \cos 3x$.
72. $f(x) = \cos x$.
73. $f(x) = \sin x - 2e^{-x}$.

74. Ihla istého nástroja opisuje oblúk Θ , ktorý vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 5\frac{d\Theta}{dt} + 6\Theta = 0.$$

Nájdite uhol Θ ako funkciu času t ak pre $t = 0$ bola jeho pozícia nulová, ale rýchlosť pohybu bola 2rad s^{-1} . Nájdite maximálny uhol vychýlenia ihly od nulovej pozície a načrtnite graf závislosti Θ od času t .

75. Teplota telesa y stupňov t minút potom ako bolo teleso premiestnené do istej miestnosti vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$6\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0.$$

Nájdite závislosť teploty y od času t , ak platí $y = 63$ pre $t = 0$ a $y = 36$ pre $t = 6\ln 4$. Určte, za koľko minút rýchlosť ochladzovania telesa klesne pod jeden stupeň za minútu. Svoju odpoveď zaokrúhlite na minúty. Akú teplotu bude mať v tom čase teleso?

76. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + 9y = 18,$$

pre ktoré y dosahuje maximum v bode $(\frac{\pi}{2}, 6)$. Nájdite minimálnu hodnotu y a hodnoty x , pre ktoré je $y = 0$.

77. Bod sa pohybuje priamočiario tak, že v čase t jeho posun od pevného bodu na tejto priamke je x a rovnica tohoto pohybu je

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4x.$$

Vieme, že $x = 3$ a $\frac{dx}{dt} = -6$ pre $t = \frac{\pi}{4}$. Nájdite:

- x v závislosti na t ,
- hodnoty x a $\frac{dx}{dt}$ pre $t = \frac{3\pi}{4}$
- najmenšiu kladnú hodnotu t pre ktorú je $x = 0$. Výsledok vypočítajte približne (viď 1. diel skript, kapitola 7)

V nasledujúcich cvičeniach nájdite všeobecné riešenia rovníc vyšších rádov.

78. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0.$

79. $y^{IV} + a^4y = 0.$

80. $y''' - 2y'' + y' = 0.$

81. $y''' = \frac{1}{x}.$

82. $y''' = \cos 2x.$

V nasledujúcich cvičeniach nájdite všeobecné riešenia diferenciálnych rovníc používajúc metódu variácie konštánt:

83. $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$

84. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$

85. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-x} + 1}.$

3.7 Systémy diferenciálnych rovníc

V tejto časti si veľmi stručne povieme o systémoch diferenciálnych rovníc. Obmedzíme sa len na rovnice prvého rádu a systémy rovníc tvaru:

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\&\dots\dots\dots \\y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}\tag{3.24}$$

kde y_1, y_2, \dots, y_n sú neznáme funkcie a f_1, f_2, \dots, f_n sú funkcie, ktoré popisujú vzťahy medzi neznámymi funkciami pre jednotlivé prvé derivácie.

Príkladom takéhoto systému môže byť systém dvoch diferenciálnych rovníc

Príklad 28.

$$y' = \frac{3y - 2z}{x}\tag{3.25}$$

$$z' = \frac{4y - 3z}{x}\tag{3.26}$$

Riešením systému diferenciálnych rovníc (3.24) na intervale J nazývame každú n -ticu funkcií y_1, y_2, \dots, y_n , diferencovateľných na intervale J , ktoré vyhovujú každej rovnici systému (3.24). Ak sú navyše dané začiatočné podmienky

$$y_1(x_0) = c_1, \quad y_2(x_0) = c_2, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = c_n,\tag{3.27}$$

potom hľadanie riešenia systému (3.24), ktoré vyhovuje začiatočným podmienkam (3.27) nazývame *Cauchyho úlohou* pre systém diferenciálnych rovníc.

Veta 3.16 (Peanova veta). *Nech sú funkcie f_1, f_2, \dots, f_n systému (3.24) spojité na množine $I = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle c_1 - b, c_1 + b \rangle \times \langle c_2 - b, c_2 + b \rangle \times \dots \times \langle c_n - b, c_n + b \rangle$, kde $a > 0$, $b > 0$, potom systém (3.24) má aspoň jedno riešenie $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, kde funkcie spĺňajú začiatočné podmienky (3.27). Funkcie tohoto systému riešenia sú spojitě diferencovateľné na intervale $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$, kde $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, pričom $M > 0$ je také, že platí: $|f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq M$, $k = 1, 2, \dots, n$, na množine I .*

Poznámka. Každéj diferenciálnej rovnici n -tého rádu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

možno priradiť systém diferenciálnych rovníc, kde $y = y_1$ a

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

.....

$$y_{n-1}' = y_n$$

$$y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

ktorý nazývame *normálnym systémom diferenciálnej rovnice n -tého rádu*.

Poznámka. Niekedy sa dá normálny diferenciálny systém (3.24) upraviť na jedinou diferenciálnu rovnicu n -tého rádu. Tento spôsob hľadania riešenia sa nazýva *eliminačná metóda*.

Príklad 29. Riešte daný systém diferenciálnych rovníc:

$$y' = z, \quad z' = y.$$

Riešenie: Systém budeme riešiť eliminačnou metódou. Zderivovaním druhej rovnice máme:

$$y' = z''.$$

Dosadíme do prvej rovnice a pre funkciu z dostávame:

$$z'' - z = 0.$$

Dostali sme lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu s konštantnými koeficientami bez pravej strany. Jej všeobecné riešenie je $z = c_1e^x + c_2e^{-x}$, pre $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$. Zderivovaním tohoto riešenia dostávame riešenie pre y :

$$y = c_1e^x - c_2e^{-x}.$$



Teraz si niečo povieme o špeciálnom type systému diferenciálnych rovníc – o lineárnych diferenciálnych rovnicích. *Lineárnym diferenciálnym systémom* nazývame systém diferenciálnych rovníc tvaru:

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y'_2 &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ &\dots \\ y'_n &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Funkcie $a_{ik}(x)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, definované na intervale J , nazývame *koeficientami* lineárneho diferenciálneho systému. Systém, kde $b_i(x) = 0$, pre všetky $x \in J$ a $i = 1, 2, \dots, n$ nazývame *homogénnym* diferenciálnym systémom:

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ y'_2 &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n \\ &\dots \\ y'_n &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{aligned} \tag{3.29}$$

Jedno jeho riešenie, a síce $y_i(x) = 0$ pre všetky $x \in J$, $i = 1, 2, \dots, n$, vždy existuje. Nazývame ho *triviálne riešenie*.

Z podkapitoly o lineárnych diferenciálnych rovnicích vyššieho rádu už vieme, čo je to fundamentálny systém riešení. Aj pre systém n lineárnych diferenciálnych rovníc definujeme takýto fundamentálny systém riešení ako n lineárne nezávislých riešení diferenciálneho systému (3.29) definovaných na intervale J . Platí:

Ak Y_1, Y_2, \dots, Y_n sú riešenia systému (3.29), potom aj ich lineárna kombinácia je riešením systému (3.29).

Nech $Y_1 = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}), \dots, Y_n = (y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn})$ sú riešenia lineárneho systému (3.29). Tieto riešenia sú lineárne nezávislé na intervale J , to jest tvoria fundamentálny systém riešení vtedy a len vtedy, keď aspoň v jednom bode $x \in J$ je

$$D(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Každé riešenie diferenciálneho systému (3.29) možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu jeho fundamentálneho systému.

Ak sú všetky koeficienty $a_{ik}(x), b_i(x)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ spojité funkcie na intervale $J = \langle \alpha, \beta \rangle$, potom pre Cauchyho úlohu (3.28), (3.27) existuje jediné riešenie – to jest n -tica funkcií definovaných na intervale J , ktoré spĺňa rovnice (3.28) a začiatočnú podmienku (3.27).

Nech U je riešením nehomogénneho systému (3.28). Potom n -tica Y je riešením diferenciálneho systému (3.28) práve vtedy, keď ju možno vyjadriť v tvare

$$Y = c_1 Y_1 + c + 2Y_2 + \dots + c_n Y_n + U,$$

kde c_1, c_2, \dots, c_n sú vhodné reálne čísla a Y_1, Y_2, \dots, Y_n je fundamentálny systém riešení prislúchajúceho homogénneho systému.

Teraz treba už len vyriešiť otázku, ako získame riešenie U , ak máme fundamentálny systém riešení. Odpoveď dáva znovu, (podobne ako u lineárnych diferenciálnych rovníc vyšších rádov) metóda variácie konštánt:

Nech Y_1, Y_2, \dots, Y_n je fundamentálny systém riešení homogénneho systému (3.29) prislúchajúci systému (3.28). Nech $D = D(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ a D_i je determinant, ktorý vznikne z determinantu D , ak v ňom i -ty stĺpec nahradíme stĺpcom $b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x)$. Potom n -tica $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, kde

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^n y_{jk} \int \frac{D_j}{D} dx, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

je riešením nehomogénneho diferenciálneho systému (3.28).

Otázka nájdenia fundamentálneho systému riešení je rovnakej obtiažnosti, ako u lineárnych diferenciálnych rovníc vyšších rádov. V našich ďalších úvahách sa preto obmedzíme len na také systémy, kde koeficienty a_{ik} , $i, k = 1, \dots, n$, sú len konštanty, nie funkcie premennej x . Takýmto systémom hovoríme *lineárne diferenciálne systémy s konštantnými koeficientami* (nehomogénne alebo homogénne). Sú tvaru:

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + b_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.30)$$

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.31)$$

Diferenciálny systém (3.31) má nenulové riešenie tvaru $Y = (\alpha_1 e^{r_1 x}, \alpha_2 e^{r_1 x}, \dots, \alpha_n e^{r_1 x})$, kde r_1 je koreňom charakteristickej rovnice systému:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

a n -tica $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ je riešením systému lineárnych algebraických rovníc:

$$\begin{aligned} (a_{11} - r_1)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - r_1)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \dots & \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - r_1)\alpha_n &= 0. \end{aligned}$$

Nech r_1, r_2, \dots, r_k sú navzájom rôzne korene charakteristickej rovnice diferenciálneho systému (3.31). Nech Y_1, Y_2, \dots, Y_k sú riešenia tohoto systému získané popísaným spôsobom. Potom tieto riešenia sú lineárne nezávislé.

Nech r_1 je k -násobným riešením charakteristickej rovnice diferenciálneho systému (3.31). Potom existujú polynómy $P_{mj}(x)$ stupňa najviac m , $m = 0, 1, \dots, k-1$, $j = 1, 2, \dots, n$, že n -tice

$$\begin{aligned} U_0 &= (P_{01}e^{r_1x}, P_{02}e^{r_1x}, \dots, P_{0n}e^{r_1x}), \\ U_1 &= (P_{11}e^{r_1x}, P_{12}e^{r_1x}, \dots, P_{1n}e^{r_1x}), \\ &\dots\dots\dots \\ U_{k-1} &= (P_{k-1,1}e^{r_1x}, P_{k-1,2}e^{r_1x}, \dots, P_{k-1,n}e^{r_1x}) \end{aligned}$$

sú lineárne nezávislými riešeniami diferenciálneho systému (3.31). Koefficienty polynómov určíme metódou neurčitých koeficientov po dosadení jednotlivých riešení U_i , $i = 0, 1, \dots, k-1$ do diferenciálneho systému (3.31).

Ak riešením diferenciálneho systému (3.31) je n -tica komplexných funkcií (koreň charakteristickej rovnice je komplexné číslo):

$$Z = (u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, \dots, u_n + iv_n),$$

kde u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sú reálne zložky a v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sú imaginárne zložky komplexných funkcií riešenia Z , potom n -tice

$$Re Z = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad Im Z = (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

sú tiež riešenia diferenciálneho systému (3.31).

Ak ku všetkým koreňom charakteristickej rovnice diferenciálneho systému (3.31) nájdeme týmto spôsobom všetky riešenia diferenciálneho systému vrátane násobnosti koreňov charakteristickej rovnice, potom dostaneme n riešení diferenciálneho systému (3.31), ktoré tvoria fundamentálny systém riešení systému (3.31).

Príklad 30. Riešme diferenciálny systém:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= -y_1, \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned}$$

Riešenie: Je to homogénny systém troch lineárnych diferenciálnych rovníc. Riešením bude trojica funkcií $(y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, ktoré budeme hľadať v tvare: $(\alpha_1 e^{rx}, \alpha_2 e^{rx}, \alpha_3 e^{rx})$. Vypočítame prvé derivácie takto zvolených riešení a dosadíme do rovníc systému. Máme:

$$\begin{aligned} \alpha_1 r e^{rx} &= 2\alpha_1 e^{rx} + \alpha_2 e^{rx} - 2\alpha_3 e^{rx} \\ \alpha_2 r e^{rx} &= -\alpha_1 e^{rx} \\ \alpha_3 r e^{rx} &= \alpha_1 e^{rx} + \alpha_2 e^{rx} - \alpha_3 e^{rx} \end{aligned}$$

Po úprave s prihliadnutím na fakt, že $e^{rx} \neq 0$ pre každé $x \in \mathcal{R}$, dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= (2-r)\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \\ 0 &= -\alpha_1 - r\alpha_2, \\ 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 - (1+r)\alpha_3. \end{aligned}$$

Toto je homogénny lineárny systém algebraických rovníc s neznámymi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ktorý má nenulové riešenie práve vtedy, keď (pozri 1. diel skrípt, kapitola 4.)

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & -2 \\ -1 & -r & 0 \\ 1 & 1 & -(1+r) \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0.$$

Toto je charakteristická rovnica zadaného systému diferenciálnych rovníc. Jej korene sú: $r_1 = 1, r_2 = i, r_3 = -i$. Pre $r_1 = 1$ vypočítame z diferenciálneho systému algebraických rovníc neznáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Dostávame: $\alpha_1 = u, \alpha_2 = -u, \alpha_3 = 0$, kde u je ľubovoľné číslo. Jedno riešenie diferenciálneho systému je preto (zvolíme $u = 1$):

$$Y_1 = (e^x, -e^x, 0).$$

Podobne vypočítame riešenie aj pre koreň $r_2 = i$. Máme $\alpha_1 = -iu, \alpha_2 = u, \alpha_3 = -iu$, kde u je ľubovoľné číslo. Pre $u = 1$ máme riešenie diferenciálneho systému

$$Z = (-ie^{ix}, e^{ix}, -ie^{ix}),$$

z ktorého môžeme dostať dve riešenia :

$$Y_2 = (\sin x, \cos x, \sin x),$$

$$Y_3 = (-\cos x, \sin x, -\cos x).$$

Riešenia Y_1, Y_2, Y_3 tvoria fundamentálny systém riešení nášho systému. Všeobecné riešenie tohoto systému môžeme zapísať v tvare:

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3,$$

z ktorého potom rozpisom po zložkách máme:

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 \sin x - c_3 \cos x,$$

$$y_2 = -c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x,$$

$$y_3 = c_2 \sin x - c_3 \cos x,$$

kde c_1, c_2, c_3 sú ľubovoľné reálne čísla. ♣

Príklad 31. Riešme nehomogénny diferenciálny systém:

$$y_1' = y_2 + x^2,$$

$$y_2' = y_1 + 2e^x.$$

Riešenie: Homogénny systém je tvaru:

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = y_1.$$

Riešenie hľadáme v tvare $Y = (\alpha_1 e^{rx}, \alpha_2 e^{rx})$, kde α_1, α_2 sú reálne čísla a r koreň charakteristickej rovnice tohoto systému. Po dosadení riešenia do rovníc systému a úprave máme:

$$0 = -r\alpha_1 + \alpha_2,$$

$$0 = \alpha_1 - r\alpha_2.$$

Tento systém algebraických rovníc s neznámymi α_1, α_2 má nenulové riešenie, len keď jeho determinant je nulový, teda:

$$r^2 - 1 = 0.$$

Jeho riešením sú dva reálne korene $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. Pre každý z nich vypočítame neznáme α_1, α_2 z vyššie uvedeného algebraického systému. Máme:

Pre $r_1 = 1$ je $\alpha_1 = u, \alpha_2 = u$, kde $u \in \mathcal{R}$. Pre $r_2 = -1$ je $\alpha_1 = u, \alpha_2 = -u$, kde $u \in \mathcal{R}$. Fundamentálny systém rovníc preto tvoria riešenia: (zvolíme $u = 1$)

$$Y_1 = (e^x, e^x), \quad Y_2 = (-e^{-x}, e^{-x}).$$

Nájďme partikulárne riešenie nehomogénneho systému. Máme

$$D = \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} x^2 & -e^{-x} \\ 2e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} e^x & x^2 \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix}.$$

Potom

$$u_1 = e^x \int \frac{x^2 e^{-x} + 2}{2} dx - e^{-x} \int \frac{2(e^x)^2 - x^2 e^x}{2} dx,$$

$$u_2 = e^x \int \frac{x^2 e^{-x} + 2}{2} dx + e^{-x} \int \frac{2(e^x)^2 - x^2 e^x}{2} dx.$$

Z toho teda je

$$U = \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) e^x - 2x, \left(x + \frac{1}{2} \right) e^x - x^2 - 2 \right).$$

Všeobecné riešenie nehomogénneho systému je teda tvaru:

$$y_1 = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + \left(x - \frac{1}{2} \right) e^x - 2x,$$

$$y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \left(x + \frac{1}{2} \right) e^x - x^2 - 2,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$. ♣

Cvičenia

86. Riešte homogénne diferenciálne systémy:

$$\text{a) } \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = 8y_1 - y_2, \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2, \\ y_2' = -3y_1 + y_2. \end{cases}$$

87. Riešte nehomogénne diferenciálne systémy:

$$\text{a) } \begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 - 6y_2 + e^{2x}, \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 16xe^x. \end{cases}$$

3.8 Numerické metódy riešenia začiatočných úloh

3.8.1 Úvod

Z predchádzajúcich kapitol už máme predstavu, že je len veľmi málo diferenciálnych rovníc, ktorých exaktné riešenie vieme nájsť. Preto pri hľadaní riešenia začiatočných úloh je často jedinou možnosťou

nájsť *numerické riešenie*. V našich úvahách sa obmedzíme na hľadanie približného riešenia počiatkovej úlohy pre diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Túto úlohu môžeme vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.32)$$

Všetky úvahy a výsledky sa však dajú rozšíriť aj pre systémy diferenciálnych rovníc.

Základom, z ktorého vychádza väčšina numerických metód riešenia začiatkových úloh je *diskretizácia premenných*. Znamená to, že približné riešenie sa nekonštruuje ako spojitá funkcia, ale postupne sa pre množinu navzájom rôznych bodov x_0 , (bod, v ktorom je daná začiatková podmienka), x_1, x_2, \dots hľadajú čísla y_0 (hodnota začiatkovej podmienky), y_1, y_2, \dots , ktoré aproximujú hodnoty $y(x_0), y(x_1), \dots$ presného riešenia v bodoch siete x_0, x_1, \dots . Body siete – *uzly* nemusia byť *ekvidistantné* to jest vzdialenosť medzi nimi, tzv. *krok metódy* $h_n = x_{n+1} - x_n$ môže závisieť na n . Pritom aproximácia y_n presného riešenia $y(x_n)$ v bode x_n sa počíta z hodnôt približného riešenia v už vypočítaných uzloch. Týmto metódam hovoríme *metódy diskkrétnej premennej* alebo *diferenčné metódy*.

Metóda, ktorá k tomuto riešeniu používa rekurentný vzťah, v ktorom je y_{n+1} vyjadrená pomocou k hodnôt $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n+1-k}$ sa nazýva *k-kroková metóda*. Ak je $k = 1$, hovoríme o *jednokrokovej metóde*. Vzhľadom na cieľ a rozsah týchto skrípt sa v ďalšom obmedzíme len na stručný výklad dvoch najbežnejších typov jednokrokových metód.

3.8.2 Eulerova metóda

Je najjednoduchšou metódou na hľadanie približného riešenia Cauchyho úlohy typu (3.32). Postupne od danej začiatkovej dvojice hodnôt x_0, y_0 , ktoré určujú začiatkovú podmienku úlohy, budeme určovať hodnoty

$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ takto: Zvolíme počiatkový krok h_0 a hodnota x_1 bude potom $x_1 = x_0 + h_0$. Teraz stačí vypočítať hodnotu y_1 . Najskôr nájdeme pre hľadanú funkciu $y(x)$ Taylorov polynóm prvého stupňa v bode x_0 (Taylorov polynóm – viď skriptá 1. diel, časť 7.7). Keďže predpokladáme, že nami zvolený krok h_0 je malý, máme

$$y(x_1) \approx y(x_0) + h_0 y'(x_0).$$

V tejto aproximácii teraz nahradíme hodnotu $y'(x_0)$ hodnotou $f(x_0, y_0)$ z pôvodnej rovnice (3.32). Dostávame:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + h_0 f(x_0, y_0).$$

Na základe tejto úvahy vypočítame teraz y_1 takto:

$$y_1 = y_0 + h_0 f(x_0, y_0).$$

Z vyššie uvedeného vyplýva, že hodnota y_1 bude aproximovať presnú hodnotu $y(x_1)$. Tento postup teraz môžeme zopakovať pre x_2, y_2 atď. Rekurentne dostávame: Ak máme vypočítané hodnoty x_n, y_n pre nejaké n , zvolíme h_n a potom

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n). \quad (3.33)$$

Pre ekvidistantný krok h to jest $h = h_0 = h_1, \dots, h_n, \dots$ dostávame schému

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n). \quad (3.34)$$

Bude nás zaujímať, s akou presnosťou sme vypočítali hodnoty neznámej funkcie $y(x)$ v bodoch x_1, \dots, x_n , teda aký je rozdiel $y(x_n) - y_n$? (Podrobnejšie o pojmoch chyba metódy, chyby zaokrúhľovacie, aproximácia a konvergencia metódy, rád rýchlosti konvergencie metódy viď 1. diel skrípt, časti

1.4 a 7.14.) Označme teraz d_n lokálnu diskretizačnú chybu to jest chybu, ktorej sa dopustíme v jednom kroku výpočtu Eulerovej metódy, to jest chybu, s akou hodnoty presného riešenia spĺňajú rekurentný vzťah:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h_n f(x_n, y_n) + d_n.$$

Meradlom, ako presne aproximuje postupnosť hodnôt y_1, y_2, \dots, y_n presné riešenie danej začiatočnej úlohy, je globálna diskretizačná chyba. Označíme ju $e_n = y(x_n) - y_n$.

V stručnosti povieme, že rád metódy je najväčšie prirodzené číslo p také, že pre danú metódu aplikovanú na ľubovoľnú začiatočnú úlohu s dostatočne hladkým riešením (riešenie je spojitá funkcia, ktorá má aj spojitú deriváciu prvého a prípadne vyšších rádo) platí pre ľubovoľné n a $h_n \rightarrow 0$ odhad

$$d_n = O(h_n^{p+1}).$$

(Označenie $a = O(h)$ znamená, že existuje také číslo $C > 0$, že $a \leq Ch$.) Rád Eulerovej metódy odvodíme opäť veľmi ľahko použitím Taylorovho radu a jeho zvyšku. Máme

$$d_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h_n y'(x_n),$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) - h_n y'(x_n) + \frac{1}{2} h_n^2 y''(\psi), \quad \text{pre } \psi \in (x_n, x_{n+1}).$$

Preto

$$d_n = \frac{1}{2} h_n^2 y''(\psi).$$

Ak je y'' ohraničená, potom

$$d_n = O(h_n^2)$$

a teda Eulerova metóda je prvého rádu. Riešenie musí byť ale dostatočne hladká funkcia, inak sa rád metódy zníži. Odvodíme teraz globálnu chybu Eulerovej metódy pre prípad ekvidistantného kroku, to jest $h := h_0 = h_1 = \dots = h_n \dots$. Odčítame rovnice algoritmu Eulerovej metódy a lokálnej chyby:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f(x_n, y_n), \\ y(x_{n+1}) &= y(x_n) + h f(x_n, y_n) + d_n. \end{aligned}$$

Máme

$$e_{n+1} = e_n + h (f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)) + d_n.$$

Ku globálnej chybe sa tak v každom kroku pripočíta lokálna diskretizačná chyba, a preto sa v globálnej chybe e_{n+1} prejaví nepresnosť minulých diskretizačných krokov. V prípade, že funkcia f je len funkciou premennej x a teda nezávisí na $y(x)$, ihneď dostávame

$$e_N = \sum_{n=0}^{N-1} d_n.$$

Keďže už z vyššie uvedeného vieme, že lokálna chyba je typu $O(h^2)$ a $x_N - x_0 = Nh$, teda $N = \frac{x_N - x_0}{h}$, dostávame

$$e_N = O(h),$$

čiže globálna diskretizačná chyba je menšia ako Ch pre nejaké reálne číslo $C > 0$.

Nakoniec si ešte stručne povieme niečo o vplyve zaokrúhľovacích chýb (podrobnejšie viď 1. diel, kapitola 1.3, 1.4).

Nech ε je maximálna zaokrúhľovacia chyba v jednom kroku Eulerovej metódy. Označili sme y_n skutočné približné riešenie a teraz označme \bar{y}_n približné riešenie, ktoré skutočne vypočítame a ktoré sa od riešenia y_n líši vplyvom zaokrúhľovacích chýb. Takéto riešenie potom spĺňa pre ekvidistantný krok rovnicu

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + hf(x_n, \bar{y}_n) + \varepsilon, \quad n = 0, 1, \dots$$

Celková chyba vzniknutá zaokrúhľovaním bude teda $N\varepsilon$, kde N je posledný krok, ktorý sme vypočítali. Z veľkosti N ktorú sme odvodili vyššie, vidíme že celková zaokrúhľovacia chyba bude $\frac{\varepsilon(x_N - x_0)}{h}$. Preto celková chyba výpočtu v bode x_N bude súčtom globálnej diskretizačnej chyby (chyby metódy) a globálnej zaokrúhľovacej chyby:

$$|y(x_N) - \bar{y}_N| \approx Ch + \frac{\varepsilon(x_N - x_0)}{h} := g(h).$$

Funkcia g bude minimálna pre $h = \left(\frac{\varepsilon(x_N - x_0)}{C}\right)^{\frac{1}{2}}$. Teda chyba bude minimálna pre isté h_{opt} . Ďalším zmenšovaním h nám budú narastať zaokrúhľovacie chyby (kroky budú menšie, a preto ich bude viac). Ak zvolíme h väčšie ako je h_{opt} bude zas prevládať chyba diskretizačná. Tento jav je typický aj pre iné diferenčné metódy.

Poznámka. Na princípe aproximácie funkcie Taylorovým polynómom sú založené aj iné metódy. Voláme ich *metódy Taylorovho typu*. Tieto môžu byť aj vyšších rádov ako je Eulerova metóda, na druhej strane zas treba počítať aj derivácie danej funkcie. Tieto metódy sú preto presnejšie, ako je Eulerova, ale sú aj omnoho prácnejšie.

Príklad 32. Máme Cauchyho úlohu

$$y' = -x + 2, \quad y(1) = 0.$$

Riešme túto úlohu na intervale $\langle 1, 2 \rangle$ s krokom $h = 0,25$. Vypočítané hodnoty porovnajme s hodnotami analytického riešenia.

Riešenie: Táto úloha má práve jedno riešenie, ktoré môžeme nájsť hneď priamou integráciou rovnice a dosadením začiatkovej podmienky. Dostávame:

$$y(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}.$$

Teraz vypočítame približné riešenie pomocou Eulerovej metódy. Keďže $h = 0,25$, a $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, riešenie budeme hľadať v bodoch

$$x_1 = 1,25; \quad x_2 = 1,5; \quad x_3 = 1,75; \quad x_4 = 2.$$

Podľa vzorca (3.34) máme

$$y_{i+1} = y_i + 0,25(-x_i + 2), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky:

i	x_i	$y(x_i)$	y_i
0	1,000	0,000	0,000
1	1,250	0,218	0,250
2	1,500	0,375	0,438
3	1,750	0,468	0,562
4	2,000	0,500	0,625

3.8.3 Metódy typu Runge-Kutta

Tieto metódy sú veľmi univerzálne a v technickej praxi užitočné. Tiež sú v podstate založené na Taylorovom rozvoji funkcie, ale nepriamo tak, aby sme nemuseli určovať hodnoty derivácií funkcie – tieto sa aproximujú výpočtom samotnej funkcie vo vhodne zvolených strategických bodoch. Ich všeobecná schéma je tvaru

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^r \alpha_i k_i, \quad n = 0, 1, \dots,$$

kde

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_i = f(x_n + \lambda_i h_n, y_n + \mu_i h_n k_{i-1}), \quad i = 1, \dots, r$$

a $\alpha_i, \lambda_i, \mu_i$ sú vhodne vybrané konštanty. V stručnosti si uvedieme len najznámejšie metódy. Rád konvergenzie ani veľkosť chyby odvádzať nebudeme.

Metódy 2. rádu

- $r = 2, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda_2 = \mu_2 = \frac{1}{2}$
Dostávame $k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} k_1),$
 $y_{n+1} = y_n + h_n k_2.$ (Modifikovaná Eulerova metóda).
- $r = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \mu_2 = 1.$
Dostávame $k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_{n+1}, y_n + h_n k_1)$
 $y_{n+1} = y_n + h_n \frac{k_1 + k_2}{2},$
(Heunova metóda).

Metódy 4. rádu

Uvedieme aspoň najpoužívanejšiu z nich:

$$\begin{aligned} r = 4, \quad k_1 &= f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} k_1), \\ k_3 &= f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} k_2), \quad k_4 = f(x_{n+1}, y_n + h_n k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h_n \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \end{aligned}$$

Príklad 33. Máme Cauchyho úlohu ako v predchádzajúcom príklade. Riešme túto úlohu na intervale $\langle 1, 2 \rangle$ s krokom $h = 0,25$ modifikovanou Eulerovou metódou. Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky.

Riešenie: Riešenie budeme opäť hľadať v bodoch

$$x_1 = 1,25; \quad x_2 = 1,5; \quad x_3 = 1,75; \quad x_4 = 2.$$

Pre modifikovanú Eulerovu metódu v tomto prípade, keďže pravá strana nezávisí od y , nebudeme potrebovať určovať k_1 . Máme

$$\begin{aligned} x_1 = 1,25, \quad k_2 &= -1,0 - \frac{0,25}{2} + 2 = 0,875, \quad y_1 = 0 + 0,25 \cdot 0,875 = 0,21875 \\ x_2 = 1,50, \quad k_2 &= -1,25 - \frac{0,25}{2} + 2,0 = 0,625, \\ y_2 &= 0,21875 + 0,25 \cdot 0,625 = 0,375 \\ x_3 = 1,75, \quad k_2 &= -1,5 - \frac{0,25}{2} + 2 = 0,375, \quad y_3 = 0,375 + 0,25 \cdot 0,375 = 0,46875 \end{aligned}$$

$$x_4 = 2,00, k_2 = -1,75 - \frac{0,25}{2} + 2 = 0,125, y_1 = 0,46875 + 0,25 \cdot 0,125 = 0,5$$

Teda

i	x_i	$y(x_i)$	$y_i - \text{mod. Euler}$
0	1,000	0,000	0,000
1	1,250	0,218	0,219
2	1,500	0,375	0,375
3	1,750	0,468	0,469
4	2,000	0,500	0,500

Príklad 34. Určme riešenie diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou:

$$y' = y^2, \quad y(0) = -4,$$

Eulerovou metódou, modifikovanou Eulerovou metódou, Heunovou metódou a Runge-Kuttovou metódou 4. rádu na intervale $\langle 0,1 \rangle$ s krokom $h = 0,1$. Hodnoty približných riešení porovnajme s analytickým riešením.

Riešenie: Z vlastnosti pravej strany vieme, že existuje práve jedno riešenie tejto Cauchyho úlohy. Toto riešenie je tvaru

$$y = -\frac{1}{x + 0,25}$$

a dostaneme ho použitím metódy separácie premenných.

Keďže krok metódy je ekvidistantný $h = 0,1$, riešenie hľadáme v bodoch

$$x_i = 0,1 \cdot i, \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$

Pre hodnoty y_i , $i = 1, 2, \dots, 10$ dostávame pre jednotlivé schémy vzhľadom na pevný krok a tvar pravej strany vzorce:

Eulerova metóda:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, 10;$$

modifikovaná Eulerova metóda:

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i + 0,5hy_i^2)^2, \quad i = 1, 2, \dots, 10;$$

Heunova metóda:

$$y_{i+1} = y_i + 0,5h(y_i^2 + (y_i + hy_i^2)^2), \quad i = 1, 2, \dots, 10;$$

metóda Runge-Kutta 4. rádu:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

kde

$$k_1 = y_i^2, \quad k_2 = \left(y_i + \frac{h}{2}k_1\right)^2,$$

$$k_3 = \left(y_i + \frac{h}{2}k_2\right)^2, \quad k_4 = (y_i + hk_3)^2, \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky:

i	x_i	$y(x_i)$	y_i - Euler	y_i - mod. Euler	y_i - Heun	y_i - R-K
0	0,000	-4,00000	-4,000	-4,000	-4,000	-4,000
1	0,100	-2,85714	-2,400	-2,976	-2,912	-2,85734
2	0,200	-2,22222	-1,824	-2,3343	-2,275	-2,2224
3	0,300	-1,81818	-1,149	-1,90918	-1,86179	-1,81832
4	0,400	-1,53846	-1,2689	-1,61095	-1,57369	-1,53857
5	0,500	-1,33333	-1,10789	-1,39156	-1,36195	-1,33342
6	0,600	-1,17647	-0,98515	-1,22392	-1,2	-1,17654
7	0,700	-1,05263	-0,88809	-1,0919	-1,07224	-1,05269
8	0,800	-0,95238	-0,80923	-0,98534	-0,96894	-0,95243
9	0,900	-0,86956	-0,74374	-0,89758	-0,88371	-0,8696
10	1,000	-0,8	-0,68843	-0,82408	-0,81221	-0,80003

Cvičenia

88. Vypočítajte približné riešenie Cauchyho úlohy

$$y' = \frac{y^2 + 1}{xy}, \quad y(1) = 2,$$

ak jeho presné riešenie je funkcia $y(x) = \sqrt{5x^2 - 1}$. Použite všetky vyššie uvedené približné metódy a výsledky porovnajte.

Výsledky cvičení

1. a) áno, b) áno, c) áno, d) áno, e) áno.
2. a) áno, b) áno, c) nie, d) áno, e) nie, f) áno.
3. a) $y' = -\frac{y}{x}$, b) $y' + \frac{y}{x} = 2$, c) $y'' = 0$, d) $y' - y = 0$.
4. $mv' = -kv^2$, kde m je hmotnosť, v je rýchlosť a k je konštanta úmernosti.
5. $y = x^2$.
6. $\frac{2\sqrt{h}}{k}$, kde k je konštanta úmernosti.
7. a) rovnobežky s osou y , b) $y = -\frac{x}{c}, c \in \mathcal{R} - \{1\}$, c) $y = cx$,
d) $y = \frac{c-2}{c}x, c \neq 0$,
e) kružnice so stredom v počiatku, f) $y = \cos x - c, c \in \mathcal{R}$.
8. $y = -\ln_{10}(c - 10^x), c \in \mathcal{R}$
9. $y = (3x - 3x^2 + 3c)^{\frac{1}{3}}, c \in \mathcal{R}$
10. $y = \frac{c-x}{1+cx}$
11. $y = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{1-x^2}\right)^2}$
12. $x^2(1+y^2) = c, c \in \mathcal{R}$
13. $y = -\ln(1 - ce^x), 1 - ce^x > 0$

14. $y = -\ln(c - e^x)$, $c - e^x > 0$
15. $y = ce^{-x^2}$, $c \in \mathcal{R}$
16. $y = \frac{2-ce^x}{1-ce^x}$, $1 - ce^x \neq 0$
17. $y = \sqrt{\ln(c(1+e^x))^2}$, $c \in \mathcal{R}$
18. $y = ce^{\frac{1}{x}}$, $c \in \mathcal{R}$
19. $y = \sin x + \frac{\cos x - 1}{1+x}$
20. $2(x^3 - y^3) + 3(x^2 - y^2) + 5 = 0$
21. $y = \arcsin(\frac{1}{2} \sin x)$
22. $y = \ln(e - 1 + e^x)$
23. $y = \frac{c}{\cos x}$, $c \in \mathcal{R}$
24. $y = ce^{-x \cos x}$, $c \in \mathcal{R}$
25. $y = ce^{\frac{1}{x}}$, $c \in \mathcal{R}$
26. $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + ce^{-3x}$, $c \in \mathcal{R}$
27. $y = \frac{c - \ln|x|}{x}$, $c \in \mathcal{R}$
28. $y = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$, $c \in \mathcal{R}$
29. $y = \frac{c}{x+1} + \frac{\sin x}{x+1} - \cos x$, $c \in \mathcal{R}$
30. $y = ce^{-\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} x - 1$, $c \in \mathcal{R}$
31. $y = 1 + c \cos^2 x$, $c \in \mathcal{R}$
32. $y = -\ln x + c(\ln x)^2$, $c \in \mathcal{R}$
33. $y = e^{x^2} + ce^{\frac{x^2}{2}}$, $c \in \mathcal{R}$
34. $y = \sqrt{1-x^2} \left(\frac{\arcsin x}{2} - \sqrt{1-x^2} + c \right)$, $c \in \mathcal{R}$
35. $y = x(\sin x + c)$, $c \in \mathcal{R}$
36. $y = (\frac{x^2}{2} + c)e^{-x^2}$, $c \in \mathcal{R}$
37. $y = 1$
38. $y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^{-x})$
39. $y = \frac{a(x-1)}{x^n}$
40. $y = \frac{x}{2 \sin x} - \frac{\cos x}{2} + (1 - \frac{\pi}{4}) \frac{1}{\sin x}$
41. $y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$
42. $y = \frac{x^2 \ln x}{2}$
43. $y = -\cos x$
44. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
45. $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
46. $y = c_1 + c_2 e^x$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
47. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
48. $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^x$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
49. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
50. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
51. $y = c_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
52. $x = c_1 e^{\frac{5}{2}t} + c_2 t e^{\frac{5}{2}t}$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
53. $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$, $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
54. $y = x e^{5x}$
55. $y = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x$
56. $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} e^{-3x}$
57. $y = 4 \cos 2x - 3 \sin 2x$
58. $y = 4e^{-2\sqrt{3}x}$
59. $y = -9 \cos \frac{4}{3}x + 9\frac{3}{8} \sin \frac{4}{3}x$

60. $y = \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74} + c_1 e^{6x} + c_2 e^x, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
61. $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - \frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
62. $y = e^x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}}, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
63. $y = \frac{e^x}{a^2 + 1} + c_1 \cos ax + c_2 \sin ax, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
64. $y = e^{3x}(c_1 + c_2 x) + \frac{2}{9} x^2 + \frac{5}{27} x + \frac{11}{27}, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
65. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
66. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{e^{-x}}{9}, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
67. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{3}{2} x^2 e^{2x}, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
68. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
69. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + 2x^2 + 4x + 3 + 4x^2 e^{2x} + \cos 2x, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
70. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2x^3 - 13x + 2, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
71. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos 3x, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
72. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{5} x \sin x, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
73. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x - e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
74. $\theta(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-3t}, \theta_{\max} = \theta(\ln \frac{3}{2}) = \frac{8}{27}$
75. $y(t) = 27 + 36e^{-\frac{t}{6}}$, rýchlosť ochladzovania klesne pod 1 stupeň asi za 11 minút, teleso bude mať teplotu 33 stupňov
76. $y(x) = 2 - 4 \sin 3x, y_{\min} = -2, y = 0$ pre $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3} k\pi$ alebo $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3} k\pi, k$ je celé.
77. a) $x(t) = 3 \cos 2t + 3 \sin 2t,$
 b) $x(\frac{3\pi}{4}) = -3, x'(\frac{3\pi}{4}) = 6,$
 c) $t \approx 1.178$
78. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{R}$
79. $y = e^{a\frac{\sqrt{2}}{2}}(c_1 \cos a\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 \sin a\frac{\sqrt{2}}{2}) + e^{-a\frac{\sqrt{2}}{2}}(c_1 \cos a\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 \sin a\frac{\sqrt{2}}{2})$
 $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{R}$
80. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x, c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{R}$
81. $y = x^2 \ln \sqrt{x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{R}$
82. $y = -\frac{1}{8} \sin 2x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{R}$
83. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (e^x - e^{-x}) \ln |e^x - 1| - x e^x + e^{-x} - 1, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
84. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x \ln |x|, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
85. $y = e^{-x}(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2}) - 1, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
86. a) $y_1(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x},$
 $y_2 = 2c_1 e^{3x} - 4c_2 e^{-3x}, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
 b) $y_1(x) = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x),$
 $y_2(x) = e^x(-c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x), c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
87. a) $y_1(x) = -\frac{e^x}{36} - \frac{11}{54} e^{2x} + c_1 e^{-7x} + c_2 e^{4x},$
 $y_2(x) = -\frac{11}{36} e^x - \frac{8}{27} e^{2x} - c_1 e^{-7x} + 2c_2 e^{4x}, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$
 b) $y_1(x) = c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-3x} - e^x(8x + 6),$
 $y_2(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - e^x(12x + 13), c_1, c_2 \in \mathcal{R}$

Literatúra

- [1] ARNOLD
- [2] R. ČERNÁ, M. MACHLICKÝ, J. VOGEL, Č. ZLATNÍK Základy numerické matematiky a programování *SNTL Praha*, 1987
- [3] P. DANKO, A. POPOV, T. KOŽEVNIKOVA Vysšaja matematika v upražneniach i zadačach. *Izd. Vysšaja škola, Moskva*, 1974
- [4] J. ELIAŠ, J. HORVÁTH, J. KAJAN Zbierka úloh z vyššej matematiky *Alfa, vydavat. technickej a ekon. literatúry 5. vydanie, Bratislava* 1979
- [5] J. IVAN Matematika I, *Alfa Bratislava* 1983
- [6] L.D. KUDRJAVCEV, Kurs matematičeskogo analiza I, *Izdatelstvo Vysšaja škola, Moskva* 1981
- [7] S. MÍKA, Numerické metódy algebry, *SNTL Praha* 1985
- [8] K.MIKULA,
- [9] M. PERKINS, P.PERKINS Advanced Mathematics II, *Collins Educational Hammersmith London W6 8JB* 1992
- [10] F. SCHEID, Theory and problems of numerical analysis, *Schaum's outline series* 1988

Kapitola 4

Diferenciálny počet funkcií viac premenných

4.1 Funkcie dvoch a viac premenných

4.1.1 Základné pojmy

Nech \mathcal{R}^2 označuje množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel. Intuitívne, pod *funkciou dvoch premenných* rozumieme priradenie f , ktoré každej dvojici reálnych čísel (x, y) z istej podmnožiny $M \subset \mathcal{R}^2$ priradí reálne číslo $f(x, y)$. Najväčšia (vzhľadom na inklúziu) podmnožina $D \subset \mathcal{R}^2$, pre ktorú je priradenie $(x, y) \mapsto f(x, y)$ korektne matematicky definované, sa nazýva *obor definície* funkcie f .¹ V prípade funkcií dvoch premenných je prirodzené znázorňovať obory definície v rovine, a to v pravouhlej súradnicovej sústave s osami o_x, o_y .

Príklad 1. Nájdite a znázornite definičný obor funkcie

$$f(x, y) = \frac{x \ln y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} .$$

Riešenie: Uvedený výraz má zmysel len pre tie dvojice (x, y) , pre ktoré je $y > 0$ (pretože funkcia \ln je definovaná len pre kladné čísla) a $4 - x^2 - y^2 > 0$ (pretože druhá odmocnina je definovaná len pre nezáporné čísla a navyše sa vyskytuje v menovateli). Definičný obor funkcie f je teda množina

$$D = \{(x, y); x^2 + y^2 < 4, y > 0\} .$$

V rovine xy množine D zodpovedá vnútrajšok polkruhu nad osou x so stredom v počiatku a s polomerom 2; pozri Obr. 1. ♣

Príklad 2. Nájdite obor definície funkcie $g(x, y) = xy - \sqrt{x^4 - 16y^4}$ a ukážte, že pre každé reálne číslo t platí identita $g(tx, ty) = t^2g(x, y)$.

Riešenie: Daná funkcia je definovaná pre všetky dvojice (x, y) také, že $x^4 \geq 16y^4$ (pretože druhá odmocnina je definovaná len pre nezáporné čísla). Uvedená nerovnosť je po dvojnásobnom odmocnení ekvivalentná s nerovnosťou $|x| \geq 2|y|$, a preto definičný obor D funkcie g je

$$D = \{(x, y); |x| \geq 2|y|\} .$$

¹Definičný obor funkcie môže byť určený aj explicitne na nejakom zúžení spomínanej množiny.

Obr. 4.1: D(f)

V rovine xy je táto množina znázornená dvoma „výsekmí“ ohraničenými priamkami $y = x/2$ a $y = -x/2$ tak, ako to vidíme na Obr. 2.

Pre dôkaz uvedenej identity stačí do vzorčeka pre $g(x, y)$ dosadiť tx namiesto x , ty namiesto y , a počítať:

$$g(tx, ty) = (tx)(ty) - \sqrt{(tx)^4 - 16(ty)^4} = t^2(xy - \sqrt{x^4 - 16y^4}) = t^2g(x, y) .$$



Obr. 4.2: D(g)

Množina bodov (x, y) v rovine, v ktorých má funkcia $f(x, y)$ konštantnú hodnotu $f(x, y) = c$ pre niektoré reálne číslo c , tvorí krivku nazývanú *vrstevnica* funkcie f prislúchajúca výške c .

Príklad 3. V rovine xy znázorníme vrstevnice funkcie $h(x, y) = 4 - 4x^2 - y^2$ prislúchajúce výškam 1, 2, a 3.

Riešenie: Pre ľubovoľné c je vrstevnica funkcie h určená rovnicou $4 - 4x^2 - y^2 = c$, čiže $4x^2 + y^2 = 4 - c$. Z tohoto vidieť, že netriviálne riešenie dostávame len v prípade, keď $c < 4$ (prečo?). Vydelením

poslednej rovnice kladným číslom $4 - c$ dostávame

$$\frac{4}{4-c}x^2 + \frac{1}{4-c}y^2 = 1,$$

a toto je rovnica elipsy so stredom v bode $[0, 0]$ a s poloosami $a = \frac{1}{2}\sqrt{4-c}$, $b = \sqrt{4-c}$. Hľadané vrstevnice sú teda elipsy; postupným dosadením hodnôt $c = 1, 2, 3$ pre ich poloosi máme:

$$\text{pre } c = 1: \quad a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad b_1 = \sqrt{3},$$

$$\text{pre } c = 2: \quad a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad b_2 = \sqrt{2},$$

$$\text{pre } c = 3: \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = 1;$$

Pre znázornenie týchto vrstevníc pozri Obr. 3. ♣

Obr. 4.3: Vrstevnice

Podobné úlohy sa vyskytujú aj pre funkcie *troch premenných* $f(x, y, z)$, resp. všeobecnejšie pre funkcie *n premenných* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Definičné obory funkcií troch premenných je už ťažšie znázorňovať; robíme to pomocou projekcie trojrozmerného priestoru so súradnicami x, y, z do roviny. Pre dané c množina bodov (x, y, z) spĺňajúca rovnosť $f(x, y, z) = c$ tentoraz bude (až na degenerované prípady) plocha v priestore, ktorú nazývame *vrstvou plochou* prislúchajúcou konštante c . Pri funkciách $n \geq 4$ premenných definičné obory neznázorňujeme a o príslušných „viacrozmerných vrstvom plochách“ nebudeme v týchto skriptách hovoriť.

Príklad 4. Určte obor definície funkcie $k(x, y, z) = \ln(9 - x^2 - y^2 - z^2)$ a opíšte vrstvom plochu zodpovedajúcu konštante $c = \ln 5$.

Riešenie: Keďže prirodzený logaritmus je definovaný len pre kladné čísla, daná funkcia je definovaná len pre tie trojice reálnych čísiel (x, y, z) , pre ktoré je $9 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$. Definičný obor D funkcie $k(x, y, z)$ je teda množina

$$D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < 9\}.$$

V trojrozmernom priestore množine D zodpovedá vnútrajšok gule so stredom v počiatku a polomerom $\sqrt{9} = 3$. Vrstvová plocha prislúchajúca konštante $c = \ln 5$ má rovnicu $k(x, y, z) = c$, teda $\ln(9 - x^2 - y^2 - z^2) = \ln 5$, odkiaľ po úprave máme $9 - x^2 - y^2 - z^2 = 5$ a napokon $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, čo je sféra (guľová plocha) so stredom v počiatku a polomerom 2. ♣

Na ukážku uvádzame časti grafov (t.j. plôch) určených rovnicou $z = f(x, y)$ pre niektoré funkcie f (pozri obrázky 4.4 až 4.9); na generovanie obrázkov bol použitý program *Mathematica*.

Obr. 4.4: $z = 4x^2 + y^2$

Obr. 4.5: $z = xy$

4.1.2 Limita funkcie dvoch a viac premenných

Pojem limity funkcie dvoch premenných je omnoho komplikovanejší v porovnaní s pojmom limity funkcie jednej premennej. Intuitívne, ak hodnoty funkcie $f(x, y)$ ležia „dostatočne blízko“ čísla L pre všetky body (x, y) „blízke“ ale nie rovné bodu (x_0, y_0) , tak hovoríme, že L je limitou funkcie f v bode (x_0, y_0) . Pre matematicky presnú definíciu potrebujeme zaviesť dva pojmy. Pripomeňme najprv, že pri funkciách jednej premennej sme pod (jednorozmerným) okolím bodu b (pričom b je buď reálne číslo alebo jeden zo symbolov $+\infty$, $-\infty$) rozumeli ľubovoľný otvorený interval obsahujúci b , resp. ľubovoľný interval tvaru $(a, +\infty)$ alebo $(-\infty, a)$ ak $b = \pm\infty$. V dvojrozmernom prípade, ak hovoríme o bode

Obr. 4.6: $z = e^{-(x^2+y^2)}$

Obr. 4.7: $z = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$

Obr. 4.8: $z = e^{-(x^2+y^2)} \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$

Obr. 4.9: $z = e^{-y} \sin x$

(x_0, y_0) , máme vždy na mysli, že obe súradnice x_0 a y_0 sú reálne čísla. A teraz k ohláseným novým pojmom: Pre ľubovoľné číslo $\delta > 0$ pod δ -okolím bodu (x_0, y_0) rozumieme množinu

$$O_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y); (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\} .$$

Inak povedané, δ -okolie $O_\delta(x_0, y_0)$ je vnútrajšok kruhu so stredom v bode (x_0, y_0) a polomerom δ . Ďalej, bod (x_0, y_0) nazveme *hromadným bodom* nejakej množiny M , ak každé δ -okolie bodu (x_0, y_0) obsahuje aspoň jeden bod množiny M rôzny od (x_0, y_0) .

Definícia limity funkcie dvoch premenných. Nech D je obor definície funkcie $f(x, y)$ a nech bod (x_0, y_0) je hromadným bodom množiny D . Hovoríme, že funkcia $f(x, y)$ má v bode (x_0, y_0) limitu rovnú bodu L , čo symbolicky zapíšeme v tvare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L ,$$

ak ku každému (jednorozmernému) okoliu $O(L)$ bodu L existuje nejaké δ -okolie $O_\delta(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) tak, že pre každý bod $(x, y) \in O_\delta(x_0, y_0) \cap D$ rôzny od (x_0, y_0) platí, že $f(x, y) \in O(L)$.

Definícia pojmu spojitosti. Nech $f(x, y)$ je funkcia dvoch premenných s oborom definície D a nech bod $(x_0, y_0) \in D$ je hromadným bodom množiny D . Hovoríme, že funkcia $f(x, y)$ je *spojitá* v bode (x_0, y_0) , ak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) ,$$

t.j. ak limitu možno vypočítať jednoduchým dosadením. Ak $f(x, y)$ je spojitá v každom bode nejakej podmnožiny $M \subset D$, tak hovoríme, že funkcia $f(x, y)$ je *spojitá na množine* M .

Pri výpočte limit funkcií dvoch premenných používame pravidlá, ktoré už poznáme z jednorozmerného prípadu. Ak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L_1 \quad \text{a} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L_2 ,$$

tak (za predpokladu, že výrazy na pravých stranách sú prípustné) platí:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} c \cdot f(x,y) &= c \cdot L_1, \\ \lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) &= L_1 \pm L_2, \\ \lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) &= L_1 \cdot L_2, \\ \lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} &= \frac{L_1}{L_2}.\end{aligned}$$

Často je pri výpočtoch potrebné používať algebraické triky, s ktorými ste sa už stretli pri funkciách jednej premennej. Vo finálnej fáze výpočtu sa obvykle opierame o nasledujúce princíp (taktiež známy z jednorozmerného prípadu):

Každá elementárna funkcia dvoch premenných (t.j. funkcia vytvorená z konečného počtu polynómov, goniometrických, exponenciálnych funkcií a k nim inverzných funkcií použitím algebraických operácií a operácie skladania funkcií) je automaticky spojitá v každom hromadnom bode svojho definičného oboru.

Príklad 1. Vypočítajte hodnotu limity

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(4,-1)} \frac{2x - y - 9}{\sqrt{2x - y} - 3}.$$

Riešenie: Hoci funkcia za znakom limity nie je v bode $(4, -1)$ definovaná, tento bod je hromadným bodom jej definičného oboru (prečo?). Pri výpočte si pomôžeme rozšírením čitateľa aj menovateľa výrazom $(\sqrt{2x - y} + 3)$, a po úprave napokon dostaneme limitu z elementárnej funkcie, ktorú podľa vyššie uvedeného princípu vypočítame jednoducho dosadením:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\rightarrow(4,-1)} \frac{2x - y - 9}{\sqrt{2x - y} - 3} &= \lim_{(x,y)\rightarrow(4,-1)} \frac{(2x - y - 9)(\sqrt{2x - y} + 3)}{(\sqrt{2x - y} - 3)(\sqrt{2x - y} + 3)} = \\ &= \lim_{(x,y)\rightarrow(4,-1)} \frac{(2x - y - 9)(\sqrt{2x - y} + 3)}{2x - y - 9} = \lim_{(x,y)\rightarrow(4,-1)} (\sqrt{2x - y} + 3) = 6.\end{aligned}$$



Komplikovanosť pojmu limity funkcie dvoch premenných tkvie aj v tom, že k bodu (x_0, y_0) je možné „približovať sa“ bodmi (x, y) po rôznych krivkách (na rozdiel od jednorozmerných limit, kde sme sa k danému bodu mohli blížiť len zľava alebo sprava). Toto pozorovanie sa v kombinácii s definíciou limity často využíva na dôkaz *neexistencie* limity funkcie $f(x, y)$ v bode (x_0, y_0) .

Postačujúca podmienka neexistencie limity. Ak sa nám podarí nájsť dve krivky $y = r(x)$ a $y = s(x)$ tak, že $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = y_0$ (t.j. obe krivky sa „blížia“ k bodu (x_0, y_0)), a pritom hodnoty jednorozmerných limit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, r(x))$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, s(x))$ *nie sú* totožné (čiže funkčné hodnoty $f(x, y)$ sa pozdĺž kriviek $y = r(x)$ a $y = s(x)$ „blížia“ k rôznym bodom), tak potom funkcia $f(x, y)$ nemá v bode (x_0, y_0) limitu.

Príklad 2. Ukážme, že neexistuje limita

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \arctan \frac{y}{x}.$$

Riešenie: Pokúsme sa „realizovať približovanie“ ku bodu $(0, 0)$ po dvoch polpriamkach $y = k_1x$ a $y = k_2x$, kde $k_1 \neq k_2$ a $x > 0$. Ak $x \rightarrow 0$ po prvej polpriamke, tak dosadením $y = k_1x$ do pôvodnej limity dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{k_1x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan k_1 = \arctan k_1 .$$

Podobne pre „pohyb“ po druhej polpriamke $y = k_2x$ k bodu $(0, 0)$ máme:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{k_2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan k_2 = \arctan k_2 .$$

Keďže \arctan je funkcia rastúca a teda prostá, pre $k_1 \neq k_2$ je $\arctan k_1 \neq \arctan k_2$. Našli sme teda dve krivky (v našom prípade polpriamky), pozdĺž ktorých sa hodnoty funkcie $\arctan \frac{y}{x}$ „blížia“ k rôznym číslam, a preto daná limita *neexistuje*. ♣

Príklad 3. Presvedčme sa, že neexistuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + y^2} .$$

Riešenie: Vzhľadom na tvar našej funkcie tentoraz za krivky „približovania sa“ k bodu $(0, 0)$ zvolíme dve paraboly, $y = k_1x^2$ a $y = k_2x^2$, pričom, povedzme, $k_1 > k_2 > 0$. Ak sa teraz bod (x, y) „blíži“ k $(0, 0)$ po prvej parabole, dostávame z pôvodnej limity dosadením $y = k_1x^2$ a úpravou hodnotu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + (k_1x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_1^2} = \frac{1}{1 + k_1^2} .$$

Analogicky, výpočet pre druhú parabolu dáva:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + (k_2x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_2^2} = \frac{1}{1 + k_2^2} .$$

Keďže sme získali dve rôzne hodnoty limít pozdĺž dvoch rôznych kriviek, pôvodná limita *neexistuje*. ♣

Pojem limity a spojitosti funkcií troch a viac premenných je možné zaviesť obdobne, a pravidlá zaobchádzania s limitami sú analogické pravidlám pre funkcie dvoch premenných.

4.2 Parciálne derivácie a diferencovateľnosť

4.2.1 Parciálne derivácie

Nech $z = f(x, y)$ je funkcia dvoch premenných s oborom definície D a nech $(x_0, y_0) \in D$. Predstavme si, že graf tejto funkcie máme znázornený ako plochu v trojrozmernom priestore s pravouhlými súradnicovými osami x, y, z . Potom vertikálna rovina $y = y_0$ rovnobežná so súradnicovou rovinou ρ_{xz} pretína našu plochu $z = f(x, y)$ v *krivke* s rovnicou $z = f(x, y_0)$. Táto krivka je vlastne grafom funkcie jednej premennej $z = f(x, y_0)$ v rovine $y = y_0$. Túto funkciu môžeme jednoducho zderivovať podľa x a tak vypočítať napr. smernicu dotyčnice ku krivke $z = f(x, y_0)$, ktorá leží v rovine $y = y_0$. Takto vypočítaná derivácia sa nazýva parciálna (čiže „čiastočná“) podľa premennej x , pretože za y sa najprv dosadí konštanta y_0 a až potom sa počíta (obyčajná) derivácia funkcie jednej premennej podľa x . Formálne:

Definícia parciálnej derivácie. Pod *parciálnou deriváciou* funkcie $z = f(x, y)$ v bode (x_0, y_0) vzhľadom na premennú x rozumieme obyčajnú deriváciu funkcie jednej premennej $f(x, y_0)$ podľa x

(za predpokladu, že existuje). Pre túto parciálnu deriváciu sa používa ktorékoľvek z nasledujúcich označení:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad z_x(x_0, y_0).$$

Podľa uvedenej definície teda platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = z_x(x_0, y_0) = f'(x, y_0),$$

pričom derivácia vpravo je obyčajná derivácia funkcie jednej premennej $f(x, y_0)$ podľa x . Parciálna derivácia funkcie $z = f(x, y)$ v bode (x_0, y_0) podľa premennej y sa definuje analogicky, spolu s označným $z_y(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$, atď.

Príklad 1. Vypočítajte parciálne derivácie funkcie

$$z = \frac{1 + \sin x}{x + \cos y}$$

podľa oboch premenných v bode $(0, \pi)$.

Riešenie: Pre výpočet parciálnej derivácie $z_x(0, \pi)$ najprv dosadíme $y = y_0 = \pi$ a potom použijeme známe pravidlá pre derivovanie funkcie jednej premennej (najprv pravidlo o derivovaní podielu, atď.) pre výpočet derivácie v bode $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} z_x(0, \pi) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1 + \sin x}{x + \cos \pi} \right)_{x=0} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1 + \sin x}{x - 1} \right)_{x=0} \\ &= \left(\frac{(x - 1) \cos x - 1 - \sin x}{(x - 1)^2} \right)_{x=0} = -2. \end{aligned}$$

Podobne, pri výpočte parciálnej derivácie $z_y(0, \pi)$ podľa premennej y najprv za x dosadíme $x_0 = 0$ a potom počítame známym spôsobom obyčajnú deriváciu podľa y v bode $y_0 = \pi$:

$$z_y(0, \pi) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1 + \sin 0}{0 + \cos y} \right)_{y=\pi} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\cos y} \right)_{y=\pi} = \left(\frac{\sin y}{\cos^2 y} \right)_{y=\pi} = 0.$$



Často sa stáva, že nás ani tak nezaujíma hodnota parciálnej derivácie v konkrétnom bode, ale v *ľubovoľnom* bode (pokiaľ existuje). Priradenia $(x_0, y_0) \mapsto f_x(x_0, y_0)$ a $(x_0, y_0) \mapsto f_y(x_0, y_0)$ potom definujú *nové funkcie*, ktoré nazývame jednoducho *parciálnymi deriváciami* funkcie $f(x, y)$; pri ich označovaní zvykneme vynechávať indexy a píšeme len $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$. Poznamenajme, že definičné obory parciálnych derivácií f_x a f_y sa nemusia zhodovať s definičným oborom funkcie f .

Uvedené definície si čitateľ ľahko modifikuje pre prípad funkcií troch a viacerých premenných. Pravidlo počítania parciálnej derivácie podľa niektorej premennej je jednoduché: *Všetky ostatné premenné sa pre účely derivovania považujú za konštanty.*

Príklad 2. Vypočítajte parciálne derivácie g_x , g_y a g_z funkcie $g(x, y, z) = x \arcsin(\sqrt{xy}) + \ln(y + e^z)$.

Riešenie: Pre výpočet g_x považujeme y a z za symboly označujúce konštanty a derivujeme podľa x ; to napr. znamená, že celý druhý člen $\ln(y + e^z)$ bude po derivovaní podľa x nulový! Po úprave

(pozor na derivovanie zložených funkcií!) dostávame:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{d}{dx}(x \arcsin \sqrt{xy} + \ln(y + e^z)) \\ &= \arcsin \sqrt{xy} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{xy})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y + 0 \\ &= \arcsin \sqrt{xy} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xy}{1 - xy}}. \end{aligned}$$

Podobne pre ďalšie dve parciálne derivácie máme:

$$\begin{aligned} g_y &= \frac{d}{dy}(x \arcsin \sqrt{xy} + \ln(y + e^z)) = \\ &= x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{xy})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x + \frac{1}{y + e^z} \cdot (1 + 0) = \\ &= \frac{x^2}{2\sqrt{xy(1 - xy)}} + \frac{1}{y + e^z}; \\ g_z &= \frac{d}{dz}(x \arcsin \sqrt{xy} + \ln(y + e^z)) \\ &= 0 + \frac{1}{y + e^z} \cdot (0 + e^z) = \frac{e^z}{y + e^z}. \end{aligned}$$



4.2.2 Linearizácia, dotyková rovina a diferenciál

V praxi (najmä v geometrických a numerických aproximáciách) veľmi dôležitú úlohu zohráva lokálne nahradzovanie funkcií *lineárnymi* funkciami. To vedie k zavedeniu nasledujúcich dôležitých pojmov.

Definícia linearizácie. Nech funkcia $f(x, y)$ má parciálne derivácie podľa oboch premenných *spojité* v bode (x_0, y_0) . Pod *linearizáciou* funkcie f v bode (x_0, y_0) rozumieme funkciu $L(x, y)$ danú predpisom

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (4.1)$$

Približnú rovnosť

$$f(x, y) \doteq L(x, y) \quad (4.2)$$

nazývame *štandardnou lineárnou aproximáciou* funkcie f v okolí bodu (x_0, y_0) .

Je dôležité uvedomiť si, že $L(x, y)$ je naozaj *lineárna* funkcia. Aproximácia $f(x, y) \doteq L(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0) teda hovorí, že aj komplikované funkcie možno lokálne nahradzovať lineárnymi funkciami. Otázkou presnosti takejto aproximácie sa budeme zaoberať na inom mieste.

Príklad 1. Nájdite linearizáciu funkcie $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ v bode $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, ako aj jej štandardnú lineárnu aproximáciu v tomto bode.

Riešenie: Vypočítame najprv parciálne derivácie v bode $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$:

$$f_x(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{dx} e^{-(x^2+y^2)} \right)_{(x_0, y_0)} = (e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x))_{(x_0, y_0)} = -\frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$f_y(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{dy} e^{-(x^2+y^2)} \right)_{(x_0, y_0)} = (e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y))_{(x_0, y_0)} = +\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Keďže $f(x_0, y_0) = 1/\sqrt{e}$, dosadením do vzťahu (4.1) pre linearizáciu našej funkcie v okolí bodu (x_0, y_0) dostávame:

$$L(x, y) = \frac{1}{\sqrt{e}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{e}} \left(y - \left(-\frac{1}{2}\right)\right),$$

a po úprave,

$$L(x, y) = \frac{1}{\sqrt{e}}(2 - x + y).$$

Pre štandardnú lineárnu aproximáciu $f(x, y) \doteq L(x, y)$ v uvedenom bode napokon máme:

$$e^{-(x^2+y^2)} \doteq \frac{1}{\sqrt{e}}(2 - x + y).$$

Vidíme, že pôvodná funkcia je v okolí bodu $(1/2, -1/2)$ naozaj nahradená lineárnou funkciou. ♣

Dotyková rovina ku grafu funkcie. Geometrická interpretácia pojmu štandardnej lineárnej aproximácie funkcie $f(x, y)$ v bode (x_0, y_0) je jednoduchá: Funkcia $z = L(x, y)$, teda,

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0), \quad (4.3)$$

predstavuje rovnicu *dotykovej roviny* k ploche $z = f(x, y)$ v bode (x_0, y_0) . Štandardná lineárna aproximácia je teda z geometrického hľadiska nahradením plochy $z = f(x, y)$ dotykovou rovinou v bode (x_0, y_0) .

Príklad 2. Napíšme rovnicu dotyčkovej roviny ku ploche danej rovnicou $z = f(x, y) = 19 - x^2 - 4y^2$ v bode $(1, 2)$.

Riešenie: Na dosadenie do formulky (4.3) potrebujeme vypočítať hodnoty $f(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$ a $f_y(x_0, y_0)$ pre bod $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Postupne dostávame: $f(1, 2) = 2$, $f_x(1, 2) = (-2x)_{(1,2)} = -2$, a $f_y(1, 2) = (-8y)_{(1,2)} = -16$. Dosadením do (4.3) vidíme, že hľadaná rovnica dotyčkovej roviny je $z = 2 - 2(x - 1) - 16(y - 2)$, čo po úprave dáva $2x + 16y + z - 36 = 0$. ♣

Definícia totálneho diferenciálu. Predpokladajme, že $f(x, y)$ má parciálne derivácie podľa oboch premenných *spojité* v bode $B = (x_0, y_0)$. Výraz

$$df(x, y)_B = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (4.4)$$

nazývame *totálnym diferenciálom* funkcie f v bode $B = (x_0, y_0)$. Linearizácia a totálny diferenciál sú teda viazané rovnosťou $L(x, y) = f(B) + df(x, y)_B$. Ak prijmem označenie $dx = x - x_0$ a $dy = y - y_0$, vzťah (4.4) nadobudne často uvádzaný tvar

$$df(x, y)_B = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy = f_x(B)dx + f_y(B)dy. \quad (4.5)$$

Kombináciou štandardnej lineárnej aproximácie (4.2) a totálneho diferenciálu (4.5) dostávame v okolí bodu (x_0, y_0) približné rovnosti

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + df(x, y)_B, \quad \text{alebo} \quad f(x, y) - f(x_0, y_0) \doteq df(x, y)_B.$$

Totálny diferenciál preto reprezentuje *približnú veľkosť zmeny* hodnoty funkcie f v bode (x, y) v porovnaní s hodnotou v bode (x_0, y_0) . Približné odhady takýchto zmien majú v praxi veľký význam.

Príklad 3. Akú približnú percentuálnu zmenu objemu valca možno očakávať, ak sa polomer zväčší o 2 percentá a výška o 1 percento?

Riešenie: Objem valca je daný vzorčekom $V = V(r, h) = \pi r^2 h$, kde r je polomer a h je výška valca. Už vieme, že veľkosť zmeny hodnôt funkcie V v nejakom bode (r, h) v porovnaní s hodnotou v bode $B = (r_0, h_0)$ možno približne odhadnúť jej totálnym diferenciálom dV . Ten je daný vzťahom (4.5) a v našom označení má tvar:

$$dV(r, h)_B = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh, \quad (4.6)$$

pričom $dr = r - r_0$ a $dh = h - h_0$. Ďalej vieme, že nová hodnota r sa od pôvodnej hodnoty r_0 líši o plus 2 percentá, teda $r = 1,02r_0$, čiže $dr = 0,02r_0$. Podobne dostávame, že $dh = 0,01h_0$. Pre dosadenie do (4.6) treba ešte vypočítať hodnoty parciálnych derivácií $V_r(r_0, h_0)$ a $V_h(r_0, h_0)$. Známym spôsobom dostávame: $V_r(r_0, h_0) = 2\pi r_0 h_0$, a $V_h(r_0, h_0) = \pi r_0^2$. Dosadením získaných rovností do (4.6) máme:

$$dV(r, h)_B = 2\pi r_0 h_0 \cdot 0,02r_0 + \pi r_0^2 \cdot 0,01h_0 = 0,05\pi r_0^2 h_0 = 0,05 \cdot V(r_0, h_0).$$

Keďže $dV(r, h)_B \doteq V(r, h) - V(r_0, h_0)$, vidíme, že uvedené zmeny v polomere a výške valca vyvolajú zmenu objemu o približne 5 percent. ♣

Linearizácia a totálny diferenciál funkcií troch a viac premenných sa definujú analogicky; podrobnosti prenechávame na samostatnú iniciatívu čitateľa.

4.2.3 Vyššie derivácie a reťazové pravidlá

Podobne ako pri funkciách jednej premennej, aj parciálne derivácie je možné iterovať, a to rôznym spôsobom. Tak napríklad je možné počítat (ak existujú) parciálne derivácie (podľa x alebo y) z parciálnej derivácie funkcie $f(x, y)$ podľa x (alebo y), čiže parciálne derivácie typu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right);$$

tieto obvykle zapisujeme v skrátenej forme v tvare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Vyššie derivácie funkcií troch a viac premenných sa tvoria a označujú obdobne.

Vo všeobecnosti derivovanie môže závisieť na poradí, t.j. existujú funkcie, pre ktoré je $f_{xy} \neq f_{yx}$. V týchto skriptách sa však s takýmito „anomálnymi“ funkciami nestretáme. Platí totiž nasledujúca veta:

Ak je funkcia $f(x, y)$ na nejakej oblasti M spojitá spolu so všetkými štyrmi parciálnymi deriváciami f_x , f_y , f_{xy} a f_{yx} , tak platí rovnosť $f_{xy} = f_{yx}$ na oblasti M .

Príklad 1. Ukážme, že funkcia $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ spĺňa (v praxi dôležitú) tzv. Laplaceovu rovnicu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Riešenie: Priamym výpočtom derivácie f_{xx} dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x \right) = \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - x \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x = \end{aligned}$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2x^2 - y^2 - z^2) .$$

Keďže funkcia f je symetrická vo svojich premenných, tak máme ihneď:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2y^2 - x^2 - z^2) ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2z^2 - x^2 - y^2) .$$

O splnení Laplaceovej rovnice sa teraz dá presvedčiť jednoduchým dosadením (preveďte!). ♣

Pri deriváciách funkcií jednej premennej ste sa zoznámili s pravidlom pre derivovanie zložených funkcií, ktoré sa nazýva aj *reťazové pravidlo*. Pri parciálnych deriváciách má reťazové pravidlo zložitejšiu formuláciu. Začneme s najjednoduchším prípadom.

Reťazové pravidlo, časť 1. Ak $z = f(x, y)$, pričom $x = x(t)$ aj $y = y(t)$ sú funkcie premennej t , tak platí

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{dt} , \quad (4.7)$$

pričom do parciálnych derivácií vo veľkých zátvorkách je potrebné po ich výpočte dosadiť $x = x(t)$ a $y = y(t)$. (Mlčky pritom predpokladáme, že všetky derivácie na pravej strane existujú a sú spojité na istej oblasti.)

Príklad 2. Pomocou reťazového pravidla vypočítajte deriváciu funkcie $f(x, y) = x^2 \ln y$ podľa premennej t , ak $x = \cos t$ a $y = \sin t$.

Riešenie: Použitím vyššie uvedeného vzorčeka máme pre našu funkciu $z = f(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{dt} = \\ &= (2x \ln y) \cdot (-\sin t) + (x^2/y) \cdot \cos t \end{aligned}$$

(teraz dosadíme $x = \cos t$ a $y = \sin t$ do výrazov v zátvorkách a upravíme)

$$= -2 \cos t \sin t \ln(\sin t) + \cos^3 t / \sin t .$$

♣

Analogicky, uvedené reťazové pravidlo pre funkciu troch premenných $w = f(x, y, z)$, kde $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$, má tvar

$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \frac{dz}{dt} ;$$

vo veľkých zátvorkách treba po výpočte parciálnych derivácií dosadiť $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$; podobné vzorce platia aj pre funkcie viac ako troch premenných.

Pri zložených funkciách viac premenných sa môže stať, že premenné x, y, z, \dots sú samy osebe funkciami viacerých iných premenných. Napríklad pri funkcii troch premenných $w = f(x, y, z)$ definovanej na nejakej oblasti v trojrozmernom priestore môžu premenné x, y, z byť funkciami ďalších (povedzme) dvoch premenných, čiže $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ a $z = z(u, v)$, čo by zodpovedalo prípadu, že body (x, y, z) berieme z nejakej plochy v priestore. V takomto prípade má reťazové pravidlo o niečo komplikovanejší tvar:

Reťazové pravidlo, časť 2. Ak $w = f(x, y, z)$, pričom $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ a $z = z(u, v)$, tak pre parciálne derivácie w_u a w_v platí:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial v};$$

pritom opäť po výpočte parciálnych derivácií v zátvorkách je potrebné všade dosadiť $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ a $z = z(u, v)$.

Napriek komplikovanejšiemu tvaru veríme, že bystrý čitateľ ľahko vnikne do logiky tvorby týchto formuliek a v prípade potreby si vykombinuje korektnú verziu.

Príklad 3. Vypočítajme parciálne derivácie funkcie $w = f(x, y) = x^3y^2$ podľa premenných u, v , ak $x = 3u - 2v$ a $y = uv$.

Riešenie: Postupujeme podľa vzorčeka v časti 2 reťazového pravidla, kde člen obsahujúci premennú z jednoducho vynecháme, pretože pracujeme len s funkciou dvoch premenných. Tak postupne dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = (3x^2y^2) \cdot 3 + (2x^3y) \cdot v = \\ &= 9(3u - 2v)^2(uv)^2 + 2uv^2(3u - 2v)^3, \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = (3x^2y^2) \cdot (-2) + (2x^3y) \cdot u = \\ &= -6(3u - 2v)^2(uv)^2 + 2u^2v(3u - 2v)^3. \end{aligned}$$



Uvedené reťazové pravidlá majú najmä veľký teoretický význam v theórii parciálnych diferenciálnych rovníc.

4.2.4 Gradient a derivácia v smere

Pojmy gradientu a derivácie v smere najprv vysvetlíme na funkciách dvoch premenných. Nech $f(x, y)$ je funkcia dvoch premenných, ktorá je na nejakej oblasti $M \subset \mathcal{R}^2$ spojitá spolu so svojimi parciálnymi deriváciami f_x a f_y . Ako vieme, grafom takejto funkcie je plocha v trojrozmernom priestore, určená rovnicou $z = f(x, y)$. Nech $B = (x_0, y_0)$ je bod z oblasti M a nech $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ je jednotkový vektor (t.j. vektor jednotkovej dĺžky). Priamka v rovine xy určená bodom B a vektorom \mathbf{u} má parametrické vyjadrenie v tvare

$$x = x_0 + s \cdot u_1, \quad y = y_0 + s \cdot u_2. \quad (4.8)$$

Touto priamkou teraz preložíme rovinu σ kolmú na súradnicovú rovinu xy . Rovina σ pretne plochu $z = f(x, y)$ v akejkoľvek krivke C . Rovnicu krivky C v parametrickom tvare (t.j. ako funkciu premennej s) dostaneme jednoducho dosadením vzťahov (4.8) do rovnice plochy, teda krivka C má rovnicu $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$. Naším cieľom je výpočet *smernice dotýčnice* ku krivke C v rovine σ pre $s = 0$, t.j. v bode $B = (x_0, y_0)$.

Dá sa ľahko nahliadnuť, že hľadaná smernica dotýčnice nie je nič iné ako derivácia df/ds v bode $s = 0$. (Zdôvodnite podrobne; ako je pritom využitý fakt, že vektor \mathbf{u} je *jednotkový*?). Keďže ide

o zložení funkciu (premenné x, y teraz závisia od s), na výpočet derivácie df/ds použijeme časť 1 reťazového pravidla z predchádzajúcej podkapitoly, spolu s deriváciami výrazov (4.8):

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{ds}\right)_{s=0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_B \cdot \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_B \cdot \frac{dy}{ds} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_B \cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_B \cdot u_2 . \end{aligned}$$

Výraz vpravo je vlastne *skalárnym súčynom* vektora $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ s vektorom $((\partial f/\partial x)_B, (\partial f/\partial y)_B) = (\partial f/\partial x)_B\mathbf{i} + (\partial f/\partial y)_B\mathbf{j}$. Tak sa dostávame k nasledujúcim dôležitým faktom.

Definícia gradientu a výpočet derivácie v smere. Pod *gradientom* funkcie $f(x, y)$ rozumieme dvojrozmerný vektor, ktorého súradnice sú parciálne derivácie funkcie f podľa x a y (v tomto poradí). Tento vektor je zvykom označovať symbolom ∇f (čítaj „nabla ef“); gradient funkcie f je teda vektor

$$\nabla f = (f_x, f_y) = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} . \quad (4.9)$$

Číslo $(df/ds)_{s=0}$ nazývame *deriváciou* funkcie f v bode $B = (x_0, y_0)$ v smere jednotkového vektora $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$; označujeme ju symbolom $D_{\mathbf{u}}f(B)$. Podľa výpočtu v predchádzajúcom odstavci je táto derivácia v smere daná skalárnym súčynom gradientu v bode B s vektorom \mathbf{u} , čo v rôznych ekvivalentných formách môžeme za písať nasledovne:

$$D_{\mathbf{u}}f(B) = (\nabla f)_B \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_B \cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_B \cdot u_2 = f_x(B)u_1 + f_y(B)u_2 .$$

V praxi pri funkcii dvoch premenných často potrebujeme stanoviť rýchlosť zmeny funkčných hodnôt v okolí nejakého bodu, a to v smere danom nejakým jednotkovým vektorom. Ako je vidieť, táto rýchlosť zmeny je presne hodnota derivácie v smere daného vektora (v danom bode).² V tejto súvislosti má významnú geometrickú a fyzikálnu interpretáciu samotný gradient: Hodnota gradientu v bode B je totiž vektor vyjadrujúci smer *najstrmšieho rastu* funkcie f z bodu B .

Príklad 1. Vypočítajte vektor, v smere ktorého funkcia $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ rastie najstrmšie v okolí bodu $(-1, 2)$.

Riešenie: Smer najstrmšieho rastu je daný hodnotou gradientu ∇f v bode $(-1, 2)$, čiže vektorom

$$\nabla f_{(-1,2)} = (f_x, f_y)_{(-1,2)} = (8x, 2y)_{(-1,2)} = (-8, 4) = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} .$$

Funkcia f teda v okolí bodu $(-1, 2)$ najviac rastie v smere vektora $-8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, čo je to isté ako v smere vektora $-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. ♣

Príklad 2. Vypočítajte deriváciu funkcie $g(x, y) = x(1 + y^2) - 2e^y \cos x$ v bode $(\pi, 0)$ v smere vektora $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Riešenie: Predovšetkým z vektora \mathbf{v} musíme vytvoriť príslušný *jednotkový* vektor \mathbf{u} , a to tak, že súradnice vektora \mathbf{v} vynásobíme prevrátenou hodnotou jeho dĺžky. Keďže dĺžka vektora \mathbf{v} je $|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$, príslušný jednotkový vektor je $\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$. Ďalej si potrebujeme vypočítať hodnotu gradientu funkcie g v bode $B = (\pi, 0)$:

$$\nabla g_B = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_B \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_B \mathbf{j} = (1 + y^2 + 2e^y \sin x)_B \mathbf{i} + (2xy - 2e^y \cos x)_B \mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} .$$

²Všimnite si, že derivácie funkcie v smere jednotkových vektorov $[1, 0]$ a $[0, 1]$ sú práve parciálne derivácie tejto funkcie podľa x resp. y .

Podľa vzorca pre výpočet derivácie v smere napokon máme:

$$D_{\mathbf{u}}g(\pi, 0) = \nabla g_B \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}\right) = 1 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{5}.$$



Gradient, vrstevnice a ich dotyčnice. Ďalšia dôležitá geometrická vlastnosť gradientu súvisí s vrstevnicami, t.j. krivkami v rovine xy , ktoré sú dané rovnicami typu $f(x, y) = c$:

Ak bod $B = (x_0, y_0)$ je bodom vrstevnice $f(x, y) = c$, tak gradient ∇f_B je normálový vektor k danej vrstevnici v bode B , t.j. vektor kolmý na dotyčnicu k danej vrstevnici v bode B .

Z toho ihneď vyplýva, že rovnica dotyčnice (v rovine xy) ku vrstevnici $f(x, y) = c$ v bode $B = (x_0, y_0)$ je daná skalárnym súčinom gradientu a vektora $(x - x_0, y - y_0)$, teda

$$\nabla f_B \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0;$$

alebo v rozpísanej forme,

$$f_x(B)(x - x_0) + f_y(B)(y - y_0) = 0. \quad (4.10)$$

Príklad 3. Vypočítajte rovnicu dotyčnice ku hyperbole $9y^2 - 2x^2 = 1$ v bode $(2, -1)$.

Riešenie: Danú hyperbolu budeme považovať za vrstevnicu funkcie $f(x, y) = 9y^2 - 2x^2$ zodpovedajúcu výške $c = 1$. Pre hodnoty parciálnych derivácií v bode $B = (2, -1)$ máme $f_x(B) = (-4x)_B = -8$, a $f_y(B) = (18y)_B = -18$. Podľa vzťahu (4.10) pre hľadanú rovnicu dotyčnice dostávame:

$$-8(x - 2) - 18(y - (-1)) = 0, \quad \text{teda} \quad 4x + 9y + 1 = 0.$$

Všimnite si, že hodnota $c = 1$ pri samotnom počítaní nehrala žiadnu rolu. Napriek tomu, získaný výsledok *nie je správny* pre $c \neq 1$; vysvetlite! ♣

Funkcie troch premenných. Uvedené fakty o gradiente a derivácii v smere sa ľahko zovšeobecnia pre funkcie troch (a aj viac) premenných. Ak $f = f(x, y, z)$ je funkcia troch premenných so spojitémi parciálnymi deriváciami na nejakej trojrozmernej oblasti M , tak pod *gradientom* funkcie f na tejto oblasti rozumieme vektor

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}. \quad (4.11)$$

Ak $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ je jednotkový vektor, tak *derivácia* funkcie f v bode $B \in M$ v smere vektora \mathbf{u} je číslo označované $D_{\mathbf{u}}f(B)$ a dané skalárnym súčinom

$$D_{\mathbf{u}}f(B) = \nabla f_B \cdot \mathbf{u} = f_x(B)u_1 + f_y(B)u_2 + f_z(B)u_3. \quad (4.12)$$

Podobným spôsobom sa dajú zovšeobecniť aj geometrické fakty súvisiace s gradientom, len je všetky pojmy potrebné transformovať o jednu dimenziu vyššie:

Ak bod $B = (x_0, y_0, z_0)$ je bodom vrstvovej plochy $f(x, y, z) = c$, tak gradient ∇f_B je normálový vektor k danej vrstvovej ploche v bode B , t.j. vektor kolmý na dotykovú rovinu k danej vrstvovej ploche v bode B .

Odtiaľ vyplýva, že rovnica dotykovej roviny ku vrstvovej ploche $f(x, y, z) = c$ v bode $B = (x_0, y_0, z_0)$ je daná skalárnym súčinom gradientu a vektora $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, teda

$$\nabla f_B \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0;$$

čo v rozpísanej forme dáva rovnicu

$$f_x(B)(x - x_0) + f_y(B)(y - y_0) + f_z(B)(z - z_0) = 0. \quad (4.13)$$

Príklad 4. Vypočítajme hodnotu derivácie funkcie $h(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ v bode $B = (-2, 1, 9)$ v smere vektora $v = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Riešenie: Najprv vytvoríme jednotkový vektor \mathbf{u} prislúchajúci k vektoru \mathbf{v} ; pretože $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$, tak $\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Vektor gradientu v bode B nájdeme pomocou vzorca (4.11) a dosadenia súradníc bodu B :

$$\nabla h_B = h_x(B)\mathbf{i} + h_y(B)\mathbf{j} + h_z(B)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} .$$

Po dosadení do (4.12) dostávame pre hľadanú hodnotu derivácie v smere výsledok

$$D_{\mathbf{u}}h(B) = \nabla h_B \cdot \mathbf{u} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 4 .$$



Príklad 5. Nájdite rovnicu dotykovvej roviny ku ploche jednodielneho hyperboloidu $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$ v bode $B = (1, -1, 2)$.

Riešenie: Danú plochu považujeme za vrstvovú plochu funkcie $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$ pre hodnotu $c = -1$; dotyková rovina je potom určená vzorčekom (4.13). Pre súradnice gradientu (čiže normálového vektora) máme: $f_x(B) = (2x)_B = 2$, $f_y(B) = (4y)_B = -4$, a $f_z(B) = (-2z)_B = -4$. Dosadením do (4.13) dostaneme hľadanú rovnicu dotykovvej roviny:

$$2(x - 1) - 4(y - (-1)) - 4(z - 2) = 0, \quad \text{alebo} \quad x - 2y - 2z + 1 = 0 .$$



Poznámka. Na určenie dotykovvej roviny máme zatiaľ dva prostriedky: Práve uvedenú gradientovú metódu vedúcu k formulke (4.13), a metódu linearizácie z podkapitoly 4.2.2, čiže vzorček (4.3). Odporúčame čitateľovi, aby si touto druhou metódou overil výsledok získaný v predchádzajúcom príklade.

4.3 Extrémy funkcií viac premenných

4.3.1 Lokálne extrémy

Pri štúdiu extrémov funkcie jednej premennej sme definovali pojmy ako rastúcosť a klesajúcosť, konvexnosť a konkávnosť, atď. Väčšina z týchto pojmov nebude aktuálna pre vyšetovanie funkcií viac premenných. Napríklad, funkcia $z = x^2 - y^2$ v okolí bodu $(0, 0)$ rastie pozdĺž kladnej časti osi x (pre $y = 0$), a pritom zároveň klesá pozdĺž kladnej časti osi y (pre $x = 0$). Preto v ďalšom vystačíme s pojmami lokálneho maxima a minima, ktoré vysvetlíme najprv v prípade funkcií dvoch premenných.

Definícia lokálnych extrémov. Nech $f = f(x, y)$ je funkcia dvoch premenných s definičným oborom D . Hovoríme, že funkcia f má v bode $(x_0, y_0) \in D$ *lokálne maximum* [*lokálne minimum*], ak existuje také δ -okolie $O_\delta(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) , že $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ [respektíve, $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$] pre každý bod $(x, y) \in O_\delta(x_0, y_0) \cap D$. Lokálne minimum a maximum nazývame súhrnne *lokálnymi extrémami* funkcie f .

V ďalšom budeme predpokladať, že funkcia $f = f(x, y)$ má na nejakej oblasti M spojité parciálne derivácie. Potom v každom bode $(x_0, y_0) \in M$ ku ploche $z = f(x, y)$ existuje jednoznačne určená dotyková rovina, ktorá má podľa (4.3) rovnicu

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Intuitívne, ak funkcia f má v bode (x_0, y_0) lokálny extrém, tak dotyková rovina v tomto bode bude rovnobežná so súradnicovou rovinou xy , a teda koeficienty $f_x(x_0, y_0)$ a $f_y(x_0, y_0)$ v predchádzajúcej rovnici musia byť rovné nule. To vedie k nasledujúcej definícii.

Definícia stacionárneho bodu. Nech funkcia $f = f(x, y)$ má parciálne derivácie na oblasti M . Bod $(x_0, y_0) \in M$ nazývame *stacionárnym bodom* funkcie f , ak platí:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 .$$

Stacionárne body sú teda „kandidátmi“ na existenciu lokálneho extrému. Vo všeobecnosti nie je pravda, že v stacionárnom bode je vždy nejaký lokálny extrém. Napríklad pre funkciu $f(x, y) = x^2 - y^2$ je bod $(0, 0)$ stacionárnym bodom, ale z faktov uvedených v prvom odstavci tejto časti vidieť, že táto funkcia *nemá* v bode $(0, 0)$ lokálny extrém. Vzniknutú situáciu zachytáva naša ďalšia definícia.

Definícia sedlového bodu. Nech D je definičný obor funkcie $f = f(x, y)$. Bod $(x_0, y_0) \in D$ nazývame *sedlovým bodom* funkcie f , ak v každom δ -okolí $O_\delta(x_0, y_0)$ existujú body $(x_\delta, y_\delta) \in D$ a $(x'_\delta, y'_\delta) \in D$ rôzne od (x_0, y_0) také, že

$$f(x_\delta, y_\delta) > f(x_0, y_0) \quad \text{a} \quad f(x'_\delta, y'_\delta) < f(x_0, y_0) .$$

Na identifikáciu situácie v stacionárnych bodoch používame nasledujúcu matematickú metódu takzvaného *D-testu*. Ide o nie zložitý algoritmus, ktorý je však na tomto mieste ťažké motivovať a nahliadnuť jednoduchým spôsobom.

D-test pre lokálne extrémy funkcie 2 premenných. Nech bod $B = (x_0, y_0)$ je stacionárnym bodom funkcie $f = f(x, y)$ a nech f má v nejakom okolí bodu B spojité druhé parciálne derivácie f_{xx} , f_{yy} a f_{xy} . Nech

$$D = f_{xx}(B) \cdot f_{yy}(B) - (f_{xy}(B))^2 . \quad (4.14)$$

Potom platí:

- (1) Ak $D > 0$ a $f_{xx}(B) < 0$, tak funkcia f má v bode B *lokálne maximum*.
- (2) Ak $D > 0$ a $f_{xx}(B) > 0$, tak funkcia f má v bode B *lokálne minimum*.
- (3) Ak $D < 0$, tak B je *sedlovým bodom* funkcie f .
- (4) Ak $D = 0$, tak touto metódou nevieme rozhodnúť, ako sa funkcia f správa v stacionárnom bode B .

Príklad 1. Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy$.

Riešenie: Daná funkcia je definovaná v každom bode roviny \mathcal{R}^2 a má tam aj spojité parciálne derivácie (ľubovoľného rádu). Určíme najprv stacionárne body. Pre parciálne derivácie prvého rádu dostávame:

$$f_x = 2x - 6y ; \quad f_y = 3y^2 - 6x .$$

Stacionárne body sú určené rovnicami $f_x = f_y = 0$, teda:

$$2x - 6y = 0 \quad , \quad 3y^2 - 6x = 0 .$$

Z prvej rovnice máme $x = 3y$, čo po dosadení do druhej rovnice a úprave dáva $y(y - 6) = 0$. Máme teda dve riešenia: $y_1 = 0$ a $y_2 = 6$, čomu zodpovedá $x_1 = 0$ a $x_2 = 18$. Tak sme získali dva stacionárne body: $B_1 = (0, 0)$ a $B_2 = (18, 6)$.

Pre každý z týchto dvoch stacionárnych bodov by sme teraz mali vypočítať hodnotu výrazu D z (4.14). Urobíme to v obrátenom poradí: Najprv vypočítame výraz D vo všeobecnosti a potom doň

za x a y dosadíme súradnice stacionárnych bodov. Keďže $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, začneme s parciálnymi deriváciami druhého rádu:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -6.$$

Pre náš výraz D vychádza:

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 6y - (-6)^2 = 12(y - 3).$$

A teraz pristúpime k aplikácii D-testu na jednotlivé stacionárne body.

Bod $B_1 = (0, 0)$: Hodnota premennej D v bode $(0, 0)$ je $D = 12 \cdot (-3)$, a teda $D < 0$. Z časti (3) formulácie D-testu vidieť, že B_1 je *sedlovým bodom* našej funkcie.

Bod $B_2 = (18, 6)$: Hodnota výrazu pre D v bode B_2 je $D = 12 \cdot (6 - 3)$, čiže tentoraz $D > 0$. Z D-testu ihneď vyplýva, že naša funkcia určite má v bode B_2 lokálny extrém. O tom, či ide o maximum alebo minimum, rozhodne znamienko hodnoty derivácie f_{xx} v bode B_2 . Keďže $f_{xx} = 2$, a teda $f_{xx} > 0$, nadobúda funkcia f v bode B_2 *lokálne minimum*. Hodnota tohoto lokálneho minima je $f(B_2) = f(18, 6) = 18^2 + 6^3 - 6 \cdot 18 \cdot 6 = -108$. ♣

Definíciu lokálnych extrémov si čitateľ ľahko modifikuje pre prípad funkcií viac premenných. Podobne je to aj s definíciou stacionárneho bodu: Napríklad ak máme funkciu troch premenných $f = f(x, y, z)$ definovanú na nejakej oblasti M , kde f má parciálne derivácie prvého rádu, tak *stacionárny bod* je taký bod $(x_0, y_0, z_0) \in M$, v ktorom všetky parciálne derivácie prvého rádu sú nulové, teda:

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Aj v tomto prípade platí, že ak funkcia f má v bode (x_0, y_0, z_0) extrém, tak bod (x_0, y_0, z_0) je stacionárnym bodom; opačná implikácia neplatí. Zovšeobecnenie D-testu pre funkcie 3 a viac premenných je však pomerne komplikované a nebudeme ho tu uvádzať.

4.3.2 Viazané extrémny

Pri praktických aplikáciách často potrebujeme stanoviť maximálnu a minimálnu hodnotu nejakej funkcie nie na celom jej definičnom obore, ale len na nejakej jeho časti (napr. na nejakej rovinnej krivke alebo na priestorovej ploche). Najjednoduchším predstaviteľom problémov uvedeného typu je nasledujúca úloha:

Úloha o viazaných extrémoch v rovine je nájsť najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $z = f(x, y)$ pre tie body (x, y) , ktoré ležia na krivke určenej rovnicou $g(x, y) = 0$. (Stručne povedané, hľadáme extrémny funkcie $f(x, y)$ na krivke $g(x, y) = 0$, alebo s väzbou $g(x, y) = 0$.)

Ak rovnica $g(x, y) = 0$ je rozumne jednoduchá, tak z nej možno vypočítať jednu z premenných x, y , dosadiť výsledok do funkcie f a tým previesť problém na výpočet extrému funkcie jednej premennej. Toto však nie je vždy možné, alebo to nemusí byť výhodné. Preto si v ďalšom vysvetlíme inú, univerzálnejšiu metódu založenú na jednoduchej geometrickej úvahe.

Predstavme si, že v rovine máme nakreslenú krivku určenú rovnicou $g(x, y) = 0$, a že v bodoch tejto krivky hľadáme napr. *najmenšiu hodnotu* funkcie $z = f(x, y)$, t.j. najmenšiu „výšku“ plochy $z = f(x, y)$ nad krivkou $g(x, y) = 0$. Predstierajme na chvíľu, že túto najmenšiu hodnotu (výšku) poznáme; nech je to c_0 . Teda, pre $c < c_0$ na krivke $g(x, y) = 0$ *neexistujú* žiadne body, pre ktoré by platilo $f(x, y) = c$. Spomeňme si, že krivky s rovnicou $f(x, y) = c$ sme nazvali *vrstevnicami*. Predchádzajúci fakt preložený do reči geometrie teda znamená, že pre $c < c_0$ sa vrstevnice $f(x, y) = c$ *nepretínajú* s krivkou $g(x, y) = 0$. Navyše, ak sa c , „blíži“ ku c_0 zľava, tak sa príslušné vrstevnice $f(x, y) = c$ „približujú“ v rovine xy ku krivke $g(x, y) = 0$. Hodnota c_0 je potom najmenšou hodnotou

parametra c , pre ktorú, pohybujúce sa „vrstevnice“, dosiahnu „krivku“ $g(x, y) = 0$, a to v nejakom bode $B = (x_0, y_0)$. Intuitívne sa dá nahliadnúť (a aj exaktne dokázať), že v bode B dôjde k *dotyku* vrstevnice $f(x, y) = c_0$ s krivkou $g(x, y) = 0$. To znamená, že v bode B majú krivky $f(x, y) = c_0$ a $g(x, y) = 0$ spoločnú dotyčnicu, a teda aj rovnobežné *normálové vektory*. Ako vieme z podkapitoly 4.2.4, normálový vektor k vrstevnici $f(x, y) = c_0$ v bode B je práve vektor *gradientu* v danom bode, čiže ∇f_B . Podobne, normálový vektor v tom istom bode ku krivke $g(x, y) = 0$ je ∇g_B . Keďže sme zistili, že tieto vektory musia byť *rovnobežné*, musia byť jeden násobkom druhého, t.j. existuje nejaké číslo λ také, že $\nabla f_B = \lambda \nabla g_B$.

Podobné závery platia aj pre určovanie *najväčšej* hodnoty funkcie $z = f(x, y)$ na krivke $g(x, y) = 0$. Uvedená metóda lokalizovania extrémov sa nazýva *Lagrangeova metóda* hľadania viazaných extrémov; uvedieme jej zhrnutie.

Lagrangeova metóda. Nech funkcie $f(x, y)$ a $g(x, y)$ majú spojité parciálne derivácie na nejakej oblasti v rovine. Nech na krivke $g(x, y) = 0$ funkcia $z = f(x, y)$ nadobúda svoju najmenšiu, resp. najväčšiu hodnotu v bode (x_0, y_0) . Potom súradnice (x_0, y_0) spolu s nejakým číslom λ spĺňajú nasledujúcu sústavu rovníc:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{a} \quad g(x, y) = 0. \quad (4.15)$$

Keďže gradient je vektor, ktorého zložky sú parciálne derivácie, môžeme prvú z uvedených rovníc napísať v tvare $f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} = \lambda(g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j})$. Sústava rovníc (4.15) je teda ekvivalentná so sústavou troch rovníc s tromi neznámymi:

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad g(x, y) = 0. \quad (4.16)$$

Poznamenajme, že Lagrangeova metóda má tvar implikácie, a teda s jej pomocou dostaneme len body (x_0, y_0) , ktoré sú *kandidátmi* na to, aby v nich funkcia f mala najmenšiu alebo najväčšiu hodnotu. O tom, či sa v danom bode nejaký extrém vôbec nadobudne, musíme rozhodnúť inak. Spravidla sa pritom opierame o geometrické úvahy a o fakt, že *spojitá funkcia na uzavretej a ohraničenej množine M vždy nadobudne svoju najmenšiu, resp. najväčšiu hodnotu v niektorom bode množiny M .*

Príklad 1. Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = xy$ na krivke $x^2 + 4y^2 = 8$.

Riešenie: Lagrangeova metóda pracuje pre krivky s rovnicou $g(x, y) = 0$, preto v našom prípade je $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 8$. Najprv vyriešime sústavu rovníc (4.16), teda:

$$y = \lambda \cdot 2x, \quad x = \lambda \cdot 8y, \quad x^2 + 4y^2 - 8 = 0.$$

Z týchto rovníc ihneď vidieť, že žiadna z neznámych x, y nemôže byť rovná nule. Z prvých dvoch rovníc potom máme:

$$\lambda = \frac{y}{2x}, \quad \lambda = \frac{x}{8y}, \quad \text{a teda} \quad \frac{y}{2x} = \frac{x}{8y}.$$

Odtiaľ máme $x^2 = 4y^2$, čo po dosadení do rovnice krivky $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ dáva $y = \pm 1$, a teda $x = \pm 2$. Tak dostávame štyri body, $B_1 = (2, 1)$, $B_2 = (-2, -1)$, $B_3 = (-2, 1)$ a $B_4 = (2, -1)$, ktoré sú kandidátmi na tie body, kde funkcia $f(x, y) = xy$ dosahuje najväčšiu, resp. najmenšiu hodnotu na krivke $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$. Pre príslušné funkčné hodnoty máme: $f(B_1) = f(B_2) = 2$, a $f(B_3) = f(B_4) = -2$. Keďže množina bodov určená rovnicou $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ je uzavretá a ohraničená (ide o elipsu so stredom v počiatku a poloosami $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$), hodnoty -2 a 2 sú naozaj najmenšou a najväčšou hodnotou funkcie f na krivke $g(x, y) = 0$. ♣

Lagrangeova metóda pre lokalizovanie viazaných extrémov **pre funkcie troch premenných** je obdobná. Nech $f = f(x, y, z)$ a $g = g(x, y, z)$ sú funkcie, ktoré majú na nejakej oblasti v \mathcal{R}^3 spojité

parciálne derivácie prvého rádu. Potom súradnice (x_0, y_0, z_0) bodu, v ktorom funkcia f nadobúda na ploche $g(x, y, z) = 0$ svoju najmenšiu, resp. najväčšiu hodnotu, spĺňajú sústavu rovníc

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{a} \quad g(x, y, z) = 0. \quad (4.17)$$

Po rozpísaní gradientov na zložky dostávame z (4.17) ekvivalentný tvar

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad f_z = \lambda g_z, \quad g(x, y, z) = 0. \quad (4.18)$$

Príklad 2. Na ploche $z^2 = 4 + xy$ nájdite body, ktoré sú najbližšie k počiatku súradnicovej sústavy.

Riešenie: Vzdialenosť bodu (x, y, z) od počiatku súradnicovej sústavy sa rovná $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Našou úlohou je nájsť body (x_0, y_0, z_0) na ploche $z^2 = 4 + xy$, v ktorých funkcia $d(x, y, z)$ nadobudne najmenšiu hodnotu; to nastane práve vtedy, keď za tých istých podmienok funkcia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ nadobudne najmenšiu hodnotu. (Inak povedané, namiesto minimalizácie vzdialenosti minimalizujeme jej *druhú mocninu*, čím sa vyhneme výrazom s odmocninami.) Hľadáme teda body, v ktorých funkcia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ nadobúda svoju najmenšiu hodnotu na ploche určenej rovnicou $4 + xy - z^2 = 0$; naša väzbová funkcia je teda $g(x, y, z) = 4 + xy - z^2$. Postupujeme Lagrangeovou metódou, teda zostavíme sústavu rovníc podľa (4.18):

$$2x = \lambda \cdot y, \quad 2y = \lambda \cdot x, \quad 2z = \lambda \cdot (-2z), \quad 4 + xy - z^2 = 0.$$

Nasledujúce dva odstavce budú venované riešeniu tejto sústavy. Z tretej rovnice máme $(1 + \lambda)z = 0$, a teda $z = 0$ alebo $\lambda = -1$. Ak $z = 0$, tak zo štvrtej rovnice máme $xy = -4$. Vyjadrením λ z prvých dvoch rovníc dostávame $2x/y = 2y/x$, čiže $|x| = |y|$. To v kombinácii s $xy = -4$ napokon dáva dve riešenia: $x = 2$ a $y = -2$, alebo $x = -2$ a $y = 2$. Pamätajme, že to všetko bolo v prípade $z = 0$; tak dostávame súradnice dvoch bodov, ktoré spĺňajú Lagrangeove rovnice (4.18): $B_1 = (2, -2, 0)$ a $B_2 = (-2, 2, 0)$.

Zostáva vyšetriť prípad, keď $z \neq 0$, a teda $\lambda = -1$. Potom z prvých dvoch rovníc dostávame $2x = -y$ a $2y = -x$, čo je možné iba vtedy, ak $x = y = 0$. Zo štvrtej rovnice potom máme $z^2 = 4$, a teda $z = \pm 2$. Tak dostávame súradnice ďalších dvoch bodov spĺňajúcich Lagrangeove rovnice: $B_3 = (0, 0, 2)$ a $B_4 = (0, 0, -2)$.

Body B_1 až B_4 sú teda kandidátmi na tie body, v ktorých funkcia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ nadobudne svoju najmenšiu hodnotu na ploche $4 + xy - z^2 = 0$. Pre hodnoty funkcie f v týchto bodoch máme: $f(B_1) = f(B_2) = 8$, a $f(B_3) = f(B_4) = 4$. Z geometrickej úvahy (vrstvom plochy funkcie f sú guľové plochy so stredom v počiatku) vyplýva, že hodnota 4 je naozaj *najmenšou* hodnotou funkcie f na ploche $4 + xy - z^2 = 0$, a nadobúda sa v bodoch $(0, 0, \pm 2)$.

Hľadaná najmenšia vzdialenosť plochy $z^2 = 4 + xy$ od počiatku súradnicovej sústavy je teda $\sqrt{4} = 2$ a realizuje sa v bodoch $(0, 0, 2)$ a $(0, 0, -2)$. ♣

Na záver uvedieme príklad, kedy o existencii extrémov pri použití Lagrangeovej metódy musíme rozhodnúť neštandardne.

Príklad 3. Určte najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y, z) = xyz$ na ploche určenej rovnicou $2x + y + 2z - 6 = 0$.

Riešenie: Postupujeme opäť Lagrangeovou metódou, čiže zostavíme sústavu rovníc podľa (4.18):

$$yz = \lambda \cdot 2, \quad xz = \lambda \cdot 1, \quad xy = \lambda \cdot 2, \quad 2x + y + 2z - 6 = 0.$$

Ak $\lambda = 0$, tak z prvých troch rovníc vidíme, že aspoň dve z premenných x, y, z sú rovné nule, a potom zo štvrtej rovnice máme tri „kandidátske“ body: $B_1 = (0, 0, 3)$, $B_2 = (0, 6, 0)$ a $B_3 = (3, 0, 0)$. Ak

$\lambda \neq 0$, tak žiadna z premenných x, y, z sa nemôže rovnať nule (prečo?). V tomto prípade z prvých troch rovníc dostaneme $2x = y = 2z$, a pomocou štvrtej rovnice máme posledný bod $B_4 = (1, 2, 1)$.

Vidíme, že $f(B_1) = f(B_2) = f(B_3) = 0$ a $f(B_4) = 2$. Môžeme teraz tvrdiť, že hodnoty 0 a 2 sú najmenšou a najväčšou hodnotou funkcie f na danej ploche? Nuž, ak by naša plocha určená rovnicou $2x + y + 2z - 6 = 0$ bola uzavretá a ohraničená, tak áno. Žiaľ, táto plocha je rovina v priestore, a teda je neohraničená, a uvedený princíp nemožno použiť.

Pomôžeme si nasledovne: Vyjadríme $z = 3 - x - y/2$ z rovnice roviny a dosadíme do našej funkcie f , čím dostávame funkciu dvoch premenných $g(x, y) = xy(3 - x - y/2)$. Ak teraz napr. $y = 2$, tak máme $g(x, 2) = 2x(2 - x)$, a táto funkcia pre $x \rightarrow \infty$ má limitu $-\infty$. To znamená, že naša funkcia nemá najmenšiu hodnotu! Podobne, ak napr. $y = -2$, tak $g(x, -2) = -2x(4 - x)$, a táto funkcia má pre $x \rightarrow \infty$ pre zmenu limitu $+\infty$, t.j. funkcia f nemá ani najväčšiu hodnotu! Vidíme, že napriek existencii až 4 kandidátov na extrémny vyplývajúcich z Lagrangeovej metódy, funkcia f v skutočnosti nemá ani najmenšiu, ani najväčšiu hodnotu na danej ploche (rovine). ♣

4.3.3 Globálne extrémny

V tejto časti využijeme fakty prezentované v predchádzajúcich dvoch častiach, a to na hľadanie maxima a minima funkcie vzhľadom na danú podmnožinu definičného oboru.

Definícia globálnych extrémov. Nech M je nejaká podmnožina definičného oboru funkcie $f = f(x, y)$. Hovoríme, že funkcia f má v bode $(x_0, y_0) \in M$ *globálne maximum na M* [*globálne minimum na M*], ak $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ [resp., $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$] pre každý bod $(x, y) \in M$. Globálne maximum a minimum súhrnne nazývame *globálnymi extrémami* na množine M .

V aplikáciách sa najčastejšie stretávame s prípadom, keď množina M je uzavretá časť roviny ohraničená nejakou krivkou K . Vtedy pri určovaní globálnych extrémov funkcie $f = f(x, y)$ na M postupujeme nasledovne:

1. Určíme najprv tie *lokálne* extrémny funkcie f , ktoré patria do *vnútra* množiny M .
2. Potom vypočítame *viazané* extrémny funkcie f na *hranici* množiny M , ktorá je tvorená krivkou K .
3. Napokon z takto stanovených hodnôt určíme globálne extrémny funkcie f na množine M .

Poznámka. Hraničná krivka K nie je vždy určená rovnicou tvaru $g(x, y) = 0$, a teda nie vždy je možné na určenie viazaných extrémov použiť Lagrangeovu metódu. V takom prípade na stanovenie najmenšej a najväčšej hodnoty funkcie f na krivke K používame dosadzovaciu metódu, ktorú vysvetlíme na nasledujúcom príklade.

Príklad 1. Vypočítajte globálne extrémny funkcie $f(x, y) = 2x^2 - x + y^2$ na množine M , ktorou je trojuholník v rovine xy s vrcholmi $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (2, 3)$.

Riešenie: Postupujeme podľa schémy uvedenej vyššie.

1. Najprv určíme lokálne extrémny funkcie f patriace do *vnútra* nášho trojuholníka. Ako vieme, kandidáti na lokálne extrémny, čiže stacionárne body, spĺňajú rovnice $f_x = f_y = 0$, teda $4x - 1 = 2y = 0$. Odtiaľ je zrejmé, že jediným stacionárnym bodom je bod $(1/4, 0)$. Avšak bod $(1/4, 0)$ evidentne neleží *vnútri* nášho trojuholníka! *Záver:* Vnútri trojuholníka M funkcia f nemá lokálne extrémny. (Pre zaujímavosť, keďže $f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$, a teda $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 8 > 0$, tak podľa časti (2) nášho D-testu je jasné, že v bode $(1/4, 0)$ má funkcia f lokálne minimum. V danom kontexte je však táto informácia irelevantná, pretože sa netýka vnútra oblasti M .)

2. Teraz vypočítame najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie f na hranici trojuholníka M . Hranica pozostáva z troch úsečiek AB , BC a CA , a nie je možné vyjadriť ju v tvare $g(x, y) = 0$ pre diferenco-

vateľnú funkciu g . Preto postupne každú z uvedených troch úsečiek vyjadríme samostatnou rovnicou a budeme pokračovať dosadzovacou metódou.

Úsečka AB je určená rovnicou $y = 1 - x$ pre $0 \leq x \leq 1$. Na tejto úsečke funkcia f má tvar $f(x, y) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - x + (1 - x)^2$. Bude nás teda zaujímať funkcia $h_{AB}(x) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - x + (1 - x)^2 = 3x^2 - 3x + 1 = 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$. Je zrejmé, že kvadratická funkcia h_{AB} má svoje minimum $1/4$ v bode $x_0 = 1/2$, teda na intervale $(0, 1/2)$ je *klesajúca* a na intervale $(1/2, 1)$ je *rastúca*. Jej maximum na intervale $0 \leq x \leq 1$ sa preto dosiahne v jednom z koncových bodov; keďže $h_{AB}(0) = h_{AB}(1) = 1$, dosahuje sa v oboch súčasne. *Záver:* Funkcia f na úsečke AB nadobúda najmenšiu hodnotu $1/4$, a to v bode $(1/2, 1/2)$ (nezabúdajme, že teraz máme $y = 1 - x$) a najväčšiu hodnotu 1 v bodoch A a B .

Úsečka BC je opísaná rovnicou $y = x + 1$ pre $0 \leq x \leq 2$. Na nej funkcia f má tvar $f(x, y) = f(x, x + 1) = 2x^2 - x + (x + 1)^2$. Tentoraz teda vyšetrujeme funkciu $h_{BC}(x) = f(x, x + 1) = 2x^2 - x + (x + 1)^2 = 3x^2 + x + 1 = 3(x + \frac{1}{6})^2 + \frac{11}{12}$. Ide opäť o kvadratickú funkciu s minimom v bode $-1/6$, čo je *mimo* nášho intervalu $0 \leq x \leq 2$. Na uvedenom intervale je teda funkcia $h_{BC}(x)$ *rastúca*, s najmenšou hodnotou $h_{BC}(0) = 1$ a najväčšou hodnotou $h_{BC}(2) = 15$. *Záver:* Funkcia f na úsečke BC nadobúda najmenšiu hodnotu 1 v bode $(0, 1) = B$ a najväčšiu hodnotu 15 v bode $(2, 3) = C$.

Úsečka AC je určená rovnicou $y = 3x - 3$ pre $1 \leq x \leq 2$. Tu pre funkciu f máme $f(x, y) = f(x, 3x - 3) = 2x^2 - x + (3x - 3)^2$. Napokon sa teda zaoberáme funkciou $h_{AC}(x) = f(x, 3x - 3) = 2x^2 - x + (3x - 3)^2 = 11x^2 - 19x + 9$. To je zasa kvadratická (a konvexná) funkcia, ktorej minimum je v bode spĺňajúcom rovnosť $h'_{AC}(x) = 22x - 19 = 0$, teda v bode $19/22$, ktorý je *mimo* intervalu $1 \leq x \leq 2$. Preto funkcia h_{AC} je pre $1 \leq x \leq 2$ *rastúca*, čiže pre jej extrémny na tomto intervale máme $h_{AC}(1) = 1$ a $h_{AC}(2) = 15$. *Záver:* Funkcia f na úsečke AC nadobúda najmenšiu hodnotu 1 (pre $x = 1$, t.j. v bode $(1, 0) = A$) a najväčšiu hodnotu 15 (pre $x = 2$, t.j. v bode $(2, 3) = C$).

3. Čaká nás finále – zhrnutie faktov získaných vyššie. Najprv sme zistili, že *vnútri* trojuholníka M naša funkcia nemá lokálne extrémny. Potom sme na hranici trojuholníka M identifikovali najväčšiu hodnotu 15 v bode $C = (2, 3)$ a najmenšiu hodnotu $1/4$ v bode $(1/2, 1/2)$. Uvedené dve hodnoty sú teda aj *globálnymi extrémami* funkcie f na množine M . ♣

Príklad 2. Vypočítajte najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 3$ na kruhu M so stredom v počiatku súradnicovej sústavy a s polomerom $2\sqrt{2}$.

Riešenie: Opäť použijeme predchádzajúcu schému.

1. Lokálne extrémny. Rovnice $f_x = f_y = 0$ majú po výpočte parciálnych derivácií tvar $2x + 2 = 2y - 2 = 0$, a teda jediným stacionárnym bodom je bod $(-1, 1)$. Keďže $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4 > 0$ a $f_{xx} = 2 > 0$, podľa D-testu má funkcia f v bode $(-1, 1)$ lokálne minimum. Bod $(-1, 1)$ tentoraz leží *vnútri* kruhu M , a teda v ďalšom s ním budeme počítať. *Záver:* Vnútri kruhu M má naša funkcia f jeden lokálny extrém, a to lokálne minimum v bode $(-1, 1)$ s hodnotou $f(-1, 1) = 1$.

2. Viazané extrémny. Hranica kruhu M je kružnica s rovnicou $x^2 + y^2 = 8$. Hľadáme teda najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie f na krivke $g(x, y) = 0$, pričom $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$. Použijeme Lagrangeovu metódu; podľa (4.16) sú „kandidáti“ na extrémálne hodnoty dané riešeniami sústavy rovníc

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad g(x, y) = 0,$$

teda v našom prípade

$$2x + 2 = \lambda \cdot 2x, \quad 2y - 2 = \lambda \cdot 2y, \quad x^2 + y^2 - 8 = 0.$$

Z prvých dvoch rovníc dostávame:

$$x = \frac{1}{\lambda - 1} \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{1 - \lambda},$$

čo po dosadení do tretej rovnice (čiže do rovnice kružnice) dáva:

$$\left(\frac{1}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 8.$$

Táto rovnica sa jednoducho upraví na tvar $(\lambda-1)^2 = \frac{1}{4}$, alebo $|\lambda-1| = \frac{1}{2}$. Odtiaľ dostávame dve riešenia, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. a teda z rovníc pre x a y aj dva body, $B_1 = (-2, 2)$ a $B_2 = (2, -2)$, ktoré sú „kandidátmi“ na nadobúdanie extrémálnych hodnôt. Keďže kružnica $g(x, y) = 0$ je uzavretá a ohraničená množina, funkcia f musí na nej nadobudnúť svoje maximum aj minimum. Z hodnôt $f(B_1) = f(-2, 2) = 3$ a $f(B_2) = f(2, -2) = 19$ je potom zrejmý záver: Funkcia f na hranici množiny M nadobúda najmenšiu hodnotu 3 v bode $(-2, 2)$ a najväčšiu hodnotu 19 v bode $(2, -2)$.

3. Zhrnutie. Z faktov získaných vyššie je už jednoduché urobiť celkový záver: Funkcia f na množine M nadobúda globálne minimum s hodnotou 1 v bode $(-1, 1)$ a globálne maximum s hodnotou 19 v bode $(2, -2)$. ♣

4.4 Rozličné úlohy

1. Zistite a znázornite definičné obory nasledujúcich funkcií:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $f(x, y) = xy - \cos(x + y)$ | b) $g(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ |
| c) $h(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$ | d) $k(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ |
| e) $l(r, t) = \ln(r \cos t)$ | f) $m(u, v) = \log_{19}(36 - 9u^2 - 4v^2)$ |
| g) $p(a, b) = \arccos(4a^2 + 9b^2)$ | h) $q(a, b) = 1/\sqrt{1 - ab}$ |
| i) $r(x, y) = \arcsin(2x + y)$ | j) $s(x, y) = \sqrt{\cos(\pi(x^2 + y^2))}$ |

2. Určte a popíšte definičné obory funkcií:

- | |
|--|
| a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ |
| b) $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$ |
| c) $h(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2)$ |
| d) $k(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$ |
| e) $l(r, s, t) = \log_9(9 - r^2 - s^2 - 4t^2)$ |
| f) $m(u, v, w) = w - \arccos(u^2 + v^2)$ |
| g) $p(u, v, w) = \sqrt{4u^2 + 9v^2 + w^2 - 36}$ |
| h) $q(a, b, c) = \sqrt{1 - c^2}/\sqrt{1 - ab}$ |
| i) $r(x, y, z) = \arcsin(2x + y - z)$ |
| j) $s(x, y, z) = \ln \sin(\pi(x^2 + y^2 + z^2))$ |

3. Pomocou znázornenia niekoľkých vrstevníc sa pokúste načrtnúť grafy nasledujúcich funkcií:

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x, y) = 2x - y + 2$ | b) $g(x, y) = 2 - x - y$ |
| c) $h(x, y) = x^2 + y^2$ | d) $k(x, y) = x^2 + 4y^2$ |
| e) $l(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ | f) $m(x, y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$ |
| g) $p(r, s) = e^{-(r^2 + s^2)}$ | h) $q(r, s) = 2s/(r^2 + s^2)$ |
| i) $r(u, v) = 2v/(u^2 + v^2)$ | j) $s(u, v) = u^2 - v^2$ |

4. Vypočítajte nasledujúce limity:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} 19x^2 + 6y - 66$ | b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,\pi)} \sin x \cos y$ |
| c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$ | d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$ |
| e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{9-xy}-3}{xy}$ | f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,4)} \frac{y^2-xy}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$ |
| g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-x-2y+2}{1-y}$ | h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{y-x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{y}}$ |
| i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{xy}$ | j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^4+y^4}$ |

5. Pomocou výberu vhodných kriviek „približovania sa“ k bodu (x_0, y_0) ukážte, že nasledujúce limity neexistujú:

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ | b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,3)} \frac{x+y}{x-y}$ |
| c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ | d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ |
| e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ | f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}$ |
| g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{y^2+x^4}$ | h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{y-x^2}$ |
| i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} \frac{y}{y-x^2}$ | j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2)}{x^2+y}$ |

6. Vypočítajte všetky prvé parciálne derivácie funkcií uvedených nižšie:

- | | |
|--|--|
| a) $f(x, y) = (\sin^2 x - 3 \cos^2 y)^{19}$ | b) $g(x, y) = \sqrt{x(3y^3 - x^2)}$ |
| c) $h(x, y) = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$ | d) $k(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ |
| e) $l(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ | f) $m(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ |
| g) $p(r, s, t) = \ln(\operatorname{tg}(r) - \sqrt{s^2 + t^2})$ | h) $q(r, s, t) = \sqrt{s \cos t + r \sin t}$ |
| i) $r(x, y, z) = (x + y)^{x+z}$ | j) $s(x, y, z) = (2x + 3z)^{\sqrt{yz}}$ |

7. K nasledujúcim funkciám nájdite štandardnú lineárnu aproximáciu v danom bode B :

- | | |
|---|---------------------|
| a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2,$ | $B = (1, 1)$ |
| b) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$ | $B = (3, 4)$ |
| c) $h(x, y) = \ln \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ | $B = (0, 0)$ |
| d) $k(x, y) = \sin(y/x)$ | $B = (1, \pi/3)$ |
| e) $l(x, y) = \frac{e^x}{\cos y}$ | $B = (0, 0)$ |
| f) $m(x, y) = \ln x + \ln y$ | $B = (1, 1)$ |
| g) $p(x, y, z) = xy + yz + zx$ | $B = (1, 1, 1)$ |
| h) $q(x, y, z) = \frac{\sin xy}{z}$ | $B = (1, \pi/4, 1)$ |

8. S akou približnou hodnotou relatívnej chyby objemu kužeľa môžeme počítať, ak relatívna chyba merania polomeru podstavy je 3 percentá a výšky 2 percentá?

9. Doba kmitu matematického kyvadla dĺžky l je daná vzťahom $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. S akou približnou chybou je určená doba kmitu T , ak dĺžka kyvadla l je a gravitačná konštanta g sú určené s absolútnymi chybami Δl a Δg ?

10. Ukážte, že každá z nasledujúcich funkcií spĺňa Laplaceovu rovnicu $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$:

- a) $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2$ b) $f(x, y, z) = 3x(y^2 + z^2) - 2x^3$
 c) $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$

11. Ukážte, že pre ľubovoľné konštanty a, b funkcia

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x-b)^2/(4a^2t)}$$

spĺňa tzv. rovnicu pre šírenie tepla $u_{xx} = (1/a^2)u_t$.

12. Pomocou reťazového pravidla ukážte, že (za predpokladu spojitosti parciálnych derivácií druhého rádu) ľubovoľná funkcia $z = f(x + at) + g(x - at)$, kde a je konštanta, spĺňa tzv. vlnovú rovnicu $z_{tt} - a^2 z_{xx} = 0$.

13. Použitím reťazového pravidla dokážte, že (za predpokladu spojitosti parciálnych derivácií druhého rádu) pre ľubovoľné funkcie jednej premennej r a s je funkcia $z = xr(x/y) + ys(x/y)$ riešením rovnice $x^2 z_{xx} + 2xy \cdot z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$.

14. Pre nasledujúce funkcie f vypočítajte ich gradient ∇f vo všeobecnosti, a potom aj deriváciu v danom bode B v smere daného vektora \mathbf{v} (pozor na nejednotkové vektory!):

- a) $f(x, y) = x^2 y + y^2 x$, $B = (1, 2)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
 b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $B = (1, 1)$, $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
 c) $f(x, y) = \arcsin(x - 2y)$, $B = (2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
 d) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $B = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 e) $f(x, y, z) = 3e^z \cos xy$, $B = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 f) $f(x, y, z) = \sin xy + e^{xz} + \ln(yz)$, $B = (0, 1, 1/2)$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 g) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $B = (1, -2, 2)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 h) $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $B = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 i) $f(x, y, z) = \arcsin(z/\sqrt{x^2 + y^2})$, $B = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 j) $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3$, $B = (2, 2, -1)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

15. Vypočítajte rovnice dotykových rovín ku daným plochám v daných bodoch B metódou gra-

dientov alebo metódou linearizácie:

- a) $z = x^2 + y^2$, $B = (1, -2, 5)$
 b) $z^2 = x^2 + y^2$, $B = (-3, 4, 5)$
 c) $x^2 + y^2 + z^2 = 19$, $B = (3, -1, 3)$
 d) $xz + e^{yz} - xy^2 = 3$, $B = (1, 0, 2)$
 e) $z = 4 \arctan \sqrt{xy}$, $B = (1, 1, \pi)$
 f) $z = e^{-(x^2+y^2)/25}$, $B = (4, 3, e^{-1})$
 g) $e^{x-y} \cos(yz) = -e$, $B = (2, 1, \pi)$
 h) $\log_2(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{y + 2z} = 4$, $B = (1, 2, 1)$

16. Určte stacionárne body, lokálne extrém a sedlové body grafov nasledujúcich funkcií:

- a) $f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 - 4y + 5$
 b) $g(x, y) = x^2 + xy + 7x - y^2 + 11y - 8$
 c) $h(u, v) = uv - u^2 - v^2 - 6u$
 d) $k(u, v) = 5 + 2u + uv + v^2 + 3v$
 e) $l(a, b) = 2a^2 + 3ab + 4b^2 - 5a + 2b$
 f) $m(a, b) = 4a + 19 - a^2 - ab - b^2 - b$
 g) $p(r, s) = r^2 - 2rs + s^2 + 4r - 4s + 4$
 h) $q(r, s) = r^2 - 2s^2 - 3r + 5s - 19$
 i) $u(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y - 6$
 j) $v(x, y) = xy + 8y - 2x^2 - 3y^2 - 9x - 66$

17. Vypočítajte *všetky* stacionárne body, lokálne extrém a sedlové body funkcií:

- a) $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^4$
 b) $g(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$
 c) $h(u, v) = u^3 - u^2 - v^3 + v^2$
 d) $k(u, v) = 5 - u^3 + 2uv + v^3$
 e) $l(a, b) = a^3 + b^3 - 3a^2 + 3b^2 + 19$
 f) $m(a, b) = 2a^3 - 6a^2 - 6ab - 3b^2 + 5$
 g) $p(r, s) = r^4 - 4rs + s^4 - 1$
 h) $q(r, s) = 5rs + 25/r + 8/s$
 i) $u(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$
 j) $v(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

18. Lagrangeovou metódou určte najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $z = f(x, y)$ na krivke

$g(x, y) = 0$, ak:

- | | | |
|----|------------------------------|-------------------------------------|
| a) | $f(x, y) = xy + x - y + 5$ | na krivke $x + y = 1$ |
| b) | $f(x, y) = 15x^{2/3}y^{1/3}$ | na krivke $x + y = c$, $c > 0$ |
| c) | $f(x, y) = y^2 - x$ | na krivke $x^2 + y^2 = 1$ |
| d) | $f(x, y) = x^2 - y^2$ | na krivke $x^2 + y^2 = 9$ |
| e) | $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2$ | na krivke $x^2 + y^2 = 25$ |
| f) | $f(x, y) = x + y$ | na krivke $xy = 36$, $x, y > 0$ |
| g) | $f(x, y) = xy$ | na krivke $x + y = 10$ |
| h) | $f(x, y) = x^2 + y^2$ | na krivke $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ |

19. Lagrangeovou metódou určte najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $w = f(x, y, z)$ na ploche $g(x, y, z) = 0$, ak:

- | | | |
|----|--------------------------------|------------------------------------|
| a) | $f(x, y, z) = -xyz$ | na ploche $3x + 4y + z - 6 = 0$ |
| b) | $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ | na ploche $x + y + z = 9$ |
| c) | $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ | na ploche $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ |
| d) | $f(x, y, z) = xyz$ | na ploche $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ |
| e) | $f(x, y, z) = xyz^2$ | na ploche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ |
| f) | $f(x, y, z) = (xyz)^2$ | na ploche $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ |
| g) | $f(x, y, z) = x + y + z$ | na ploche $1/x + 4/y + 9/z = 6$ |
| h) | $f(x, y, z) = 2x^2 - 4y + yz$ | na ploche $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ |

20) Vypočítajte globálne extrémny nasledujúcich funkcií na daných dvojrozmerných útvaroch M :

- $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x$, M je obdĺžnik s vrcholmi $(0, -2)$, $(3, -2)$, $(3, 1)$ a $(0, 1)$.
- $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 5$, M je obdĺžnik s vrcholmi $(0, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 2)$ a $(0, 2)$.
- $f(x, y) = x^2 - 8xy + 8y^2$, M je trojuholník s vrcholmi $(0, 0)$, $(4, 0)$ a $(4, 4)$;
- $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x$, M je trojuholník s vrcholmi $(0, 0)$, $(3, 0)$ a $(0, 3)$;
- $f(x, y) = xy^2(4 - x - y)$, M je trojuholník s vrcholmi $(0, 0)$, $(6, 0)$ a $(0, 6)$;
- $f(x, y) = x^2 + 2x + 3y^2$, M je kruh so stredom v počiatku a s polomerom 1.
- $f(x, y) = x^2 - y^2$, M je kruh so stredom v počiatku a s polomerom 2.
- $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, M je kruh so stredom v počiatku a s polomerom 2.

21. Do poglobule s polomerom r vpíšte pravouhlý rovnobežnosten s najväčším a) objemom, b) povrchom.

22. Do kužela s polomerom r a výškou v vpíšte valec s najväčším a) objemom, b) povrchom.

23. Zo všetkých valcových nádob s daným povrchom S nájdite takú, ktorá má najväčší objem.

24. Pomocou Lagrangeovej metódy nájdite vzdialenosť roviny $3x + y + 2z = 13$ od bodu $(1, 1, 1)$.

25. Na ploche $z = 3 + xy$ nájdite bod, ktorý je najbližšie ku počiatku súradnicovej sústavy.

4.5 Výsledky

1. a) \mathcal{R}^2 ; celá rovina.
 - b) $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 7^2\}$; kruh so stredom v počiatku a polomerom 7.
 - c) $\{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$; medzikružie ohraničené kružnicami so stredom v počiatku a polomerami 1 a $\sqrt{3}$.
 - d) $\{(x, y); |x| \geq |y|\}$; časť roviny ohraničená priamkami $y = x$ a $y = -x$ a obsahujúca os x .
 - e) $\{(r, t); [r > 0 \text{ a } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < t < \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \text{ alebo } [r < 0 \text{ a } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < t < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]\}$; sústava „striedajúcich sa“ pásov v rovine.
 - f) $\{(u, v); u^2/4 + v^2/9 < 1\}$; vnútro elipsy s poloosami 2 a 3.
 - g) $\{(a, b); 4a^2 + 9b^2 \leq 1\}$; elipsa s poloosami $1/2$ a $1/3$.
 - h) $\{(a, b); ab < 1\}$; časť roviny ohraničená vetvami hyperboly $b = 1/a$ obsahujúca bod $(0, 0)$.
 - i) $\{(x, y); -1 \leq 2x + y \leq 1\}$; pás ohraničený priamkami $y = -1 - 2x$ a $y = 1 - 2x$ obsahujúci bod $(0, 0)$.
 - j) $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ spolu s $\{(x, y); -\frac{1}{2} + 2k \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} + 2k\}$ pre $k \geq 1$; sústava koncentrických medzikruží.
2. a) $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$; guľa so stredom v počiatku a polomerom 1.
 - b) $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$; doplnok vnútra gule so stredom v počiatku a polomerom 2.
 - c) $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$; guľa so stredom v počiatku a polomerom 1.
 - d) $\{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z\}$; rotačný paraboloid s osou z .
 - e) $\{(r, s, t); r^2 + s^2 + 4t^2 < 9\}$; vnútrajšok elipsoidu s poloosami 3, 3, a $3/2$.
 - f) $\{(u, v, w); u^2 + v^2 \leq 1\}$; valec s osou w a polomerom 1.
 - g) $\{(u, v, w); 4u^2 + 9v^2 + w^2 \geq 36\}$; doplnok elipsoidu a poloosami 3, 2, a 6.
 - h) $\{(a, b, c); -1 \leq c \leq 1 \text{ a } ab < 1\}$; vrstva „nad“ a „pod“ tou časťou roviny určenej osami a, b , ktorá je ohraničená vetvami hyperboly $b = 1/a$ a obsahuje počiatok; hrúbka vrstvy je 2.
 - i) $\{(x, y, z); -1 \leq 2x + y - z \leq 1\}$; vrstva ohraničená rovinami $z = 2x + y - 1$ a $z = 2x + y + 1$.
 - j) $\{(x, y, z); 2k < x^2 + y^2 + z^2 < 2k + 1\}$ pre $k \geq 0$. Zjednotenie nekonečne mnohých množín M_k v priestore, kde M_k je časť priestoru ohraničená guľovými plochami so stredmi v počiatku a polomerami $\sqrt{2k}$ a $\sqrt{2k+1}$; hraničné plochy do M_k nepatria.
3. Riešenia sú na obrázkoch 4.10 az 4.19.

Obr. 4.10: $f(x, y) = 2x - y + 2$

4. a) 28. b) 0. c) $1/2$. d) $1/3$. e) $-1/6$. f) 16. g) 1. h) -4. i) 0. j) 1.

5. a)-f): Použite priamky $y = k_1x$ a $y = k_2x$.
g)-j): Použite paraboly $y = k_1x^2$ a $y = k_2x^2$.

Obr. 4.11: $g(x, y) = 2 - x - y$

Obr. 4.12: $h(x, y) = x^2 + y^2$

Obr. 4.13: $k(x, y) = x^2 + 4y^2$

Obr. 4.14: $l(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Obr. 4.15: $m(x, y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$

Obr. 4.16: $p(r, s) = e^{-(r^2+s^2)}$

Obr. 4.17: $q(r, s) = 2s/(r^2 + s^2)$

Obr. 4.18: $r(u, v) = 2v/(u^2 + v^2)$

Obr. 4.19: $s(u, v) = u^2 - v^2$

6.

a) $f_x = 19(\sin^2 x - 3 \cos^2 y)^{18} \sin 2x$; $f_y = 57(\sin^2 x - 3 \cos^2 y)^{18} \sin 2y$.

b) $g_x = \frac{3}{2} \frac{y^3 - x^2}{\sqrt{x(3y^3 - x^2)}}$; $g_y = \frac{9y^2}{2} \sqrt{\frac{x}{3y^3 - x^2}}$.

c) $h_x = 1/(1 + x^2)$; $h_y = -1/(1 + y^2)$.

d) $k_x = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2 - y^2}}$; $k_y = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}\sqrt{x^2 - y^2}}$.

e) $l_x = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$; $l_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$; $l_z = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}$.

f) $m_x = -\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$; dále symetricky.

g) $p_r = [(\operatorname{tg}(r) - \sqrt{s^2 + t^2}) \cos^2 r]^{-1}$; $p_t = -s[\sqrt{s^2 + t^2} \operatorname{tg}(r) - s^2 - t^2]^{-1}$; atd.

h) $q_r = \frac{\sin t}{2\sqrt{s \cos t + r \sin t}}$; $q_s = \frac{\cos t}{2\sqrt{s \cos t + r \sin t}}$; $q_t = \frac{-s \sin t + r \cos t}{2\sqrt{s \cos t + r \sin t}}$.

i) $r_x = (x + y)^{x+z} [\ln(x + y) + \frac{x+z}{x+y}]$; $r_y = (x + y)^{x+z} \frac{x+z}{x+y}$;

$$r_z = (x + y)^{x+z} \ln(x + y).$$

j) $s_x = 2\sqrt{yz}(2x + 3z)^{\sqrt{yz}-1}$; $s_y = \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{y}}(2x + 3z)^{\sqrt{yz}} \ln(2x + 3z)$;

$$s_z = (2x + 3z)^{\sqrt{yz}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{z}} \ln(2x + 3z) + \frac{3\sqrt{yz}}{2x+3y} \right].$$

7.

a) $f(x, y) \doteq 1 - x - y$.

- b) $g(x, y) \doteq (3x + 4y)/5$.
 c) $h(x, y) \doteq 0$.
 d) $k(x, y) \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}x + \frac{1}{2}y$.
 e) $l(x, y) \doteq 1 + x$.
 f) $m(x, y) \doteq x + y - 2$.
 g) $p(x, y, z) \doteq 2(x + y + z) - 3$.
 h) $q(x, y, z) \doteq \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4}x + y - z + \frac{4-\pi}{2})$.

8. 8 percent.

9. $\Delta T = \pi\sqrt{\frac{g}{l}}(\Delta l + \frac{1}{g^2}\Delta g)$.

14.

- a) $\nabla f = y(2x + y)\mathbf{i} + x(x + 2y)\mathbf{j}$; $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $D_{\mathbf{u}}f(B) = 4/5$.
 b) $\nabla f = \frac{2x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$; $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$; $D_{\mathbf{u}}f(B) = 7/5$.
 c) $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}\mathbf{j}$; $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $D_{\mathbf{u}}f(B) = 3/\sqrt{2}$.
 d) $\nabla f = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; $\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$; $D_{\mathbf{u}}f(B) = 5/3$.
 e) $\nabla f = -(3ye^z \sin xy)\mathbf{i} - (3xe^z \sin xy)\mathbf{j} + (3e^z \cos xy)\mathbf{k}$; $\mathbf{u} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; $D_{\mathbf{u}}f(B) = 2$.
 f) $\nabla f = (y \cos xy + ze^{xz})\mathbf{i} + (x \cos xy + \frac{1}{y})\mathbf{j} + (xe^{xz} + \frac{1}{z})\mathbf{k}$; $\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$; $D_{\mathbf{u}}f(B) = 1$.
 g) $\nabla f = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$; $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$; $D_{\mathbf{u}}f(B) = 1/(3\sqrt{3})$.
 h) $\nabla f = -\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\mathbf{i} - \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\mathbf{j} - \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\mathbf{k}$; $\mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$;
 $D_{\mathbf{u}}f(B) = 1/(3\sqrt{3})$.
 i) $\nabla f = -\frac{xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\mathbf{i} - \frac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\mathbf{k}$; $\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$;
 $D_{\mathbf{u}}f(B) = -1/3$.
 j) $\nabla f = 3x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{i} + 3y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{j} + 3z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{k}$; $\mathbf{u} = 0\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j} - \frac{4}{5}\mathbf{k}$;
 $D_{\mathbf{u}}f(B) = 18$.

15.

- a) $2x - 4y - z - 5 = 0$.
 b) $3x - 4y + 5z = 0$.
 c) $3x - y + 3z - 19 = 0$.
 d) $2x + 2y + z - 4 = 0$.
 e) $x + y - z + (\pi - 2) = 0$.
 f) $8x + 6y + 25ez - 75 = 0$.

g) $x - y - 1 = 0$.

h) $2x + (4 + \ln 2)y + 2 \ln 2z - (10 + 4 \ln 2) = 0$.

16. a) Stacionárny bod $(3, 2)$, v ktorom má funkcia lokálne minimum.b) Stacionárny bod $(-5, 3)$, v ktorom má funkcia sedlový bod.c) Stacionárny bod $(-4, -2)$, v ktorom má funkcia lokálne maximum.d) Stacionárny bod $(1, -2)$, v ktorom má funkcia sedlový bod.e) Stacionárny bod $(2, -1)$, v ktorom má funkcia lokálne minimum.f) Stacionárny bod $(3, -2)$, v ktorom má funkcia lokálne maximum.g) Nekonečne mnoho stacionárnych bodov tvaru $(r, r + 2)$. Keďže $D = 0$, nemožno záver urobiť podľa D-testu. Avšak ľahkou úpravou vidíme, že $p(r, s) = (r - s + 2)^2$, a teda v každom z uvedených stacionárnych bodov nadobúda naša funkcia lokálne minimum.h) Stacionárny bod $(3/2, 5/4)$, v ktorom má funkcia sedlový bod.i) Stacionárny bod $(3, -3)$, v ktorom má funkcia lokálne minimum.j) Stacionárny bod $(-2, 1)$, v ktorom má funkcia lokálne maximum.17. a) Jediný stacionárny bod $(0, 0)$. Keďže $D = 0$, nie je možné použiť D-test. Zo správania sa funkcie f pozdĺž osi y (teda pre $x = 0$) a pozdĺž paraboly $x = y^2$ je však jasné, že bod $(0, 0)$ je sedlovým bodom.b) Dva stacionárne body $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (-1, -1)$; bod B_1 je sedlovým bodom a v B_2 sa nadobúda lokálne maximum.c) Štyri stacionárne body $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, 2/3)$, $B_3 = (2/3, 0)$, $B_4 = (2/3, 2/3)$. Body B_1 a B_4 sú sedlovými bodmi, v bode B_2 má funkcia lokálne maximum a v B_3 má lokálne minimum.d) Dva stacionárne body $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (-2/3, 2/3)$; bod B_1 je sedlovým bodom a v B_2 sa nadobúda lokálne minimum.e) Štyri stacionárne body $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, -2)$, $B_3 = (2, 0)$, $B_4 = (2, -2)$. Body B_1 a B_4 sú sedlovými bodmi, v bode B_2 má funkcia lokálne maximum a v B_3 má lokálne minimum.f) Dva stacionárne body $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (1, -1)$; bod B_1 je bodom lokálneho maxima a B_2 je sedlovým bodom.g) Tri stacionárne body $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (1, 1)$, $B_3 = (-1, -1)$; bod B_1 je sedlovým bodom a v bodoch B_2 a B_3 sa nadobúda lokálne minimum.h) Jediný stacionárny bod $(5/2, 4/5)$, v ktorom sa nadobúda lokálne minimum.i) Osem stacionárnych bodov $B_1 = (0, 1)$, $B_2 = (0, -1)$, $B_3 = (1, 0)$, $B_4 = (-1, 0)$, $B_5 = (1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$, $B_6 = (-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$, $B_7 = (1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$, $B_8 = (-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$. Body B_1 až B_4 sú sedlovými bodmi, v bodoch B_5 a B_8 sa nadobúda lokálne minimum a v bodoch B_6 a B_7 lokálne maximum.j) Päť stacionárnych bodov $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, 1)$, $B_3 = (0, -1)$, $B_4 = (1, 0)$, $B_5 = (-1, 0)$; v bode B_1 je lokálne minimum, v bodoch B_4 a B_5 sa nadobúda lokálne maximum, a B_2 , B_3 sú sedlové body.18. a) Najväčšia hodnota $25/4$ v bode $(3/2, -1/2)$; najmenšia hodnota neexistuje.b) Najväčšia hodnota $5c \cdot 4^{1/3}$ v bode $(2c/3, c/3)$; najmenšia hodnota neexistuje.c) Najväčšia hodnota $5/4$ v bodoch $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ a $(-1/2, \sqrt{3}/2)$; najmenšia hodnota -1 v bode $(1, 0)$.d) Najväčšia hodnota 9 v bodoch $(-3, 0)$ a $(3, 0)$; najmenšia hodnota -9 v bodoch $(0, -3)$ a $(0, 3)$.e) Najväčšia hodnota 125 v bodoch $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ a $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$; najmenšia hodnota 0 v bodoch $(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ a $(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.f) Najmenšia hodnota 12 v bode $(6, 6)$; najväčšia hodnota neexistuje.g) Najväčšia hodnota 25 v bode $(5, 5)$; najmenšia hodnota neexistuje.

h) Najmenšia hodnota 0 v bode $(0, 0)$; najväčšia hodnota 20 v bode $(2, 4)$.

19. a) Najmenšia a najväčšia hodnota v danom prípade *neexistuje*. Lagrangeova metóda síce dáva 4 kandidátov na extrém, ale v žiadnom z nich sa naozaj *najmenšia a najväčšia* hodnota nenadobúda. Pozri Príklad 3 v 4.3.2.

b) Najmenšia hodnota je 27 a nadobúda sa v bode $(3, 3, 3)$; najväčšia hodnota *neexistuje*.

c) Najmenšia hodnota -14 v bode $(-1, -2, -3)$, najväčšia hodnota 14 v bode $(1, 2, 3)$.

d) Najmenšia hodnota -27 v bodoch $(-3, 3, 3)$, $(3, -3, 3)$, $(3, 3, -3)$ a $(-3, -3, -3)$; najväčšia hodnota 27 v bodoch $(3, 3, 3)$, $(-3, -3, 3)$, $(-3, 3, -3)$ a $(3, -3, -3)$.

e) Najmenšia hodnota $-1/8$ v bodoch $(1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$, $(1/2, -1/2, -1/\sqrt{2})$, $(-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ a $(-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})$; najväčšia hodnota $1/8$ v bodoch $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, $(1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})$, $(-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$ a $(-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2})$.

f) Najmenšia hodnota je 0 a nadobúda sa v nekonečne mnohých bodoch (práve v tých, ktoré majú aspoň jednu súradnicu nulovú); najväčšia hodnota 1 sa nadobúda v 8 bodoch tvaru $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

g) Najmenšia a najväčšia hodnota v danom prípade *neexistuje*; pozri aj Príklad 3 v 4.3.2.

h) Najmenšia hodnota $-6\sqrt{3}$ v bode $(0, \sqrt{3}, -2)$; najväčšia hodnota $32/3$ v bodoch $(\pm 4/3, -4/3, -4/3)$.

20. a) Globálne minimum -2 v bode $(2, -1)$ vnútri M ; globálne maximum 11 v bode $(3, 1)$ na hranici M .

b) Globálne minimum 4 v bodoch $(1, 1)$ vnútri M a $(0, -1)$ na hranici M ; globálne maximum 18 v bode $(2, -1)$ na hranici M .

c) Globálne minimum -16 v bode $(4, 2)$ na hranici M ; globálne maximum 16 v bodoch $(4, 0)$ a $(4, 4)$ na hranici M .

d) Globálne minimum -18 v bode $(0, 3)$ na hranici M ; globálne maximum 0 v bode $(0, 0)$ na hranici M .

e) Globálne minimum -64 v bode $(2, 4)$ na hranici M ; globálne maximum 4 v bode $(1, 2)$ vnútri M .

f) Globálne minimum -1 v bode $(-1, 0)$ na hranici M ; globálne maximum $7/2$ v bodoch $(1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ na hranici M .

g) Globálne minimum -4 v bodoch $(0, \pm 2)$ na hranici M ; globálne maximum 4 v bodoch $(\pm 2, 0)$ na hranici M .

h) Globálne minimum 0 v bode $(0, 0)$ vnútri M ; globálne maximum $3/e$ v bodoch $(0, \pm 1)$ vnútri M .

21. a) aj b): V oboch prípadoch je riešením kocka s hranou $2r/\sqrt{3}$.

22. a) Valec má polomer $2r/3$ a výšku $v/3$.

b) Úloha má zmysel len ak $v > 2r$, a potom je riešením valec s polomerom $vr/(2v - 2r)$ a výškou $v(v - 2r)/(2v - 2r)$.

23. Riešením je valec, ktorého výška sa rovná jeho priemeru.

24. Bod $(5/2, 3/2, 2)$.

25. Body $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

Kapitola 5

Diferenciálna geometria

5.1 Úvod

Diferenciálna geometria je oblasť matematiky, v ktorej sa skúmajú vlastnosti geometrických útvarov (v našom prípade kriviek v priestore alebo v rovine) metódami diferenciálneho počtu. Preto bude užitočné ovládať základy analytickej geometrie, funkcie jednej reálnej premennej a diferenciálny počet (kapitoly 2, 6, 7, Riešené úlohy z matematiky I). Diferenciálna geometria dáva konkrétnu náplň formálnemu matematickému aparátu množstvom aplikácií fyzikálneho rázu napr. v mechanike, geodézii a kartografii.

5.2 Pojem krivky

Krivku k si môžeme predstaviť ako súvislú dráhu pohybujúceho sa bodu P . Ak zvolíme karteziánsku súradnicovú sústavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, poloha bodu $P = P(t)$ v čase t je jednoznačne daná polohovým vektorom $\mathbf{p}(t) = \mathbf{P} - \mathbf{O}$.

Obr. 5.1: Krivka.

5.2.1 Vektorová funkcia

Základom theórie kriviek je pojem **vektorovej funkcie** jednej reálnej premennej, funkcie \mathbf{p} , ktorá každému číslu t z jednorozmerného intervalu J priraduje práve jeden vektor $\mathbf{p}(t)$. Pre túto funkciu používame zápis

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \quad t \in J, \quad (5.1)$$

alebo po zložkách

$$\mathbf{p} = [x(t), y(t), z(t)], \quad t \in J, \quad (5.2)$$

resp.

$$\mathbf{p} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in J, \quad (5.3)$$

kde $x(t), y(t), z(t)$ sú reálne funkcie definované na spoločnom intervale J . Pre vektorovú funkciu môžeme vzhľadom na vzťah (5.3) definovať pojmy limita, spojitost' a derivácia pomocou týchto pojmov pre reálnu funkciu reálnej premennej (kapitoly 6.5, 6.6 a 7, Riešené úlohy z matematiky I).

Vektorová funkcia $\mathbf{p}(t)$ má v bode t_0 **limitu** \mathbf{p}_0

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0,$$

ak pre každú postupnosť $\{t_n\}$ takú, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0, \quad t_n \neq t_0, \quad t_n \in J,$$

príslušná postupnosť funkčných hodnôt $\{\mathbf{p}(t_n)\}$ konverguje k vektoru \mathbf{p}_0 . Vektorová funkcia (5.3) má v bode t_0 limitu práve vtedy, ak v tomto bode majú limitu reálne funkcie $x(t), y(t), z(t)$.

Vektorová funkcia $\mathbf{p}(t)$ je **spojitá** v bode t_0 , ak

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0).$$

Vektorová funkcia (5.3) je spojitá v bode t_0 práve vtedy, ak sú v tomto bode spojité reálne funkcie $x(t), y(t), z(t)$.

Vektorová funkcia $\mathbf{p}(t)$ má **deriváciu** $d\mathbf{p}(t)/dt$ v bode t_0 ak existuje limita

$$\left[\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right]_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}{t - t_0}.$$

Vektorová funkcia (5.3) má v bode t_0 deriváciu práve vtedy, ak v tomto bode majú deriváciu reálne funkcie $x(t), y(t), z(t)$.

5.2.2 Vektorová rovnica krivky

Krivkou k nazývame graf vektorovej funkcie $\mathbf{p}(t)$ reálnej premennej (parametra) t , ak funkcia $\mathbf{p}(t)$ má tieto vlastnosti:

1. je definovaná na intervale J ,
2. je spojitá na intervale J ,
3. existuje taký rozklad $\{\langle t_{k-1}, t_k \rangle\}$, $k = 1, 2, \dots$ intervalu J , že je prostá na množine $J - \{t_k\}_k$.

Rovnicu (5.1) (resp. (5.2) a (5.3)) nazývame **vektorovou rovnicou** krivky k v danom súradnicovom systéme. Ak je funkcia $\mathbf{p}(t)$ prostá na celom intervale J , hovoríme o **jednoduchej krivke**, v opačnom prípade krivka obsahuje **viacnásobné body**. Ak je funkcia $\mathbf{p}(t)$ definovaná na uzavretom intervale $J = \langle a, b \rangle$, potom krivka sa nazýva **oblúk**.

Príklad 1. Vektorová funkcia

$$\mathbf{p}(t) = [r \cos t, r \sin t, ct], \quad (5.4)$$

kde $t \in (-\infty, \infty)$, $r > 0$, $c \neq 0$ je spojitá a prostá na obore definície. Jej grafom je rovnomerná skrutkovica, ležiaca na rotačnej valcovej ploche $x^2 + y^2 = r^2$. Je to jednoduchá krivka. ♣

Príklad 2. Krivka $\mathbf{p}(t) = [t^2, t - t^3, t^4 + 1]$ nie je jednoduchá, lebo pre $t = 1$ a $t = -1$ je $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(-1)$, teda funkcia $\mathbf{p}(t)$ nie je prostá. Bod $[1, 0, 2]$ je dvojnásobným bodom tejto krivky. ♣

5.2.3 Parametrické, explicitné a implicitné rovnice krivky

Vektorová rovnica (5.1) krivky je ekvivalentná s **parametrickými rovnicami** priestorovej krivky

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in J. \quad (5.5)$$

Ak sú dané dve reálne funkcie

$$y = f(x), \quad z = g(x), \quad x \in J, \quad (5.6)$$

resp.

$$z = f(y), \quad x = g(y), \quad y \in J,$$

alebo

$$x = f(z), \quad y = g(z), \quad z \in J,$$

definované a spojité na spoločnom intervale J , potom sú rovnice (5.6) (resp. iná uvedená dvojica rovníc) **explicitnými rovnicami** krivky v priestore. Ak sú dané dve reálne funkcie

$$h(x, y, z) = 0, \quad l(x, y, z) = 0, \quad (5.7)$$

definované a spojité na spoločnej trojrozmernej oblasti $\Omega \in E^3$ a hodnosť matice

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial l}{\partial x} & \frac{\partial l}{\partial y} & \frac{\partial l}{\partial z} \end{pmatrix}$$

je rovná dvom v každom bode $[x, y, z]$, ktorý vyhovuje rovnicam (5.7), potom rovnice (5.7) sú **implicitnými rovnicami** krivky v priestore. Krivka je tak definovaná ako prienik dvoch plôch daných rovnicami (5.7).

Príklad 3. Napíšme parametrické, explicitné a implicitné rovnice skrutkovice (5.4)

Riešenie: Rozpísaním vektorovej rovnice (5.4) dostaneme tri parametrické rovnice skrutkovice v tvare

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = ct.$$

Z poslednej rovnice vyjadríme parameter t ako funkciu premennej z

$$t = z/c,$$

a dosadíme ho do prvých dvoch rovníc. Dostaneme nasledujúci tvar

$$x = r \cos(z/c), \quad y = r \sin(z/c)$$

explicitných rovníc $x = f(z)$, $y = g(z)$ danej skrutkovice. Implicitné rovnice napíšeme veľmi jednoducho

$$x - r \cos(z/c) = 0, \quad y - r \sin(z/c) = 0.$$



Príklad 4. Napíšme parametrické vyjadrenie krivky danej implicitnými rovnicami

$$xy - 1 = 0, \quad x + y - z = 0, \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (5.8)$$

Riešenie: Z rovníc (5.8) vyjadríme dve premenné ako funkciu zostávajúcej premennej. Tak získame explicitné vyjadrenie tejto krivky

$$y = \frac{1}{x}, \quad z = x + y = x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Od explicitného vyjadrenia prejdeme k jednoduchšej parametrizácii krivky (5.8)

$$x = t, \quad y = \frac{1}{t}, \quad z = t + \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$



5.2.4 Regulárna krivka

Metódami diferenciálneho počtu môžeme skúmať iba krivky, ktorých rovnice spĺňajú určité predpoklady týkajúce sa ich derivácií. Okrem spojitosti funkcie $\mathbf{p}(t)$ predpokladáme **spojitosť jej prvej derivácie** podľa všeobecného parametra t , ktorú budeme označovať

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \left[\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right].$$

Bod $P(t)$ pre $t \in J$, v ktorom existuje $\dot{\mathbf{p}}(t)$ a je $\dot{\mathbf{p}}(t) \neq \mathbf{0}$ nazývame **regulárny bod** krivky. Ak je

$$\dot{\mathbf{p}}(t) \neq \mathbf{0},$$

respektíve

$$(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2 \neq 0 \tag{5.9}$$

pre ľubovoľný bod $t \in J$, krivka k je **regulárna**.

Príklad 5. Krivka $\mathbf{p}(t) = [t^2, t - t^3, t^4 + 1]$ je regulárna, lebo $\dot{\mathbf{p}}(t) = [2t, 1 - 3t^2, 4t^3] \neq \mathbf{0}$ pre ľubovoľný bod $t \in J$. ♣

Príklad 6. Krivka $\mathbf{p}(t) = [t^2, t^4 - t^6, t^4 + 1]$ nie je regulárna, lebo $\dot{\mathbf{p}}(t) = [2t, 4t^3 - 6t^5, 4t^3] = \mathbf{0}$ pre $t = 0$. ♣

Každý bod krivky, ktorý nie je regulárny nazývame **singulárnym bodom** krivky. Týmito bodmi a ich klasifikáciou sa nebudeme zaoberať a budeme pracovať iba s regulárnymi krivkami.

5.2.5 Transformácia parametra krivky

Pri štúdiu krivky danej rovnicou (5.1) je niekedy výhodné prejsť k inej vektorovej rovnici tejto krivky, t.j. previesť **regulárnu transformáciu parametra**. Ak definujeme funkciu

$$t = t(t^*), \quad t^* \in J^*, \tag{5.10}$$

spojitú na J^* aj s prvou deriváciou a $\frac{dt}{dt^*} \neq 0$ pre každé $t^* \in J^*$, potom je funkcia (5.10) rýdzo monotónna a realizuje vzájomne jednoznačné zobrazenie intervalu J^* na interval J . Rovnica (5.1) a rovnica

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}[t(t^*)] = \mathbf{p}(t^*), \quad t^* \in J^*,$$

sú potom vektorovými rovnicami jednej a tej istej krivky.

Príklad 7. Vektorovou rovnicou

$$\mathbf{p} = [2t^4, \sin t^2, e^{t^2}], \quad t \in (1, 2), \tag{5.11}$$

je definovaná určitá regulárna krivka. Funkcia

$$t(t^*) = \sqrt{t^*}, \quad t^* \in (1, 4), \quad (5.12)$$

zobrazuje interval $(1, 4)$ jednoznačne na interval $(1, 2)$. Pomocou (5.12) prevedieme regulárnu transformáciu parametra. Dosadí me (5.12) do (5.11) a dostaneme nové vektorové vyjadrenie skúmanej krivky, a to v tvare

$$\mathbf{p} = [2(t^*)^2, \sin t^*, e^{t^*}], \quad t^* \in (1, 4). \quad (5.13)$$

K funkcii (5.12) môžeme zostrojiť inverznú funkciu

$$t^*(t) = t^2, \quad t \in (1, 2), \quad (5.14)$$

a prevedením regulárnej transformácie parametra na (5.13) pomocou (5.14) dostávame pôvodnú vektorovú rovnicu (5.11). ♣

5.2.6 Orientácia krivky

Nech $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, $t \in J$ je parametrizácia krivky k . Nech $P(t_1)$ a $P(t_2)$ sú dva body krivky k , ktoré odpovedajú hodnotám t_1 a t_2 z intervalu J takým, že $t_1 < t_2$. Na danej krivke k môžeme zvoliť dve navzájom opačné orientácie. V jednej orientácii je bod $P(t_1)$ pred bodom $P(t_2)$ (zapisujeme $P(t_1) \prec P(t_2)$), v druhej orientácii je bod $P(t_2)$ pred bodom $P(t_1)$ ($P(t_2) \prec P(t_1)$). Hovoríme, že krivka je **orientovaná súhlasne s parametrizáciou**, ak platí

$$P(t_1) \prec P(t_2) \Leftrightarrow t_1 < t_2 \quad (5.15)$$

a krivka je **orientovaná nesúhlasne s parametrizáciou**, ak platí

$$P(t_1) \succ P(t_2) \Leftrightarrow t_1 < t_2. \quad (5.16)$$

Krivka k s jedným z usporiadaní (5.15), (5.16) sa nazýva **orientovaná krivka**.

Príklad 8. Pre polkružnicu s polomerom $r = 1$ so stredom v začiatku, ktorá leží v 1. a 2. kvadrante máme dve parametrizácie

$$\mathbf{p}_1 = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{p}_2 = t \mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2} \mathbf{j}, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle. \quad (5.18)$$

Pri parametrizácii (5.17) je bod $A = [1, 0]$ obrazom parametra $t = 0$, bod $B = [0, 1]$ obrazom parametra $t = \pi/2$ a bod $C = [-1, 0]$ obrazom parametra $t = \pi$. V orientácii súhlasnej s touto parametrizáciou je $A \prec B \prec C$. Pri parametrizácii (5.18) je bod A obrazom parametra $t = 1$, bod B obrazom parametra $t = 0$ a bod C obrazom parametra $t = -1$. V orientácii súhlasnej s touto parametrizáciou je $C \prec B \prec A$. ♣

5.2.7 Dĺžka krivky, prirodzená parametrizácia krivky

Nech je vektorovou rovnicou (5.1) definovaná regulárna krivka k . Označme $P(t_0)$ a $P(t)$ body, odpovedajúce na krivke k ľubovoľnej ale pevnej hodnote t_0 a nejakej hodnote t z intervalu J . Na intervale J definujme funkciu

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{p}}(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)} dt, \quad (5.19)$$

respektíve

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt. \quad (5.20)$$

Každý hodnote parametra $t \in J$ môžeme priradiť číslo $|s(t)|$, ktoré vyjadruje **dĺžku krivky** medzi bodmi $P(t_0)$ a $P(t)$. Z rovnice (5.9) vyplýva, že derivácia

$$\dot{s}(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} = \sqrt{\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)} \neq 0$$

je pre všetky $t \in J$ rôzna od nuly. Funkcia $s = s(t)$, $t \in J$ je teda rýdzo monotónna a môžeme k nej zostrojiť inverznú funkciu

$$t = t(s), \quad s \in I, \quad (5.21)$$

ktorá realizuje vzájomne jednoznačné zobrazenie intervalu I na interval J . Pre deriváciu tejto inverznej funkcie platí

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)}} \neq 0$$

pre všetky $t \in J$. Pomocou funkcie (5.21) môžeme previesť na skúmanej krivke transformáciu parametra. Dostaneme tak novú vektorovú rovnicu krivky

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}[t(s)] = \mathbf{p}(s), \quad s \in I, \quad (5.22)$$

v ktorej parametrom je dĺžka oblúka krivky od bodu $P(t_0)$ do bodu $P(t)$ a ktorú nazývame **prirodzenou parametrizáciou krivky**. Všetky derivácie podľa oblúka

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

budeme označovať čiarkou, t.j.

$$\mathbf{p}' = \dot{\mathbf{p}} \frac{dt}{ds}$$

na rozdiel od derivácií podľa všeobecného parametra, ktoré označujeme bodkou. Pre veľkosť vektora \mathbf{p}' platí

$$|\mathbf{p}'| = \sqrt{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'} = \sqrt{\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}} \left| \frac{dt}{ds} \right| = \sqrt{\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}} \frac{1}{\sqrt{\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}}} = 1. \quad (5.23)$$

Vlastnosť (5.23) je nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby parametrizácia $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ bola prirodzenou parametrizáciou regulárnej krivky k .

Príklad 9. Nájdime prirodzenú parametrizáciu skrutkovice (5.4).

Riešenie: Na krivke (5.4) zavedieme nový parameter, ktorý je oblúkom. Vypočítame prvú deriváciu podľa všeobecného parametra t

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = [-r \sin t, r \cos t, c] \quad (5.24)$$

a dĺžku krivky zo vzťahu (5.20)

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2} dt = t\sqrt{r^2 + c^2}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

K funkcii $s(t)$ vypočítame inverznú funkciu

$$t = \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad s \in (-\infty, \infty).$$

Odtiaľ vyplýva, že hľadaná vektorová rovnica, v ktorej parameter s je oblúkom, má tvar

$$\mathbf{p}(s) = \left[r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \frac{cs}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right]. \quad (5.25)$$



Prirodzená parametrizácia má veľký význam pri teoretických úvahách. Pri konkrétnom počítaní ju nebudeme vedieť vždy určiť lebo integrály na pravej strane vzťahov (5.19) a (5.20) môžu byť komplikované alebo primitívna funkcia nie je elementárna.

5.3 Sprievodný trojhran

Ku každému bodu $P(t_0)$ regulárnej krivky k , v ktorom existuje $\ddot{\mathbf{p}}(t_0) \neq 0$, je možné jednoznačne priradiť tri vektory, ktoré spolu s bodom $P(t_0)$ určujú pravouhlý trojhran s vrcholom v bode $P(t_0)$. Jeho hranami sú **dotyčnica** \mathbf{d} , **hlavná normála** \mathbf{n} a **binormála** \mathbf{b} . Steny tvoria **oskulačná rovina** τ , **normálová rovina** ν a **rektifikačná rovina** μ . Pri pohybe bodu $P(t_0)$ po regulárnej krivke sa mení poloha tohto trojhranu. Preto sa trojhran nazýva **sprievodný** alebo **Serretov trojhran**. Umožní nám výstižne popísať tvar krivky k v okolí bodu $P(t_0)$.

Obr. 5.2: Trojhran.

5.3.1 Dotyčnica krivky

Medzi všetkými priamkami, ktoré prechádzajú bodom $P(t_0)$ regulárnej krivky k existuje významná priamka, ktorá sa nazýva **dotyčnica**. Na krivke k zvolíme dva rôzne body $P(t_0)$ a $P(t_0 + h)$, $h \neq 0$. Priamka prechádzajúca týmito bodmi sa nazýva **sečnica** krivky k . **Dotyčnica** v bode $P(t_0)$ je limitnou polohou sečnice pre $h \rightarrow 0$. V každom bode $P(t_0) = [x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ regulárnej krivky existuje práve jedna dotyčnica. Ak je krivka popísaná rovnicami (5.1) alebo (5.5), potom **vektorová rovnica dotyčnice** je

$$\mathbf{d} = \mathbf{p}(t_0) + \lambda \dot{\mathbf{p}}(t_0) \quad (5.26)$$

a **parametrické rovnice dotyčnice** sú

$$x = x(t_0) + \lambda \dot{x}(t_0), \quad y = y(t_0) + \lambda \dot{y}(t_0), \quad z = z(t_0) + \lambda \dot{z}(t_0), \quad (5.27)$$

kde $\lambda \in (-\infty, \infty)$ je parameter, \mathbf{d} je označenie pre polohový vektor ľubovoľného bodu dotyčnice a x, y, z sú súradnice tohto vektora, resp. súradnice ľubovoľného bodu dotyčnice.

Príklad 10. Určme rovnicu dotyčnice ku skrutkovici (5.4) vo všeobecnom bode a v bode $t = 0$.

Riešenie: Do vzťahu (5.26) alebo do vzťahov (5.27) dosadíme výrazy (5.4) a (5.24). Dostaneme vektorovú rovnicu dotyčnice vo všeobecnom bode $P(0)$

$$\mathbf{d} = [r \cos t, r \sin t, ct] + \lambda[-r \sin t, r \cos t, c],$$

alebo parametrické rovnice dotyčnice

$$x = r \cos t - \lambda r \sin t, \quad y = r \sin t + \lambda r \cos t, \quad z = ct + \lambda c.$$

Vektorovú rovnicu dotyčnice v bode $t = 0$ môžeme písať v tvare

$$\mathbf{d} = [r, 0, 0] + \lambda[0, r, c],$$

alebo

$$x = r, \quad y = \lambda r, \quad z = \lambda c.$$



5.3.2 Oskulačná rovina krivky

Každá rovina, ktorá prechádza dotyčnicou regulárnej krivky k sa nazýva **dotykovou rovinou** krivky. Medzi týmito rovinami existuje významná rovina, ktorá sa nazýva **oskulačná rovina** krivky. V bode $P(t_0)$ krivky k zostrojme dotyčnicu \mathbf{d} . Cez dotyčnicu \mathbf{d} a ďalší bod $P(t_0 + h)$, $h \neq 0$ krivky k položíme rovinu. **Oskulačná rovina** τ v bode $P(t_0)$ je limitnou polohou takto zostrojenej roviny pre $h \rightarrow 0$. Za predpokladu, že v bode $P(t_0)$ krivky k existujú derivácie

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0), \quad \ddot{\mathbf{p}}(t_0) \tag{5.28}$$

a tieto vektory sú lineárne nezávislé, existuje v bode $P(t_0)$ práve jedna oskulačná rovina rovnobežná s vektormi (5.28). Ak $\mathbf{r} = [x, y, z]$ je označenie pre polohový vektor jej ľubovoľného bodu, potom **vektorová rovnica oskulačnej roviny** je

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p}(t_0)) \cdot (\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)) = 0$$

alebo

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

V prípade, že sú vektory (5.28) lineárne závislé, každá dotyková rovina zostrojená v bode $P(t_0)$ je súčasne oskulačnou rovinou.

Príklad 11. Určme rovnicu oskulačnej roviny ku skrutkovici (5.4) vo všeobecnom bode a v bode $t = 0$.

Riešenie: K výpočtu oskulačnej roviny potrebujeme okrem vektorovej funkcie (5.4) a jej derivácie (5.24) aj druhú deriváciu podľa parametra t

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = [-r \cos t, -r \sin t, 0]. \tag{5.29}$$

Najskôr vypočítame vektorový súčin

$$\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin t & r \cos t & c \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \end{vmatrix} = \quad (5.30)$$

$$= cr \sin t \mathbf{i} - cr \cos t \mathbf{j} + (r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t) \mathbf{k} = cr \sin t \mathbf{i} - cr \cos t \mathbf{j} + r^2 \mathbf{k}.$$

Získaný vektor môžeme vydeliť nenulovým polomerom r . Nasleduje výpočet skalárneho súčinu

$$([x, y, z] - [r \cos t, r \sin t, ct]) \cdot [c \sin t, -c \cos t, r] = 0,$$

po úprave ktorého dostaneme rovnicu hľadanej oskulačnej roviny v bode t

$$cx \sin t - cy \cos t + rz - crt = 0$$

a v bode $t = 0$

$$cy - rz = 0.$$



5.3.3 Hlavná normála a binormála krivky

Každá priamka prechádzajúca bodom $P(t_0)$ regulárnej krivky k kolmá na dotyčnicu sa nazýva **normála** krivky k v bode $P(t_0)$. Normálu, ktorá leží v oskulačnej rovine τ budeme nazývať **hlavnou normálou** a označovať \mathbf{n} . Pod pojmom **binormála** \mathbf{b} krivky k budeme rozumieť priamku, ktorá prechádza bodom $P(t_0)$ a je kolmá súčasne na príslušnú dotyčnicu i hlavnú normálu. Binormála je teda kolmá na oskulačnú rovinu a preto **vektorová rovnica binormály** je

$$\mathbf{b} = \mathbf{p}(t_0) + \lambda(\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)),$$

kde $\lambda \in (-\infty, \infty)$ je parameter, \mathbf{b} je označenie pre polohový vektor ľubovoľného bodu binormály a x, y, z sú súradnice tohto vektora, resp. súradnice ľubovoľného bodu binormály. **Parametrické rovnice binormály** sú

$$x = x(t_0) + \lambda \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix},$$

$$y = y(t_0) + \lambda \begin{vmatrix} \dot{z}(t_0) & \dot{x}(t_0) \\ \ddot{z}(t_0) & \ddot{x}(t_0) \end{vmatrix},$$

$$z = z(t_0) + \lambda \begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) \end{vmatrix}.$$

Kedže pre hrany sprievodného trojhranu platí

$$\mathbf{b} = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{d},$$

vektorová rovnica hlavnej normály je

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}(t_0) + \lambda((\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)) \times \dot{\mathbf{p}}(t_0)),$$

kde $\lambda \in (-\infty, \infty)$ je parameter, \mathbf{n} je označenie pre polohový vektor ľubovoľného bodu hlavnej normály a x, y, z sú súradnice tohto vektora, resp. súradnice ľubovoľného bodu hlavnej normály. **Parametrické rovnice hlavnej normály** sú

$$\begin{aligned}x &= x(t_0) + \lambda \left(\dot{z}(t_0) \begin{vmatrix} \dot{z}(t_0) & \dot{x}(t_0) \\ \ddot{z}(t_0) & \ddot{x}(t_0) \end{vmatrix} - \dot{y}(t_0) \begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) \end{vmatrix} \right), \\y &= y(t_0) + \lambda \left(\dot{x}(t_0) \begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) \end{vmatrix} - \dot{z}(t_0) \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} \right), \\z &= z(t_0) + \lambda \left(\dot{y}(t_0) \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} - \dot{x}(t_0) \begin{vmatrix} \dot{z}(t_0) & \dot{x}(t_0) \\ \ddot{z}(t_0) & \ddot{x}(t_0) \end{vmatrix} \right).\end{aligned}$$

Príklad 12. Určme rovnice hlavnej normály a binormály skrutkovice (5.4) vo všeobecnom bode a v bode $t = 0$.

Riešenie: V predchádzajúcom príklade sme vypočítali vektorový súčin $\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}$ (5.30), môžeme teda priamo zapísať rovnicu binormály v bode t

$$\mathbf{b} = [r \cos t, r \sin t, ct] + \lambda [c \sin t, -c \cos t, r]$$

a v bode $t = 0$

$$\mathbf{b} = [r, 0, 0] + \lambda [0, -c, r].$$

K výpočtu hlavnej normály potrebujeme vektorový súčin

$$(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c \sin t & -c \cos t & r \\ -r \sin t & r \cos t & c \end{vmatrix} = -(c^2 + r^2)(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}). \quad (5.31)$$

Získaný vektor môžeme vydeliť nenulovým $-(c^2 + r^2)$. Potom rovnica hlavnej normály v bode t je

$$\mathbf{n} = [r \cos t, r \sin t, ct] + \lambda [\cos t, \sin t, 0]$$

a v bode $t = 0$

$$\mathbf{n} = [r, 0, 0] + \lambda [1, 0, 0].$$



5.3.4 Normálová a rektifikačná rovina krivky

Hlavná normála a binormála určujú **normálovú rovinu** ν . Táto rovina je kolmá na dotyčnicu krivky v konkrétnom bode a ležia v nej všetky normály. Dotyčnica a binormála určujú rovinu, ktorú budeme nazývať **rektifikačná rovina** μ . Keďže normálová rovina je kolmá na dotyčnicu, **vektorová rovnica normálovej roviny** je

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p}(t_0)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0) = 0$$

alebo po zložkách

$$(x - x(t_0))\dot{x}(t_0) + (y - y(t_0))\dot{y}(t_0) + (z - z(t_0))\dot{z}(t_0) = 0.$$

Rektifikačná rovina je kolmá na hlavnú normálu, preto **vektorová rovnica rektifikačnej roviny** je

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p}(t_0)) \cdot ((\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)) \times \dot{\mathbf{p}}(t_0)) = 0$$

alebo

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Príklad 13. Určme rovnice normálovej a rektifikačnej roviny skrutkovice (5.4) vo všeobecnom bode a v bode $t = 0$.

Riešenie: Vzhľadom na výsledky predchádzajúcich príkladov nebude ťažké zapísať rovnice hľadanych rovín. Normálová rovina vo všeobecnom bode t má rovnicu

$$([x, y, z] - [r \cos t, r \sin t, ct]) \cdot [-r \sin t, r \cos t, c] = 0$$

a po úprave

$$rx \sin t - ry \cos t - cz + c^2 t = 0.$$

Normálová rovina v bode $t = 0$ má rovnicu

$$([x, y, z] - [r, 0, 0]) \cdot [0, r, c] = 0$$

a po úprave

$$ry + cz = 0.$$

Rektifikačná rovina vo všeobecnom bode t má rovnicu

$$([x, y, z] - [r \cos t, r \sin t, ct]) \cdot [\cos t, \sin t, 0] = 0$$

a po úprave

$$x \cos t + y \sin t - r = 0.$$

Rektifikačná rovina v bode $t = 0$ má rovnicu

$$([x, y, z] - [r, 0, 0]) \cdot [1, 0, 0] = 0$$

a po úprave

$$x - r = 0.$$



5.3.5 Sprievodný trojhran v prirodzenej parametrizácii

Predpokladajme, že regulárna krivka k je daná vektorovou rovnicou (5.22), v ktorej parametrom je oblúk. Ako vieme z (5.23), $\mathbf{p}'(s)$ je pre každé $s \in I$ jednotkovým dotyčnicovým vektorom krivky k

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{p}'(s).$$

Ďalej vieme, že vektory $\mathbf{p}'(s)$ a $\mathbf{p}''(s)$ sú rovnobežné s oskulačnou rovinou. Zo vzťahu (5.23) je zrejmé, že pre všetky $s \in I$ platí

$$\mathbf{p}'(s) \cdot \mathbf{p}'(s) = 1.$$

Derivujeme obe strany rovnice podľa s a dostaneme

$$\mathbf{p}''(s) \cdot \mathbf{p}'(s) + \mathbf{p}'(s) \cdot \mathbf{p}''(s) = 0$$

a po úprave

$$2\mathbf{p}'(s) \cdot \mathbf{p}''(s) = 0.$$

To však znamená, že v každom bode $P(s)$ krivky k je vektor $\mathbf{p}''(s)$ buď nulový alebo nenulový a kolmý na dotyčnicový vektor $\mathbf{p}'(s)$. Ak predpokladáme druhú možnosť, pozorujeme, že nastane len vtedy, ak je vektor $\mathbf{p}''(s)$ rovnobežný s hlavnou normálou \mathbf{n} krivky k . Potom jednotkový vektor hlavnej normály je

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{p}''(s)}{|\mathbf{p}''(s)|}. \quad (5.32)$$

Pomocou jednotkových vektorov $\mathbf{d}_0, \mathbf{n}_0$ zostrojíme jednotkový vektor binormály

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{d}_0 \times \mathbf{n}_0.$$

Vzťahy na výpočet hrán a stien sprievodného trojhranu sú v prirodzenej parametrizácii jednoduchšie.

Dotyčnica krivky k v bode $P(s_0)$ má parametrické rovnice

$$x = x(s_0) + \lambda x'(s_0), \quad y = y(s_0) + \lambda y'(s_0), \quad z = z(s_0) + \lambda z'(s_0).$$

Hlavná normála krivky k v bode $P(s_0)$ má parametrické rovnice

$$x = x(s_0) + \lambda x''(s_0), \quad y = y(s_0) + \lambda y''(s_0), \quad z = z(s_0) + \lambda z''(s_0).$$

Binormála krivky k v bode $P(s_0)$ má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= x(s_0) + \lambda \begin{vmatrix} y'(s_0) & z'(s_0) \\ y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix}, \\ y &= y(s_0) + \lambda \begin{vmatrix} z'(s_0) & x'(s_0) \\ z''(s_0) & x''(s_0) \end{vmatrix}, \\ z &= z(s_0) + \lambda \begin{vmatrix} x'(s_0) & y'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Normálová rovina krivky k v bode $P(s_0)$ má rovnicu

$$(x - x(s_0))x'(s_0) + (y - y(s_0))y'(s_0) + (z - z(s_0))z'(s_0) = 0.$$

Rektifikačná rovina krivky k v bode $P(s_0)$ má rovnicu

$$(x - x(s_0))x''(s_0) + (y - y(s_0))y''(s_0) + (z - z(s_0))z''(s_0) = 0.$$

Oskulačná rovina krivky k v bode $P(s_0)$ má rovnicu

$$\begin{vmatrix} x - x(s_0) & y - y(s_0) & z - z(s_0) \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Obr. 5.3: Krivosť.

5.4 Charakteristiky krivky

5.4.1 Krivosť krivky

Pri pohybe dotykového bodu $P(t_0)$ po regulárnej krivke sa mení smer dotyčnice v tomto bode. Rýchlosť zmeny smeru dotyčnice charakterizuje stupeň zakrivenia krivky. Čím viac sa v okolí bodu dotyku krivka odkláňa od dotyčnice v tomto bode, tým má väčšiu **prvú krivosť** (alebo **krivosť** či **flexiu**).

Ak je krivka k definovaná vektorovou rovnicou (5.1), potom jej krivosť v bode $P(t_0)$ vypočítame zo vzťahu

$$\mathcal{K}^2(t_0) = \frac{|\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)|^2}{(\dot{\mathbf{p}}(t_0) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0))^3}. \quad (5.33)$$

Ak je krivka daná parametrickými rovnicami (5.5), potom krivosť v bode $P(t_0)$ vypočítame zo vzťahu

$$\mathcal{K}^2(t_0) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z}(t_0) & \dot{x}(t_0) \\ \ddot{z}(t_0) & \ddot{x}(t_0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) \end{vmatrix}^2}{(\dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2 + \dot{z}(t_0)^2)^3}.$$

Ak je krivka k daná vektorovou rovnicou (5.22), v ktorej parametrom je oblúk s , potom krivosť v bode $P(s_0)$ vypočítame zo vzťahu

$$\mathcal{K}(s_0) = |\mathbf{p}''(s_0)| \quad (5.34)$$

alebo

$$\mathcal{K}(s_0) = \sqrt{(x''(s_0))^2 + (y''(s_0))^2 + (z''(s_0))^2}.$$

Polomer krivosti krivky k v bode $P(t_0)$ je prevrátenou hodnotou prvej krivosti krivky k v tomto bode, t.j.

$$\mathcal{R}(t_0) = \frac{1}{\mathcal{K}(t_0)}.$$

Príklad 14. Vypočítajme prvú krivosť v ľubovoľnom bode skrutkovice (5.4).

Riešenie: Norma vektorového súčinu (5.30) v čitateli vzťahu (5.33) je

$$|\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)| = \sqrt{c^2 r^2 \sin^2 t + c^2 r^2 \cos^2 t + r^4} = \sqrt{r^2(c^2 + r^2)} \quad (5.35)$$

a skalárny súčin v menovateli vzťahu (5.33) je vzhľadom na (5.24) a (5.29)

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0) = r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2 = (r^2 + c^2).$$

Potom

$$\mathcal{K}(t_0)^2 = \frac{(\sqrt{r^2(c^2 + r^2)})^2}{(r^2 + c^2)^3} = \frac{r^2}{(r^2 + c^2)^2}.$$

To znamená, že prvá krivosť

$$\mathcal{K}(t_0) = \frac{r}{(r^2 + c^2)}$$

nezávisí od parametra t , a teda je konštantná pozdĺž celej skrutkovice. ♣

Nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby daná regulárna krivka bola priamkou je, aby v každom bode tejto krivky bola prvá krivosť rovná nule.

5.4.2 Kružnica krivosti krivky, evolúta, evolventa

Kružnica, ktorú dostaneme ako limitnú polohu kružnice prechádzajúcej tromi rôznymi bodmi $P(t_0)$, $P(t_1)$, $P(t_2)$ krivky k , ktoré neležia na jednej priamke a body $P(t_1)$ a $P(t_2)$ sa približujú k bodu $P(t_0)$, nazývame **kružnica krivosti** alebo **oskulačná kružnica**. Táto

1. leží v oskulačnej rovine krivky k v bode $P(t_0)$,
2. jej polomer sa rovná polomeru krivosti \mathcal{R} krivky k v bode $P(t_0)$,
3. jej stred S leží na hlavnej normále krivky k v bode $P(t_0)$.

Polomer r kružnice krivosti krivky nazývame **polomer krivosti** a súradnice x_s a y_s stredu S kružnice krivosti krivky nazývame **stred krivosti**. Krivku l , ktorej body sú stredy krivosti krivky k pre všetky jej body, nazývame **evolútu** krivky k . Naopak, krivka k je **evolventou** krivky l .

Pravouhlý priemet krivky k do jej oskulačnej roviny v bode $P(t_0)$ je rovinná krivka, ktorá má s danou priestorovou krivkou spoločnú kružnicu krivosti v bode $P(t_0)$. Preto budeme kružnicu krivosti spolu s evolútu študovať v časti o rovinných krivkách.

5.4.3 Torzia krivky

Pri pohybe bodu $P(t_0)$ po regulárnej krivke sa mení poloha oskulačnej roviny v tomto bode. Čím viac sa v okolí bodu $P(t_0)$ krivka odchyľuje z oskulačnej roviny v tomto bode, tým má väčšiu **druhá krivosť** (alebo **torziu**). Ak je krivka k definovaná vektorovou rovnicou (5.1), potom jej torziu v bode $P(t_0)$ vypočítame zo vzťahu

$$\mathcal{T}(t_0) = \frac{(\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{|\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)|^2}.$$

Ak je krivka daná parametrickými rovnicami (5.5), potom torziu v bode $P(t_0)$ vypočítame zo vzťahu

$$\mathcal{T}(t_0) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix}}{\left| \begin{vmatrix} \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} \dot{z}(t_0) & \dot{x}(t_0) \\ \ddot{z}(t_0) & \ddot{x}(t_0) \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) \end{vmatrix} \right|^2}.$$

Ak je krivka k daná vektorovou rovnicou (5.22), v ktorej parametrom je oblúk s , potom torziu v bode $P(s_0)$ vypočítame zo vzťahu

$$\mathcal{T}(s_0) = \frac{(\mathbf{p}'(s_0) \times \mathbf{p}''(s_0)) \cdot \mathbf{p}'''(s_0)}{(\mathbf{p}''(s_0))^2},$$

alebo

$$\mathcal{T}(s_0) = \frac{\begin{vmatrix} x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \\ x'''(s_0) & y'''(s_0) & z'''(s_0) \end{vmatrix}}{(x''(s_0))^2 + (y''(s_0))^2 + (z''(s_0))^2}.$$

Príklad 15. Vypočítajme druhú krivosť v ľubovoľnom bode skrutkovice (5.4).

Riešenie: K výpočtu druhej krivosti potrebujeme vektorový súčin (5.30), jeho normu (5.35) a tretiu deriváciu vektorovej rovnice skrutkovice (5.4) podľa parametra t

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = [r \sin t, -r \cos t, 0].$$

Potom

$$\mathcal{T}(t) = \frac{[cr \sin t, -cr \cos t, r^2] \cdot [r \sin t, -r \cos t, 0]}{r^2(c^2 + r^2)} = \frac{c}{c^2 + r^2}.$$

Pozdĺž skúmanej skrutkovice je aj druhá krivosť konštantná. ♣

5.4.4 Frenetove-Serretove vzorce

Predpokladajme opäť, že regulárna krivka k je daná vektorovou rovnicou (5.22), v ktorej parameter s je oblúkom. Poznamenajme, že vektor $\mathbf{p}''(s)$ sa nazýva vektor prvej krivosti v bode $P(s)$, teda pre veľkosť tohto vektora platí (5.34). Potom vzhľadom na (5.32) môžeme písať

$$\mathbf{p}'' = |\mathbf{p}''(s_0)| \mathbf{n}_0 = \mathcal{K} \mathbf{n}_0. \quad (5.36)$$

Ak pre jednotkový dotyčnicový vektor zavedieme označenie

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{p}',$$

rovniciu (5.36) upravíme na tvar

$$\mathbf{d}'_0 = \mathcal{K} \mathbf{n}_0 \quad (5.37)$$

čo je **prvý Frenetov vzorec**.

Poznámka: Prechod od vzťahu (5.34) ku vzťahu (5.33) na výpočet krivosti nájdú záujemci v (Budinický, kap. 3.2., str 60).

V danom bode $P(s)$ krivky k budeme skúmať deriváciu jednotkového vektora binormály \mathbf{b}'_0 a ukáže sa, že dospejeme k druhej krivosti \mathcal{T} . Derivujeme podľa parametra s obe strany rovnice

$$\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 1$$

a dostaneme vzťah

$$2\mathbf{b}'_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0,$$

z ktorého vyplýva, že vektor \mathbf{b}'_0 je v každom bode krivky k buď nulový, alebo nenulový a kolmý na vektor \mathbf{b}_0 . Môžeme teda vektor \mathbf{b}'_0 vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{d}_0, \mathbf{n}_0$, ktoré sú tiež kolmé na \mathbf{b}_0 a písať

$$\mathbf{b}'_0 = A \mathbf{d}_0 - \mathcal{T} \mathbf{n}_0, \quad (5.38)$$

kde A a $-\mathcal{T}$ sú neznáme konštanty. Vynásobme skalárne obe strany tejto rovnice vektorom \mathbf{d}_0 . Dostaneme tak

$$\mathbf{b}'_0 \cdot \mathbf{d}_0 = A. \quad (5.39)$$

Ukážeme, že $A = 0$. Z rovnice $\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{d}_0 = 0$ vyplýva ďalším derivovaním, že

$$\mathbf{b}'_0 \cdot \mathbf{d}_0 + \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{d}'_0 = 0.$$

Odtiaľ a zo vzťahu (5.37) ľahko overíme, že $\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{d}'_0 = \mathcal{K}\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$, a teda aj $\mathbf{b}'_0 \cdot \mathbf{d}_0 = 0$ a z (5.39) $A = 0$. Rovnica (5.38) má teda tvar

$$\mathbf{b}'_0 = -\mathcal{T}\mathbf{n}_0. \quad (5.40)$$

Nazývame ju **tretím Frenetovým vzorcom** .

Čitateľa zrejme zaskočilo, že sa v predchádzajúcom výklade nehovorí o druhom Frenetovom vzorci. Tento bude výsledkom nasledujúcej konštrukcie.

Hovoríme, že tri vektory tvoria ortonormálny systém, ak sú jednotkové a navzájom kolmé. Zrejme vektory $\mathbf{d}_0, \mathbf{n}_0$ a \mathbf{b}_0 v bode $P(s)$ krivky k tvoria takýto systém. Môžeme vypočítať vektory $\mathbf{d}'_0, \mathbf{n}'_0$ a \mathbf{b}'_0 a vyjadriť ich ako lineárne kombinácie vektorov $\mathbf{d}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$, čo zapíšeme nasledovne

$$\mathbf{d}'_0 = a_{11}\mathbf{d}_0 + a_{12}\mathbf{n}_0 + a_{13}\mathbf{b}_0,$$

$$\mathbf{n}'_0 = a_{21}\mathbf{d}_0 + a_{22}\mathbf{n}_0 + a_{23}\mathbf{b}_0,$$

$$\mathbf{b}'_0 = a_{31}\mathbf{d}_0 + a_{32}\mathbf{n}_0 + a_{33}\mathbf{b}_0.$$

Vo všeobecnom prípade má matica koeficientov $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Dôkaz je dostupný v (Budinský kap. 3.4., str. 66). Vzhľadom k (5.37) a (5.40) dostávame tak rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_0 &= & \mathcal{K}\mathbf{n}_0 \\ \mathbf{n}'_0 &= -\mathcal{K}\mathbf{d}_0 & +\mathcal{T}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}'_0 &= & -\mathcal{T}\mathbf{n}_0 \end{aligned}$$

Tak sme odvodili **Frenetove vzorce**, ktoré tvoria základ diferenciálnej geometrie kriviek, pretože na ne môžeme previesť celú problematiku tejto disciplíny.

5.4.5 Prirodzené rovnice krivky

Nech sú dané dve spojité funkcie

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(s) > 0, \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(s), \quad (5.41)$$

kde \mathcal{K} má spojitú aspoň druhú deriváciu a \mathcal{T} má spojitú aspoň prvú deriváciu. Potom existuje jediná krivka, ktorá

1. má s za oblúk a \mathcal{K} a \mathcal{T} za prvú a druhú krivosť,
2. prechádza ľubovoľným vopred daným bodom pre $s = 0$,
3. má v tomto bode ľubovoľné vopred dané jednotkové a navzájom kolmé vektory $\mathbf{d}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ ako jednotkové vektory dotyčnice, hlavnej normály a binormály.

Zadaním funkcií(5.41) je až na svoju polohu v priestore určená krivka. Veličiny $s, \mathcal{K}, \mathcal{T}$ nazývame **prírodnými súradnicami** a rovnice (5.41) **prírodnými rovnicami krivky**. Prírodné rovnice krivky vyjadrujú krivku nezávisle na voľbe súradnicovej sústavy.

Príklad 16. Skrutkovica, ktorej prírodná parametrizácia je (5.25) má v každom bode $P(s)$ konštantnú nenulovú krivosť i torziu. Takže rovnice

$$\mathcal{K}(s) = \frac{r}{r^2 + c^2}, \quad \mathcal{T}(s) = \frac{c}{c^2 + r^2}$$

sú prírodné rovnice skrutkovice (5.4). ♣

5.5 Rovinné krivky

Krivka k , ktorej všetky body patria do jednej roviny, sa nazýva **rovinná krivka**. Celý rad vlastností rovinných kriviek sme prebrali spoločne s pojednávaním o priestorových krivkách, ktorým pre ich vlastnosť $\mathcal{K} \neq 0, \mathcal{T} \neq 0$ hovoríme aj krivky dvojakej krivosti. Teraz budeme študovať niektoré vlastnosti rovinných kriviek, charakterizovaných vlastnosťou $\mathcal{T} = 0$ vo všetkých bodoch krivky.

5.5.1 Rovnice rovinnej krivky

Ak zvolíme $z(t) = 0$, **vektorová rovnica** rovinnej krivky bude

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in J. \quad (5.42)$$

Rovinnú krivku môžeme zapísať **parametrickými rovnicami**

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in J, \quad (5.43)$$

explicitne

$$y = f(x), \quad x \in J \quad (5.44)$$

alebo **implicitne**

$$h(x, y) = 0, \quad (5.45)$$

ak je funkcia h definovaná a spojitá na dvojrozmernej oblasti $\Omega \in E^2$. Špeciálnym prípadom rovinnej krivky je graf spojitej nekonštantnej reálnej funkcie $f(x)$.

Príklad 17. Napíšme parametrické vyjadrenie Descartesovho listu $x^3 + y^3 = 3xy$ tak, že položíme $y = tx$.

Riešenie: Po dosadení predpokladaného y do rovnice krivky vyjadríme x ako funkciu parametra t . Z rovnice

$$x^3 + t^3x^3 = 3tx^2$$

dostaneme po úprave rovnicu

$$x^2[x(1 + t^3) - 3t] = 0,$$

odkiaľ buď $x = 0$ a teda aj $y = 0$ alebo

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}$$

a potom

$$y = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$



Príklad 18. Vektorovou rovnicou

$$\mathbf{p}(t) = [a \cos t, b \sin t], \quad (5.46)$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$, $b > 0$ je vyjadrená elipsa. Rozpísaním vektorovej rovnice (5.46) dostaneme dve parametrické rovnice elipsy v tvare

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t. \quad (5.47)$$

Vylúčením parametra t z parametrických rovníc (5.47) (tak, že obe strany prvej, resp. druhej rovnice vynásobíme b , resp. a , obe strany oboch rovníc umocníme a rovnice spočítame), dostávame implicitnú rovnicu elipsy v tvare

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Z tejto rovnice vypočítame premennú y a získame explicitné rovnice elipsy

$$y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2},$$

respektíve

$$y = -\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}.$$



Rovinné krivky je možné vyjadriť aj pomocou **polárnych súradníc** φ a ϱ v tvare

$$F(\varphi, \varrho) = 0$$

alebo

$$\varrho = f(\varphi). \quad (5.48)$$

Obr. 5.4: Polárne súradnice.

Transformačné rovnice, s pomocou ktorých sa dajú previesť pravouhlé súradnice (O, x, y) na polárne súradnice (O, φ, ϱ) a opačne sú

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \varrho = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Príklad 19. V polárnych súradniciach sú vyjadrené mnohé rovinné krivky, väčšinou užitočné z hľadiska technických aplikácií.

Hyperbolická špirála: $\varrho = c/\varphi$, $c > 0$, $\varphi > 0$.

Archimedova špirála: $\varrho = a\varphi$, $a > 0$.

Logaritmická špirála: $\varrho = k e^{a\varphi}$, $k \neq 0$, $a > 0$.

Kardioida: $\varrho = 2a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$. ♣

5.5.2 Dĺžka rovinatej krivky

Dĺžku rovinatej krivky zadanej rovnicami (5.43), (5.44) a (5.48) môžeme vypočítať pomocou vzťahov

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt,$$

$$s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \dot{f}(x)^2} dx,$$

$$s(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{f^2(\varphi) + \dot{f}(\varphi)^2} d\varphi.$$

Príklad 20. Vypočítajme dĺžku polkružnice s polomerom $r = 1$ so stredom v začiatku, ktorá leží v 1. a 2. kvadrante.

Riešenie: K dispozícii máme dve parametrizácie (5.17) a (5.18) zadanej polkružnice. Potom

$$s(t) = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{\pi} 1 dt = \pi,$$

alebo

$$s(t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2} \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin t]_{-1}^1 = \pi.$$

♣

Príklad 21. Vypočítajme dĺžku logaritmickéj špirály $\varrho = e^{\varphi}$ medzi bodmi, ktoré zodpovedajú parametrom $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$.

Riešenie: Využijeme posledný z trojice vzorcov a vypočítame

$$s(\varphi) = \int_0^{\pi} \sqrt{(e^{\varphi})^2 + (e^{\varphi})^2} d\varphi = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1).$$

♣

5.5.3 Dotyčnica a normála rovinatej krivky

Pojem dotyčnice a normály ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, f(x_0)]$ je čitateľovi známy zo štúdia diferenciálneho počtu (kapitola 7.4.1., Riešené úlohy z matematiky I.). V každom bode $P(t_0) = [x(t_0), y(t_0)] = [x_0, y_0] = [x_0, f(x_0)]$ regulárnej rovinatej krivky existuje práve jedna dotyčnica.

Dotyčnica v bode $P(t_0)$ krivky danej rovnicami (5.42–5.45) je definovaná postupne rovnicami

$$\mathbf{d} = \mathbf{p}(t_0) + \lambda \dot{\mathbf{p}}(t_0),$$

$$\begin{aligned}
 x &= x(t_0) + \lambda \dot{x}(t_0), & y &= y(t_0) + \lambda \dot{y}(t_0), \\
 y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\
 (x - x_0)h'_x(P[x_0, y_0]) + (y - y_0)h'_y(P[x_0, y_0]) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Priamku, ktorá prechádza bodom $P(t_0)$ a je kolmá na dotyčnicu, nazývame normálou. Vzhľadom na existenciu jedinej normály rovinnej krivky nehovoríme o hlavnej normále, ale krátko o normále. **Normála** v bode $P(t_0)$ krivky danej rovnicami (5.42–5.45) je definovaná postupne rovnicami

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n} - \mathbf{p}(t_0)) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0) &= 0, \\
 x &= x(t_0) - \lambda \dot{y}(t_0), & y &= y(t_0) + \lambda \dot{x}(t_0), \\
 y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \\
 (x - x_0)h'_y(P[x_0, y_0]) - (y - y_0)h'_x(P[x_0, y_0]) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Príklad 22. Nájdime rovnice dotyčnice a normály ku elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ vo všeobecnom bode $[x_0, y_0]$ a v bode $[1, 0]$ ak $a = 1$, $b = 2$.

Riešenie: Elipsa je daná implicitne, preto na výpočet dotyčnice a normály použijeme vzorce (5.49) a (5.50). Potrebujeme derivácie rovnice elipsy podľa x a y

$$\begin{aligned}
 h'_x &= \frac{2x}{a^2}, \\
 h'_y &= \frac{2y}{b^2}.
 \end{aligned}$$

Potom rovnica dotyčnice vo všeobecnom bode elipsy je

$$(x - x_0)\frac{2x}{a^2} + (y - y_0)\frac{2y}{b^2} = 0$$

a rovnica normály vo všeobecnom bode elipsy je

$$(x - x_0)\frac{2y}{b^2} - (y - y_0)\frac{2x}{a^2} = 0.$$

Dotyčnica a normála v bode $[1, 0]$ elipsy $x^2 + y^2/4 - 1 = 0$ majú rovnice

$$2(x - 1) + 0(y - 0) = 0, \quad 0(x - 1) - 2(y - 0) = 0$$

a po úprave

$$x - 1 = 0, \quad y = 0.$$



V prípade rovinnej krivky nemá zmysel zavádzať ďalšie pojmy známe z teórie priestorových kriviek pod spoločným názvom sprievodný trojhran. Poznamenajme len, že rovina, v ktorej krivka leží, je totožná s oskulačnou rovinou.

5.5.4 Krivosť rovinnej krivky

Z úvodných poznámok o rovinnej krivke je zrejmé, že v tomto prípade má zmysel hovoriť len o prvej krivosti (krátko **krivosti**) krivky k v bode $P(t_0)$. Túto dôležitú charakteristiku krivky vyjadrenej rovnicami (5.42-5.44) a (5.48) vypočítame zo vzťahov

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^2 &= \frac{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|^2}{(\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}})^3} \\ \mathcal{K}^2 &= \frac{(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y)^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3} \\ \mathcal{K}^2 &= \frac{(\ddot{y})^2}{(1 + \dot{y}^2)^3} \\ \mathcal{K}^2 &= \frac{(\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'')^2}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^3}\end{aligned}$$

Príklad 23. Nájďme krivosť paraboly $y = x^2$ vo všeobecnom bode a v bodoch $P(0), P(1), P(2)$.

Riešenie: Krivka je daná explicitne, využijeme teda tretí z uvedených vzorcov. K výpočtu potrebujeme prvú a druhú deriváciu podľa x

$$\dot{y} = 2x, \quad \ddot{y} = 2. \quad (5.51)$$

Potom krivosť paraboly $y = x^2$ vo všeobecnom bode je

$$\mathcal{K}^2(x) = \frac{2^2}{(1 + (2x)^2)^3} = \frac{4}{(1 + 4x^2)^3},$$

t.j.

$$\mathcal{K}(x) = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4x^2)^3}}$$

a v konkrétnych bodoch

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(0) &= 2, \\ \mathcal{K}(1) &= 2/\sqrt{5^3} = 0,17888, \\ \mathcal{K}(2) &= 2/\sqrt{17^3} = 0,02853.\end{aligned}$$



Príklad 24. Nájďme krivosť kružnice s polomerom r v jej ľubovoľnom bode.

Riešenie: Parametrické rovnice kružnice sú

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Pretože

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -r \sin t, & \dot{y} &= r \cos t, \\ \ddot{x} &= -r \cos t, & \ddot{y} &= -r \sin t,\end{aligned}$$

podľa druhého z uvedených vzorcov

$$\mathcal{K}^2(t) = \frac{(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)^2}{(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)^3} = \frac{1}{r^2},$$

to znamená, že

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{r}.$$

Krivosť kružnice je v každom jej bode rovnaká a je rovná prevrátenej hodnote jej polomeru. ♣

5.5.5 Kružnica krivosti rovinnej krivky

Na vystihnutie zakrivenia krivky v bode $P(t)$ je výhodné použiť **kružnicu krivosti (oskulačnú kružnicu)**, ktorá

1. má s krivkou jeden spoločný bod a v ňom tú istú dotyčnicu,
2. jej polomer sa rovná polomeru krivosti krivky k v bode $P(t)$,
3. jej stred S leží na normále krivky k v bode $P(t)$.

Ak je krivka daná parametricky (5.43), platí

$$r = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|},$$

$$x_s = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}},$$

$$y_s = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

a ak je krivka daná explicitne (5.44), platí

$$r = \frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}|},$$

$$x_s = x - \dot{y} \frac{1 + \dot{y}^2}{|\ddot{y}|}, \quad (5.52)$$

$$y_s = y + \frac{1 + \dot{y}^2}{|\ddot{y}|}. \quad (5.53)$$

Príklad 25. Nájdime kružnice krivosti paraboly $y = x^2$ v bodoch $P(0), P(1)$.

Riešenie: Polomer r kružnice krivosti je prevrátená hodnota krivosti, preto vzhľadom na výsledky príkladu 22

$$r(0) = 0,5 \quad r(1) = 5,59.$$

Súradnice x_s, y_s stredu kružnice krivosti vypočítame zo vzťahov (5.52) a (5.53), v ktorých potrebujeme derivácie (5.51). Zrejme $x_s(0) = 0, y_s(0) = 0,5$ a

$$x_s(1) = 1 - 2 \frac{1 + 2^2}{2} = -4,$$

$$y_s(1) = 1 + 2 \frac{1 + 2^2}{2} = 3,5.$$

Hľadané kružnice krivosti sú

$$x^2 + (y - 0,5)^2 = 0,25,$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3,5)^2 = 31,25.$$



5.5.6 Evolúta, evolventa

Evolúta je krivka, ktorá je množinou stredov krivosti danej krivky k . Pre evolútu ku krivke danej parametricky (5.43) platí

$$\begin{aligned}x_e &= x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, \\y_e &= y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}.\end{aligned}$$

Pozorný čitateľ si zrejme všimne, že tieto rovnice sú zovšeobecnením rovníc stredy krivosti.

Ak krivka l je evolúťou krivky k , tak krivka k je **evolventou** krivky l . Analytické vyjadrenie evolventy je zložitejšie a vyžaduje si výpočet integrálov. Poznamenajme aspoň, že dotyčnica k evolúte je normálou evolventy.

Príklad 26. Nájdime rovnicu evolúty k parabole $y = x^2$.

Riešenie: Parametrické vyjadrenie paraboly a jeho derivácie podľa parametra t sú

$$\begin{aligned}x &= t, & y &= t^2, \\x &= 1, & y &= 2t, \\x &= 0, & y &= 2.\end{aligned}$$

Rovnice hľadanej evolúty sú

$$\begin{aligned}x_e &= t - 2t \frac{1 + (2t)^2}{1 \cdot 2 - 0 \cdot 2t} = -4t^3, \\y_e &= t^2 + 1 \frac{1 + (2t)^2}{1 \cdot 2 - 0 \cdot 2t} = 3t^2 + 0,5.\end{aligned}$$



5.5.7 Prirodzené rovnice rovinnej krivky

Ak prirodzené rovnice rovinnej krivky sú (5.41), kde samozrejme $\mathcal{T} = 0$, potom parametrické rovnice tejto krivky môžeme písať v tvare

$$\begin{aligned}x(s) &= \int \cos(\int \mathcal{K} ds + c_1) ds + c_2, \\y(s) &= \pm \int \sin(\int \mathcal{K} ds + c_1) ds + c_3,\end{aligned}$$

kde c_1, c_2, c_3 sú ľubovoľné reálne konštanty.

Cvičenia

1. Nájdite parametrické rovnice priestorovej krivky, ktorá je priesečníkom plôch

- a) $y = x^2, z = e^x,$
- b) $z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 = a^2,$
- c) $x^2 - x + y = 0, x^2 + z - 1 = 0.$

2. Nájdite dĺžku priestorovej krivky

- a) $x = 4t, y = 6t^2, z = 6t^3, t \in \langle 0, 1 \rangle,$
- b) $\mathbf{p}(t) = [2t, \ln t, t^2], t \in \langle 1, e \rangle,$
- c) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, t \in \langle 0, \pi \rangle.$
- d) $\mathbf{p}(t) = 3t^2 \mathbf{i} + (2t + 3) \mathbf{j} + 3t^3 \mathbf{k},$ od bodu $P = [12, -1, -24]$ po bod $P(t),$
- e) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t, t \in \langle 0, t \rangle.$

3. Nájdite prirodzenú parametrizáciu priestorovej krivky

- a) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t,$

4. Určte dotyčnicu, hlavnú normálu, binormálu, oskulačnú rovinu, prvú a druhú krivosť priestorovej krivky v danom bode

- a) $x = t^2, y = t^3, z = t + 1$ v bode $t = 1,$
- b) $x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^3,$ v bode $t = 0,$
- c) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t,$ v bode $t = 0$

5. Ukážte, že pre krivku $x = t, y = t^2/2, z = t^3/6$ platí $\mathcal{K} = \mathcal{T}.$

6. Nájdite rovnice dotyčnice a normály rovinnej krivky v danom bode

- a) $y = x^3$ v bodoch s $x = 0$ a s $x = 1,$
- b) $y = \sin x$ v bodoch s $x = 0$ a s $x = \pi,$
- c) $x = t^3 - 2t, y = t^2 + 1$ v bode $P[1],$
- d) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ vo všeobecnom bode,
- e) $(x^2 + y^2)^2 x - y^2 = 0$ v bode $P = [1/2, 1/2],$
- f) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ vo všeobecnom bode $P = [x_0, y_0],$
- g) $r = \cos \varphi$ v bode $\varphi = \pi/4.$

7. Nájdite dĺžku rovinnej krivky medzi danými bodmi

- a) $y = x^{3/2}$ medzi x_1 a $x_2,$
- b) $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$ medzi t_1 a $t_2,$
- c) $y = x^2/4 - (\ln x)/2$ medzi $x_1 = 1$ a $x_2 = 4,$

d) $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$ medzi $t_1 = 0$ a $t_2 = \sqrt{2}$,

e) $r = 1 + \cos \varphi$ medzi $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = \pi$.

8. Určte krivosť rovinnej krivky v danom bode

a) $y = \sin x$ vo všeobecnom bode x ,

b) $x = t^2$, $y = t^3$ vo všeobecnom bode t ,

c) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ vo všeobecnom bode t ,

d) $r = a\varphi$ vo všeobecnom bode φ ,

e) $y = x^4$ v bode $P = [0, 0]$.

9. Nájdite evolútu rovinnej krivky

a) $y = x^2$,

b) $y = \ln x$.

Výsledky cvičení

1.

a) $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$, $t \in (-\infty, \infty)$,

b) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = a^2 \cos 2t$, $t \in (-\infty, \infty)$,

c) $x = t$, $y = t - t^2$, $z = 1 - t^2$, $t \in (-\infty, \infty)$.

2. a) 10, b) e^2 , c) $\sqrt{3}(e^\pi - 1)$, d) $3t^2 + 2t - 28$, e) $(5 \sin^2 t)/2$.3. a) $t = \ln \frac{s}{\sqrt{3}}$

4.

a) $\mathbf{d}(1) = [1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda, 2]$, $\mathbf{n}(1) = [1 - 8\lambda, 1 + 9\lambda, 2 - 11\lambda]$, $\mathbf{b}(1) = [1 - 3\lambda, 1, 2 + 3\lambda]$, $\tau(1) \equiv 3x - y - 3z + 4 = 0$, $\mathcal{K}(1) = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{38}{7}}$, $\mathcal{T}(1) = \frac{3}{19}$

b) $\mathbf{d}(0) = [1 + \lambda, -1, 0]$, $\mathbf{n}(0) = [1, \lambda, 0]$, $\mathbf{b}(0) = [1, -1, \lambda]$, $\tau(0) \equiv z = 0$, $\mathcal{K}(0) = \frac{1}{2}$, $\mathcal{T}(0) = \frac{3}{2}$

c) $\mathbf{d}(0) = [1 + \lambda, \lambda, 1 + \lambda]$, $\mathbf{n}(0) = [1 - \lambda, \lambda, 1]$, $\mathbf{b}(0) = [1 - \lambda, -\lambda, 1 + 2\lambda]$, $\tau(0) \equiv x + y - 2z + 1 = 0$, $\mathcal{K}(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\mathcal{T}(0) = \frac{1}{3}$

5. $\mathcal{K} = \mathcal{T} = \frac{4}{(t^2+2)^2}$

6.

a) $\mathbf{d}(0) \equiv y = 0$, $\mathbf{n}(0) \equiv x = 0$; $\mathbf{d}(1) \equiv 3x - y - 2 = 0$, $\mathbf{n}(1) \equiv x + 3y - 4 = 0$;

b) $\mathbf{d}(0) \equiv y = x$, $\mathbf{n}(0) \equiv x = -y$; $\mathbf{d}(\pi) \equiv x + y - \pi = 0$, $\mathbf{n}(\pi) \equiv x - y - \pi = 0$;

c) $\mathbf{d}(1) \equiv 2x - y + 4 = 0$, $\mathbf{n}(1) \equiv x + 2y - 3 = 0$;

d) $\mathbf{d}(t) \equiv 2x \sin t + 2y \cos t - \sin 2t = 0$, $\mathbf{n}(t) \equiv x \cos t - y \sin t - \cos 2t = 0$;

e) $\mathbf{d}(1/2, 1/2) \equiv 4x - 2y - 1 = 0$, $\mathbf{n}(1/2, 1/2) \equiv 2x + 4y - 3 = 0$;

$$\begin{aligned} \text{f) } \mathbf{d}(x_0, y_0) &\equiv \frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1, \\ \mathbf{n}(x_0, y_0) &\equiv \frac{(x - x_0) a^2}{x_0} + \frac{(y - y_0) b^2}{y_0} = 0; \end{aligned}$$

$$\text{g) } \mathbf{d}(\pi/4) \equiv y - 1/2 = 0, \quad \mathbf{n}(\pi/4) \equiv x - 1/2 = 0$$

$$\mathbf{7. a) } [(4 + 9x_2)^{3/2} - (4 + 9x_1)^{3/2}]/27, \quad \text{b) } (t_2^2 - t_1^2)/2, \quad \text{c) } 15/4 + \ln 2, \quad \text{d) } 24a, \quad \text{e) } 4.$$

$$\mathbf{8. a) } |\sin x|/(1 + \cos^2 x)^{3/2}, \quad \text{b) } 6/[t(4 + 9t_2)^{3/2}], \quad \text{c) } ab/(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}, \quad \text{d) } (2 + \varphi^2)/a(1 + \varphi^2)^{3/2},$$

$$\text{e) } 0.$$

$$\mathbf{9. a) } x = -4t^3, \quad y = 3t^2 + 1/2, \quad \text{b) } x = 2t + 1/t, \quad y = \ln t - t^2 - 1.$$