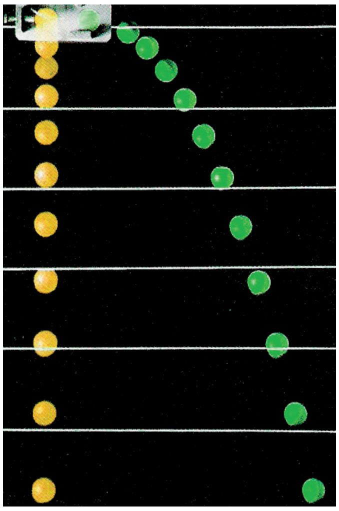
Kapitola 3

Křivočarý pohyb

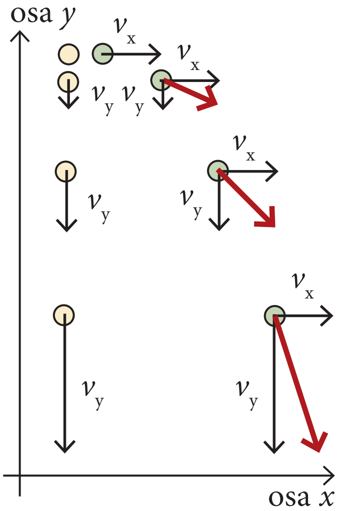
Cíle

1. Dozvíte se, jak s využitím znalostí o vektorech popsat křivočarý pohyb tělesa v gravitačním poli – šikmý vrh.
2. Poznáte význam polohy, rychlosti a zrychlení jako vektorů v rovině či v prostoru. Dozvíte se, jaký je význam tečného a normálového zrychlení při křivočarém pohybu.
3. Seznámíte se s rovnoměrným pohybem po kružnici a veličinami, které jej popisují. Naučíte se počítat dostředivé zrychlení.
4. Naučíte se, jak se skládají rychlosti a jak to souvisí s teorií relativity.

Obrázek 3-1.
(a) Stroboskopický snímek současného pádu dvou míčků.



(b) Zakreslení složek rychlosti míčků nám umožní pochopit jejich pohyb.

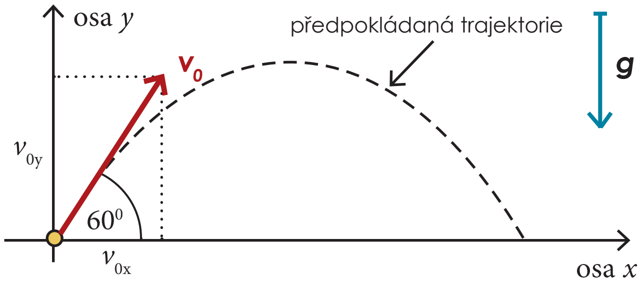


3.1 Šikmý vrh

Každý někdy sledoval pohyb baseballového míčku po odpalu nebo let skokana na lyžích. Tyto pohyby mají hodně společného s volným pádem, o kterém jsme mluvili v druhé kapitole. Připomeňme si, k čemu jsme dospěli v odstavci 2.7: „Těleso volně vypuštěné v blízkosti povrchu Země padá se stálým zrychlením, je-li odpor vzduchu dostatečně malý. Toto **tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$** je pro všechna tělesa stejné."

Sledujme nyní stroboskopický záznam pohybu dvou míčků na obrázku 3-1. Žlutý míček byl volně vypuštěn (padá volným pádem), zatímco zelený byl ve stejném okamžiku vystřelen určitou rychlostí ve vodorovném směru. Vidíme, že y-ová souřadnice obou míčků je v každém okamžiku stejná. **Skutečnost, že se jeden míček současně pohybuje i ve vodorovném směru, nijak neovlivňuje jeho pohyb ve svislém směru**. Podobně by to dopadlo i v případě vodorovného výstřelu z pušky. Vypadne-li nábojnice ve stejný okamžik ze stejné výšky jako z ní vodorovně vyletí střela, musí také současně dopadnout na zem, přestože jsou od sebe již desítky metrů daleko. Podobnými pokusy se můžeme přesvědčit, že nejen volně vypuštěná tělesa, ale i tělesa vypuštěná s libovolnou počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$, se pohybují v gravitačním poli se stálým zrychlením $\boldsymbol{g}$ po celou dobu svého pohybu. Takový pohyb nazýváme obecně **šikmým vrhem.** Má-li počáteční rychlost vodorovný směr, jako je tomu na obrázku 3-1, jde o speciální případ – **vodorovný vrh**. Vodorovný vrh se tedy od volného pádu liší pouze tím, že se těleso navíc pohybuje konstantní rychlostí ve vodorovném směru.

Nyní se můžeme pustit do matematického popisu **šikmého vrhu**. Budeme sledovat pohyb baseballového míčku, který byl vystřelen počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ o velikosti 18 $\mathrm{ms^{-1}}$ pod **elevačním úhlem** 60^0 (viz obrázek 3-2). Vztažnou soustavu volíme co nejjednodušeji, tedy s počátkem v místě výstřelu, osou x vodorovnou a osoy y svislou. Nejprve bude nutné najít složky vektorů $\boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{g}$ ve zvolené vztažné soustavě. Využijeme k tomu našich znalostí počítání s vektory, které jsme získali v první kapitole.



Obrázek 3-2.
Pohyb míčku při šikmém vrhu. Obrázek obsahuje všechny důležité údaje – počáteční rychlost, elevační úhel a také volu vztažné soustavy.

Pomocí obrázku určíme, že

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 18\,\mathrm{ms^{-1}} \cdot \cos 60^0 = 9{,}0\,\mathrm{ms^{-1}},$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 18\,\mathrm{ms^{-1}} \cdot \sin 60^0 = 15{,}6\,\mathrm{ms^{-1}},$$

$$g_x = 0\,\mathrm{ms^{-2}},$$

$$g_y = -9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}.$$

Nyní využijeme toho, že skutečný pohyb tělesa můžeme rozložit na dva nezávislé pohyby, ve vodorovném a ve svislém směru. Pohyb míčku tedy budeme sledovat zvlášť v x-ové a v y-ové souřadnici.

Víme, že $g_x = 0\,\mathrm{ms^{-2}}$, proto ve směru osy x jde o rovnoměrný pohyb s počáteční rychlostí $v_{0x} = 9\,\mathrm{ms^{-1}}$ a počáteční polohou $x_0 = 0\,\mathrm{m}$, který je popsaný rovnicí

$$x(t) = v_{0x}t$$

Ve svislém směru jde o pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením $g_y = -9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$, počáteční rychlostí $v_{0y} = 15{,}6\,\mathrm{ms^{-1}}$ a počáteční polohou $y_0 = 0$, který je popsaný rovnicí

$$y(t) = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}g_y t^2.$$

Protože velikost tíhového zrychlení (kladné číslo) označujeme g, můžeme druhou rovnici přepsat do přehlednějšího tvaru. Dohromady pak dostaneme

$$\boxed{x(t) = v_{0x}t \qquad a \qquad y(t) = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2.}$$

To jsou **rovnice trajektorie šikmého vrhu**. Tyto rovnice, jak se dozvíte později v matematice, určují docela jednoduchou křivku – parabolu. Můžeme tedy učinit obecný závěr, že **těleso se při šikmém vrhu pohybuje po části paraboly.**

Nyní můžeme z rovnic vypočítat dolet míčku. Je to vodorovná vzdálenost, kterou míček urazí, než dopadne na zem. V čase dopadu t_D proto musí platit, že $y(t_D) = 0$ (míček je na zemi). Z této podmínky můžeme určit čas dopadu t_D:

$$0 = v_{0y}t_D - \tfrac{1}{2}gt_D^2 \quad => \quad 0 = t_D(v_{0y} - \tfrac{1}{2}gt_D).$$

Tato kvadratická rovnice s neznámou t_D má dva kořeny: $t_D = 0$ a $t_D = 2v_{0y}/g$. První kořen není chyba, ale výsledek, odpovídající počátečnímu bodu (i zde totiž platí $y = 0$). Druhý kořen je hledaný čas dopadu. Dolet D získáme jako x-ovou souřadnici míčku v čase dopadu

$$D = x(t_D) = v_{0x} t_D = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot 9\,\mathrm{ms^{-2}} \cdot 15{,}6\,\mathrm{ms^{-2}}}{9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}} = 28{,}6\,\mathrm{m}.$$

Vztah pro dolet můžeme ještě upravit tak, že složky v_{0x} a v_{0y} vyjádříme pomocí v_0 a elevačního úhlu α. Dostaneme tak, že

$$\boxed{D = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.}$$

Při poslední úpravě vztahu jsme použili matematický vzorec

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

Našli byste ho v běžných matematických tabulkách a odvodíte jej později v matematice.

Takto upravený vztah nám umožňuje odpovědět na další velice zajímavou otázku, kterou by nám hráč baseballu jistě položil: „Pod jakým úhlem mám míč hodit, aby doletěl co nejdál?“ Stačí si všimnout, jak dolet závisí na elevačním úhlu α. Vidíme, že dolet bude maximální, bude-li maximální hodnota výrazu $\sin 2\alpha$. To nastane pro úhel $\alpha_{max} = 45^0$ (pak $2\alpha_{max} = 90^0$, $\sin 90^0 = 1$ a to je největší hodnota, které může funkce sinus nabývat). Proto **největšího doletu dosáhneme při elevačním úhlu $\alpha_{max} = 45^0$**.

Zbývá nám ještě vypočítat **výšku výstupu**, tj. zjistit do jaké největší výšky se míček dostane. Z tvaru trajektorie (viz obrázek 3-2) vidíme, že maximální výšky dosáhne míček v polovině doby svého letu. Proto výšku výstupu H vypočteme jako jeho y-ovou souřadnici v čase $t_D/2 = v_{0y}/g$. Dostaneme

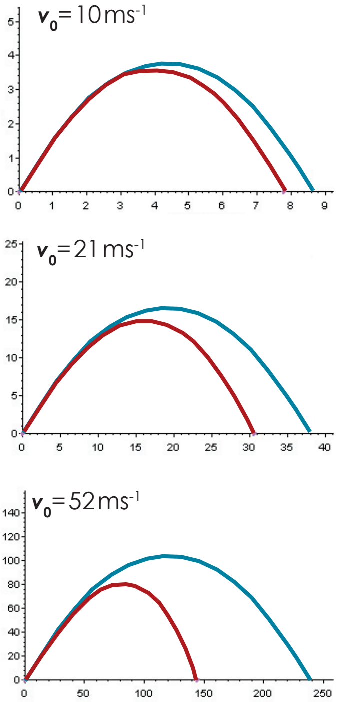
$$H = y(t_D/2) = v_{0y}(v_{0y}/g) - \frac{1}{2} g (v_{0y}/g)^2,$$

což po úpravě dává

$$\boxed{H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.}$$

Pro zadané hodnoty dostaneme výšku výstupu míčku $H = 12{,}4\,\mathrm{m}$.

Na závěr připomeňme, že jsme v úvodu předpokládali, že „odpor vzduchu je dosatečně malý“, což prakticky znamenalo, že jsme s ním vůbec nemuseli počítat (ani bychom to zatím nedokázali). Podobně jako u volného pádu je toto zanedbání rozumné jen u těles, která se nepohybují příliš velkými rychlostmi. Pro lepší představu poslouží obrázek 3-3, který porovnává pohyb bez odporu vzduchu (ve vakuu) a skutečnou trajektorii míčku (vypočtenou numericky na počítači).

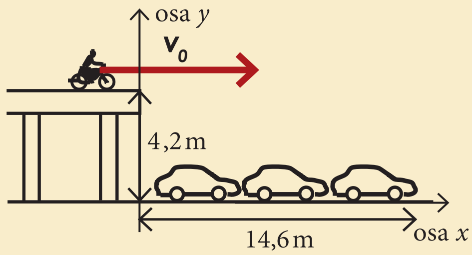


Obrázek 3-3. Porovnání trajektorie míčku ve vzduchu (se započtením odporu vzduchu) vypočtené na počítači s trajektorií ve vakuu (bez odporu vzduchu) pro tři různé počáteční rychlosti míčku a elevační úhel 60^0. Všimněte si různých měřítek na osách, údaje jsou v metrech.

Příklad 3-1

Při filmování honičky jede kaskadér na motorce po rozestavěném mostě o výšce 4,2 m rychlostí 45 kmh^{-1}. Má přeskočit řadu aut o celkové délce 14,6 m – viz obrázek. Ještě předtím, než se pustí do akce, ho napadne, zda vůbec může úkol zvládnout. Poradíte mu?

Rychlost, kterou kaskadér jede po mostě, bude počáteční rychlostí vodorovného vrhu – označme ji $\mathbf{v_0}$. Zvolíme vztažnou soustavu tak, jak ukazuje obrázek. Nejprve zjistíme, jak dlouho bude skok z výšky $y_0 = 4{,}2\,\mathrm{m}$ trvat. Víme, že při vodorovném vrhu je $v_{0y} = 0\,\mathrm{ms^{-1}}$, proto



ve směru osy y popíšeme pohyb rovnicí pro volný pád

$$y(t)=y_0-\frac{1}{2}gt^2.$$

V čase dopadu t_D musí být $y(t_D)=0$, proto

$$0=y_0-\frac{1}{2}gt_D^{\,2},$$

odtud čas dopadu

$$t_D=\frac{2y_0}{g}=\frac{2\cdot 4{,}2\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}}=0{,}93\ \mathrm{s}.$$

Nyní vypočítáme, jak daleko se za tu dobu kaskadér dostane ve vodorovném směru

$$x(t_D)=v_{0x}t_D=11{,}6\ \mathrm{m}.$$

Řada aut je však dlouhá 14,6 m, to je rozdíl 3 m. Rada je jasná: neskákat.

3.2. Poloha, rychlost a zrychlení při křivočarém pohybu

V kapitole o přímočarém pohybu jsme poznali tři základní veličiny, které nám stačí k popisu pohybu: polohu, rychlost a zrychlení. Naučili jsme se s nimi pracovat na přímce při popisu přímočarého pohybu. Nyní tyto definice zobecníme tak, aby platitly i v rovině či prostoru. Například pro popis polohy v prostoru použijeme **polohový vektor** (někdy se také říká **průvodič**). Bude to vektor, který vede z počátku soustavy souřadnic do místa, kde se právě nachází hmotný bod. Tento vektor můžeme zapsat pomocí tří složek v kartézské soustavě souřadnic. K popisu polohy v prostoru tedy potřebujeme tři čísla (tj. tři složky polohového vektoru). Podobné to bude s rychlostí i zrychlením.

Následující tabulka přehledně shrnuje definice základních **kinematických veličin**. Je zde to nejdůležitější z celé kinematiky, totiž jaké veličiny používáme pro popis pohybu.

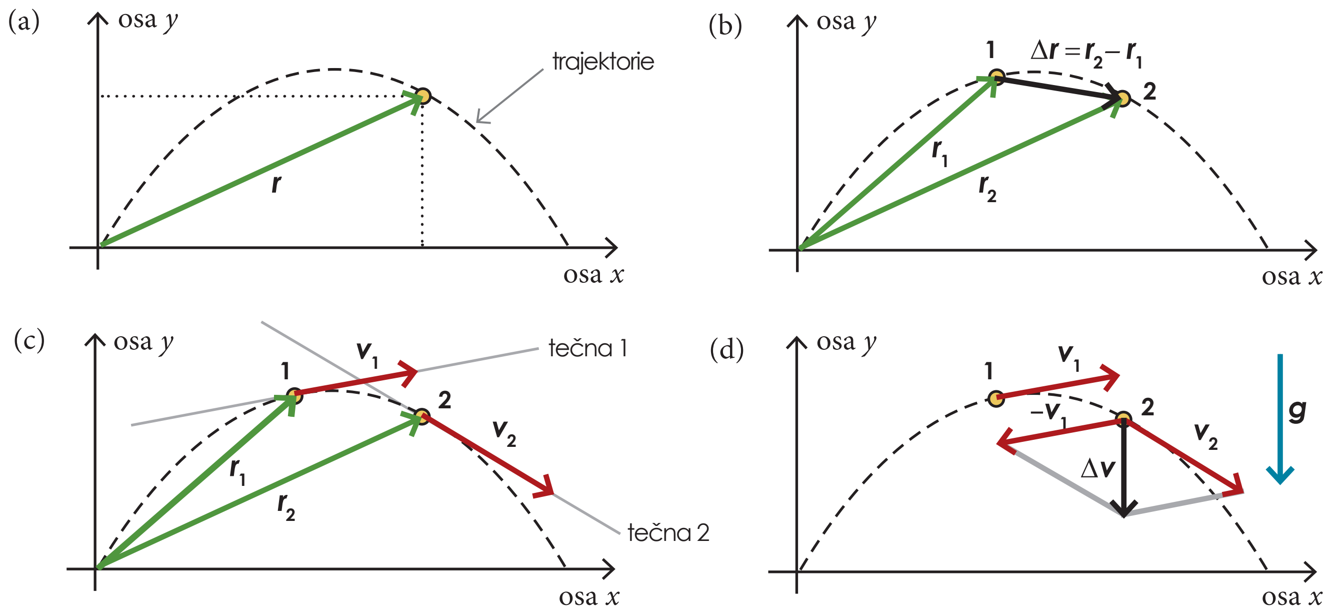
poloha (vektor)	$\boldsymbol{r}=(x,y)$ rovina $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ prostor $[\boldsymbol{r}]=\mathrm{m}$	Polohový vektor vede z počátku soustavy souřadnic do místa, kde se právě nachází hmotný bod.
posunutí (vektor)	$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ $[\Delta\boldsymbol{r}]=\mathrm{m}$	Posunutí určíme jako rozdíl koncové polohy $\boldsymbol{r}_2$ a počáteční polohy $\boldsymbol{r}_1$
okamžitá rychlost (vektor)	$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ $[\boldsymbol{v}]=\mathrm{m/s}=\mathrm{ms^{-1}}$	Zmenšujeme-li Δt k nule, blíží se průměrná rychlost k jediné limitní hodnotě – okamžité rychlosti.
okamžité zrychlení (vektor)	$\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ $[\boldsymbol{a}]=\mathrm{m/s^2}=\mathrm{ms^{-2}}$	Zmenšujeme-li Δt k nule, blíží se průměrné zrychlení k jediné limitní hodnotě – okamžitému zrychlení.

Ukažme si nyní význam jednotlivých kinematických veličin na příkladu šikmého vrhu baseballového míčku z předchozího odstavce. Budeme vycházet z informací v tabulce a použijeme jednoduché operace s vektory.

Víte, že…

Dosáhnout maximálního možného doletu při šikmém vrhu je cílem snažení sportovců v mnoha atletických disciplinách, třeba při skoku dalekém na obrázku. Určit maximální teoretický dolet skokana, víme-li, že jeho odrazová rychlost je 9,5 $\mathrm{ms^{-1}}$ (přibližně rychlost běhu sprintera), zvládnete pomocí odvozeného vztahu pro dolet velmi snadno. Dokázali byste také odhadnout vliv tíhového zrychlení? Například v Tokiu je $g=9{,}79801\,\mathrm{ms^{-2}}$, zatímco v severněji položeném Oslu je $g=9{,}81927\,\mathrm{ms^{-2}}$. Ve kterém městě mají atleti větší šanci překonat světový rekord?

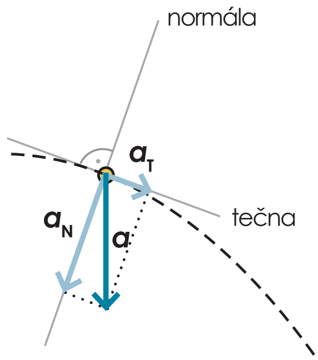
obrázek 3-4. Dosáhnout maximálního doletu je cílem mnoha sportovců.



Obrázek 3-5. Poloha, rychlost a zrychlení při křivočarém pohybu. Trajektorie míčku je vyznačena čárkovaně.

Na obrázku 3-5a vidíme, jak **polohový vektor** $\boldsymbol{r}$ určuje polohu míčku (hmotného bodu). Čárkovaně je vyznačena křivka, po které se míček pohybuje, neboli jeho **trajektorie**. Jeho poloha je jednoznačně určena dvěma údaji – složkami vektoru $\boldsymbol{r}$ (které označujeme x a y). Na obrázku (b) je pak sestrojen vektor posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Uvědomte si, že i průměrná rychlost mezi body 1 a 2 má směr vektoru $\Delta\boldsymbol{r}$ (dělení skalárem Δt směr vektoru nezmění). Jak ale určíme směr okamžité rychlosti například v bodě 1? Můžeme si představit, že jak budeme zmenšovat interval Δt, bude se mezi body 1 a 2 směr vektoru $\Delta\boldsymbol{r}$, a tedy i $\Delta\boldsymbol{v}$, stále těsněji přibližovat směru tečny v bodě 1. Proto **okamžitá rychlost má vždy směr tečny k trajektorii v daném bodě**, jak ukazuje obrázek (c). Konečně na obrázku (d) je sestrojen vektor $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$, který udává směr vektoru průměrného zrychlení míčku mezi body 1 a 2. Výsledek by nás neměl překvapit, neboť už víme, že při šikmém vrhu se míček pohybuje s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ směřujícím svisle dolů.

Často je velmi užitečné rozložit zrychlení nikoliv do složek daných souřadnicovými osami x a y, ale jak ukazuje obrázek 3-6, do směru tečny a normály (kolmice k tečně) k trajektorii v daném bodě. Dostaneme tak **tečné zrychlení** $\boldsymbol{a}_T$ a **normálové zrychlení** $\boldsymbol{a}_N$, platí $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_T + \boldsymbol{a}_N$. Jaký je jejich význam?



obrázek 3-6. Tečné zrychlení určuje změnu velikosti rychlosti a normálové zrychlení určuje změnu směru rychlosti.

Uvažme těleso, které se pohybuje přímočaře s nenulovým zrychlením (auto zrychluje na přímém úseku silnice). Jeho rychlost nemění směr, pouze velikost, a proto jeho normálové zrychlení musí být nulové. **Zrychlení** tělesa je jen **tečné** a **určuje, jak se mění velikost rychlosti**. Naopak si můžeme představit těleso, jehož rychlost má stálou velikost, ale mění svůj směr (auto rovnoměrně projíždí zatáčkou). Pak jeho tečné zrychlení musí být nulové. **Zrychlení** tělesa je jen **normálové** a **určuje, jak se mění směr rychlosti**, neboli jak bude zakřivena jeho trajektorie. Pohyb míčku při šikmém vrhu je pak příkladem obecného pohybu (nerovnoměrného křivočarého), kdy je nenulové tečné i normálové zrychlení současně. Rozdělení pohybů shruje přehledně následující tabulka:

pohyb	přímočarý	křivočarý
rovnoměrný	$a_T=0,\ a_N=0$	$a_T=0,$
nerovnoměrný	$a_N=0$	–

3.3. Rovnoměrný pohyb po kružnici

Nejjednodušším příkladem křivočarého pohybu je rovnoměrný pohyb po kružnici. Setkáváme se s ním velmi často: oběh družice kolem Země, průjezd vlaku či auta zatáčkou nebo pohyb protonu v urychlovači částic. Také každý, kdo byl někdy na kolotoči, má s tímto pohybem bezprostřední zkušenost a vzpomene si na zvláštní pocity, které přitom zažíval. Už víme, že naše tělo nedokáže vnímat rychlost, ale je docela citlivým akcelerometrem (dokáže měřit zrychlení). Proto nás nepřekvapí, že přestože jde o pohyb rovnoměrný, je naše zrychlení na kolotoči nenulové, neboť **se neustále mění směr rychlosti**. Nyní odvodíme, jak velké je toto zrychlení.

Podíváme-li se do tabulky rozdělení pohybů, vidíme, že při rovnoměrném pohybu po kružnici je tečné zrychlení tělesa nulové (velikost rychlosti se nemění) a výsledné zrychlení je tedy rovno normálovému. Na obrázku 3-7 vidíme, že normálové **zrychlení směřuje vždy do středu kružnice**. Proto se mu říká **dostředivé zrychlení.** Nyní pomocí jednoduché geometrie na obrázku 3-8 odvodíme jeho velikost. Body A a B jsou dvě polohy tělesa pohybujícího se po kružnici o poloměru r. Vektor $\mathbf{v}_A$ představuje okamžitou rychlost tělesa v bodě A a $\mathbf{v}_B$ v bodě B, jejich velikost v je stejná, směr rozdílný. Průměrné zrychlení je podle definice $\mathbf{a}=\Delta\mathbf{v}/\Delta t$. Grafické určení vektoru $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_A$ je na obrázku 3-8b. Teď je nutné si všimnout, že trojúhelníky OAB a CDE jsou podobné (mají shodné všechny úhly). Poměr délek odpovídajících si stran v podobných trojúhelnících je stejný, proto

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{|AB|}{r}.$$

Nyní uvažme, že mezi body A a B urazilo těleso dráhu $v\Delta t$, to je délka oblouku AB. Co kdybychom v předchozím vztahu nahradili délku úsečky AB délkou oblouku AB? Vidíme, že čím menší bude úhel ϕ, tím menší chyby se dopustíme (oblouk je vždy o něco delší než úsečka, viz poznámka na další straně). Bude-li ϕ „nekonečně malé“, neboli pro $\Delta t\to 0$ (viz definice okamžitého zrychlení), bude nahrazení přesné. Dostaneme tak

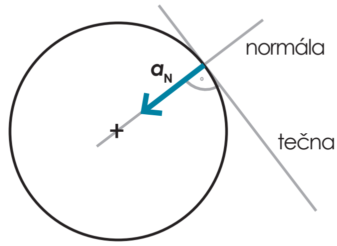
$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{v\Delta t}{r}$$

a odtud již hledanou velikost dostředivého zrychlení

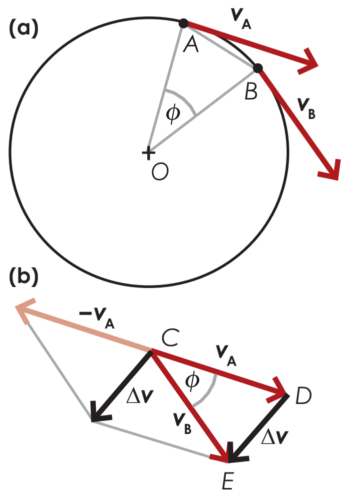
$$a_D=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v^2}{r}. \quad (\Delta t\to 0)$$

Při pohybu tělesa rychlostí o velikosti stálé v **po kružnici** o poloměru r **směřuje jeho zrychlení trvale do středu kružnice a má velikost:**

$$\boxed{a_D=\frac{v^2}{r}}$$



obrázek 3-7. Rovnoměrný pohyb po kružnici. Normálové zrychlení směřuje do středu kružnice, tečné zrychlení je nulové.



obrázek 3-8. Geometrické odvození velikosti dostředivého zrychlení.

Pomocí kalkulačky nebo počítače si můžeme udělat konkrétní představu o významu tvrzení „čím menší bude úhel ϕ, tím více se délka úsečky blíží délce příslušného oblouku“. Uvážíme-li kružnici o poloměru 1 m, dostaneme:

ϕ=30° oblouk: 0,261 m
úsečka: 0,262 m

ϕ=1° oblouk: 0,0174531 m
úsečka: 0,0174533 m

Dokázali byste tyto hodnoty sami vypočítat?

Za pohyb po kružnici považujeme i pohyb po části kružnice, jak je tomu v případě vlaku v příkladu 3-5.

Příklad 3-2

Vraťme se opět na železnici a vyřešme následující příklad. Vlak v určitém úseku své trati projíždí zatáčkou o poloměru 850 m. Nejvyšší přípustná velikost zrychlení při průjezdu zatáčkou je pro pohodlí cestujících stanovena na 0,05 *g*. Jakou nejvyšší rychlostí může vlak touto zatáčku projíždět?

Zrychlení je zadáno v jednotkách *g* (někdy se říká přetížení). Musíme proto nejprve převést na $\mathrm{ms^{-2}}$, tedy $a_D = 0{,}05 \cdot 9{,}81\,\mathrm{ms^{-2}} = 0{,}49\,\mathrm{ms^{-2}}$. Ze vztahu pro dostředivé zrychlení vyjádříme neznámou *v* a dosadíme:

$$a_D = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{a_D r} = \sqrt{0{,}49\,\mathrm{ms^{-2}} \cdot 600\,\mathrm{m}} = 20{,}5\,\mathrm{ms^{-1}} = 73{,}5\ \mathrm{kmh^{-1}}.$$

Vlak tedy může projet zatáčku maximálně rychlostí 73,5 $\mathrm{kmh^{-1}}$.

V praxi bývá těžké změřit přímo rychlost tělesa, můžeme však snadno sledovat, za jakou dobu těleso oběhne celý obvod kružnice (vzdálenost $2\pi r$). Proto se zavádí veličina **perioda**, neboli **doba oběhu**. Značí se písmenem *T* a vypočítá se

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v}.}$$

Jako příklad uveďme pohyb Země kolem Slunce, který můžeme za rovnoměrný pohyb po kružnici přibližně považovat. Perioda oběhu Země je tak významný údaj, že má dokonce svůj vlastní název – 1 rok. Známe-li ještě vzdálenost Země – Slunce $r = 150.10^6$ km, můžeme z těchto dvou údajů určit rychlost pohybu Země, kterou bychom těžko přímo měřili. Ze vztahu pro periodu dostaneme

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 10^9\,\mathrm{m}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 29\ 900\,\mathrm{ms^{-1}} = 108\ 000\,\mathrm{kmh^{-1}}.$$

Při výpočtu rychlosti pohybu Země kolem Slunce předpokláme, že jde o pohyb po kružnici. Již v 17. století však Johannes Kepler objevil, že planety se pohybují po eliptických drahách. Vzdálenost Země – Slunce se v průběhu roku mění v rozmezí 147.10^6 až 152.10^6 km, rychlost se pohybuje od 30300 $\mathrm{ms^{-1}}$ do 29500 $\mathrm{ms^{-1}}$. Vidíme, že rozdíly nejsou velké, naše zjednodušení proto mělo smysl.

Kromě periody používáme také její převrácenou hodnotu – **frekvenci**:

$$\boxed{f = \frac{1}{T},}$$

která nám říká, **kolik oběhů za sekundu** hmotný bod vykoná. Jednotka frekvence $\mathrm{s^{-1}}$ má i svůj vlastní název – Hertz. S touto jednotkou jste se jistě už setkali, protože se používá nejen pro frekvenci kruhového pohybu, ale jakéhokoliv periodického děje, například frekvence tepu srdce, střídání napětí v elektrické síti,...

3.4. Skládání rychlostí

Při jízdě vlakem po dokonale rovné a přímé trati nemá pasažér v kupé bez oken žádnou šanci poznat, jakou rychlostí se vlak právě pohybuje. Může o tom přemýšlet a přitom se procházet tam a zpátky po směru a proti směru jízdy rychlostí o velikosti 1 $\mathrm{ms^{-1}}$. To je jeho rychlost vůči vlaku. Jestliže se vlak pohybuje rychlostí 10 $\mathrm{ms^{-1}}$ vzhledem k zemi, asi každý by dokázal říci, že vzhledem k ní bude rychlost pasažéra 9 $\mathrm{ms^{-1}}$ nebo 11 $\mathrm{ms^{-1}}$, podle toho, na kterou stranu půjde. Už víme, že **rychlost**, podobně jako poloha, **závisí na volbě vztažné soustavy**, platí **princip skládání rychlostí**: Je-li $\boldsymbol{v}_A$ rychlost tělesa v soustavě *A* (rychlost pasažéra vůči vlaku) a $\boldsymbol{u}$ rychlost pohybu soustavy *A* vůči soustavě *B* (rychlost vlaku vůči zemi), pak rychlost tělesa v soustavě *B* (rychlost pasažéra vůči zemi) je

$$\boxed{\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{u}.}$$

Nejpřirozenější vztažnou soustavou je pochopitelně ta, kterou neustále používáme, zem pod našima nohama, odborně laboratorní vztažná sousatva.

Sčítají se vektory, proto v našem případě bude velikost rychlosti $v_B = (10+1)\,\mathrm{ms^{-1}} = 11\,\mathrm{ms^{-1}}$ nebo $v_B = (10-1)\,\mathrm{ms^{-1}} = 9\,\mathrm{ms^{-1}}$. Vztah samozřejmě můžeme použít i v případě, že se rychlosti skládají (sčítají) v libovolném směru. Ukážeme si to v následujícím příkladu.

Skládání rychlostí bychom měli mít na paměti při jízdě po dálnici vysokou rychlostí. Uvažte, že narazíte-li při rychlosti 150 kmh^{-1} do auta, které jede před vámi rychlostí 100 kmh^{-1}, následek bude stejný, jako byste v padesátikilometrové rychlosti narazili do stojícího auta.

Příklad 3-3

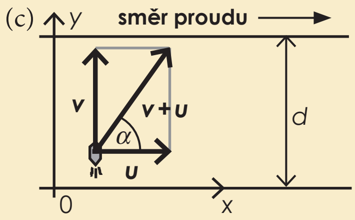
Rychlost proudu řeky je 2 ms^{-1}. Člun by jel po klidné vodě rychlostí o velikosti 3 ms^{-1}. Určete rychlost člunu vzhledem k zemi, jede-li
(a) po proudu,
(b) proti proudu,
(c) kolmo na proud (kolmo k břehu).
(d) Určete čas, který člun potřebuje k přeplutí z jednoho břehu na druhý, chceme-li, aby dorazil přesně naproti místu kde vyplul. Řeka je 36 m široká.

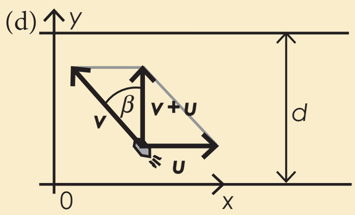
Označme si rychlost člunu vůči vodě $\mathbf{v}$, rychlost proudu $\mathbf{u}$ a rychlost člunu vůči zemi $\mathbf{v}_Z$.
(a) Velikost rychlosti člunu vůči zemi dostaneme jednoduše jako $v_Z = v + u = (3+2)\,\mathrm{ms^{-1}} = 5\,\mathrm{ms^{-1}}$.
(b) V tomto případě je směr vektorů opačný, proto $v_Z = v - u = (3-2)\,\mathrm{ms^{-1}} = 1\,\mathrm{ms^{-1}}$.
(c) Grafické řešení je na obrázku vpravo, včetně volby vztažné soustavy. Vidíme, že velikost vektoru $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ můžeme určit pomocí Pythagorovy věty jako

$$v_Z = \sqrt{v^2 + u^2} = 3{,}6\,\mathrm{ms^{-1}}.$$

Směr rychlosti určíme pomocí úhlu α

$$\mathrm{tg}\,\alpha = v/u \Rightarrow \alpha = 56^\circ.$$





(d) Požadujeme, aby výsledná rychlost $\mathbf{v}_Z = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ měla směr kolmo na proud, proto musí být člun nasměrován šikmo proti proudu (viz obrázek) pod úhlem β. Chceme, aby x-ová složka vektoru $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ byla nulová, proto

$$v_x + u_x = 0 \;\Rightarrow\; v\sin\beta = u \;\Rightarrow\; \sin\beta = u/v \;\Rightarrow\; \beta = 42^\circ,$$

y-ovou složku vektoru $\mathbf{v}_Z = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ určíme opět z obrázku jako

$$v_{Zy} = v_y = v\cos\beta = 3\,\mathrm{ms^{-1}} \cdot \cos 42^\circ = 2{,}2\,\mathrm{ms^{-1}}.$$

Čas t potřebný k překonání řeky pak bude $t = d/v_Z = 36\,\mathrm{m}/2{,}2\,\mathrm{ms^{-1}} = 16\,\mathrm{s}$.

Vztah pro skládání rychlostí se zdá být tak jednoduchý a tolikrát prakticky ověřený, že by snad nikoho nemohlo napadnout pochybovat o jeho platnosti. A přece, v roce 1905 Albert Einstein ukázal, že tento vztah neplatí pro vysoké rychlosti blížící se **rychlosti světla $c = 299\,792\,458\,\mathrm{ms^{-1}}$**. Je to rychlost, kterou se šíří světlo ve vakuu, jedna z nejdůležitějších fyzikálních konstant.

Uvažme případ našeho cestujícího ve vlaku a představme si, že nechodí tam a zpět ale vysílá světelný paprsek (o rychlosti c) po směru jízdy. Očekávali bychom, že rychlost paprsku vůči zemi bude $v = c + u$, kde u je rychlost vlaku. Kdybychom však měli možnost provést takový experiment, zjisili bychom, že rychlost světla vůči zemi vyjde opět c, stejně jako vůči vlaku! Právě tento fakt se stal základem Einsteinovy **speciální teorie relativity**. V ní bylo dokázáno a mnoha experimenty potvrzeno, že žádné těleso nemůže dosáhnout rychlosti

Víte, že…

Experimenty s měřením rychlosti světla v různých směrech provedl koncem 19. století Albert A. Michelson. Dokázal velmi přesně změřit rychlost světla po směru a proti směru pohybu Země (vůči Slunci). K tehdejšímu velkému překvapení fyziků vycházela rychlost světla v obou směrech naprosto stejná. Tuto záhadu vyřešil až Einstein v roce 1905.

Obrázek 3-9.
Vesmírná loď Enterprise. Lety nadsvětelnou rychlostí budou vždy možné jen ve fantastických filmech.

světla *c*, a to bez ohledu na volbu vztažné soustavy. Fyzikové například umí urychlit na vysoké rychlosti různé částice pomocí elektrického napětí. Při napětí 10 milionů voltů získá elektron rychlost 0,9988*c*. Při použití dvojnásobného napětí 20 milionů voltů se rychlost sice zvýší, ale jen na 0,9997*c*, rychlosti světla nikdy nedosáhne. Lety nadsvětelnou rychlostí budou vždy možné jen ve fantastických filmech.

Na závěr bychom měli čtenáře uklidnit, že jednoduchý vztah pro skládání rychlostí i další vztahy z klasické mechaniky můžeme bezpečně používat i nadále pro všechny běžné situace, neboť rychlosti těles kolem nás jsou oproti rychlosti světla velmi malé. Tedy konkrétně: Vesmírná sonda se vůči Zemi pohybuje rychlostí kolem $10\,000\,\mathrm{ms^{-1}}$. To je oproti rychlosti vašeho auta opravdu hodně, ale stále jen $0{,}00003c$. A při takto „malých“ rychlostech se relativistické efekty neprojeví. Pro konkrétní představu uveďme, jak by se podle Einsteinovy teorie skládaly rychlosti v případě pasažéra ve vlaku jedoucím rychlostí u, který jde po směru jízdy rychlostí v_A. Jeho rychlost vůči zemi by byla

$$v_A = \frac{v_A + u}{1 + \frac{v_A u}{c^2}}$$

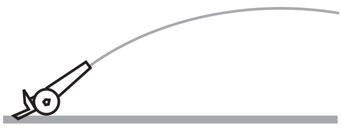
Sami si vyzkoušejte dosadit nejprve hodnoty $v_A = 1\,\mathrm{ms^{-1}}$ a $u = 10\,\mathrm{ms^{-1}}$ a potom $v_A = 0{,}8\,c$ a $u = 0{,}8\,c$.

Otázky

1
Uveďte několik příkladů
(a) dvourozměrného pohybu,
(b) trojrozměrného pohybu.
Charakterizujte tyto pohyby s využitím pojmů poloha, rychlost a zrychlení.

2
Řidič byl na konci obce zastaven policistou. Ten mu oznámil: „Pane řidiči, jel jste devadesát!“ Ale řidič se bránil: „Nevím, co myslíte: průměrnou rychlost, okamžitou, či její velikost? A v jaké vztažné soustavě?“ Pomozte policistovi opravit jeho výrok, aby byl přesný a správný.

3
Z děla byla vypálena střela pod elevačním úhlem 35°. Popište, jak se v průběhu jejího letu mění její
(a) vodorovná složka rychlosti,
(b) svislá složka rychlosti,
(b) velikost rychlosti,
(d) zrychlení.



4
Chlapec odhazoval kámen různými počátečními rychlostmi: (a) $\boldsymbol{v}_0 = (10, 5)\,\mathrm{ms^{-1}}$, (b) $\boldsymbol{v}_0 = (-10, 10)\,\mathrm{ms^{-1}}$, (c) $\boldsymbol{v}_0 = (-10, 5)\,\mathrm{ms^{-1}}$, (d) $\boldsymbol{v}_0 = (10, 0)\,\mathrm{ms^{-1}}$, (e) $\boldsymbol{v}_0 = (0, 11)\,\mathrm{ms^{-1}}$ (vztažná soustava je spojena se zemí, osa x je vodorovná, osa y směřuje vzhůru). Seřaďte jeho hody (1) podle výšky výstupu a (2) podle doletu. Ve kterých případech šlo o vodorovný vrh, o svislý vrh?

5
Představte si, že sedíte v autobuse, jedete stálou rychlostí po přímé silnici a vyhodíte balón přímo nad sebe. Jak se bude balón pohybovat vůči autobusu? Jak se bude pohybovat vůči zemi? Kam balón dopadne? Kam by balón dopadl v případě, že byste projížděli zatáčkou?

6
Letadlo letí rychlostí o velikosti $350\,\mathrm{kmh^{-1}}$ ve stálé výšce. Pilot vypustí balík se zásobou potravin. Jaká je (a) vodorovná, (b) svislá složka rychlosti balíku těsně po vypuštění? Jak by se změnila doba pádu balíku, kdyby byla rychlost letadla $450\,\mathrm{kmh^{-1}}$? Odpor vzduchu neuvažujte.

7
Na straně 29 jsme odhadovali teoretický dolet skokana za předpokladu, že jde o šikmý vrh. Které podstatné věci jsme přitom museli zanedbat?

8

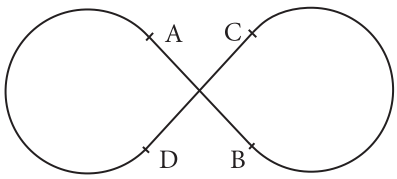
Uveďte příklady těles, která se pohybují:
(a) rovnoměrně přímočaře
(b) rovnoměrně křivočaře
(c) rovnoměrně zrychleně přímočaře,
(d) nerovnoměrně zrychleně křivočaře.

9

Vlak jel z Brna do Prahy. Které údaje budeme potřebovat, abychom dokázali určit (a) průměrnou rychlost vlaku, průměrnou velikost rychlosti vlaku?

10

Jak se mění zrychlení cyklisty, který opisuje při stálé velikosti rychlosti trajektorii tvaru osmičky na obrázku?

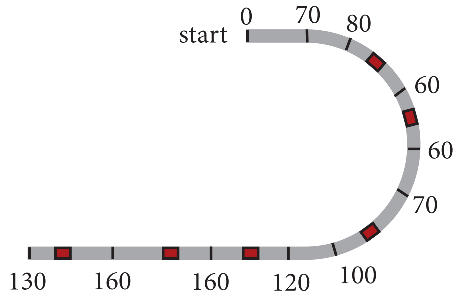


11

Částice se pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici. Které z následujících veličin se přitom nemění a které jsou nulové?
Rychlost, velikost rychlosti, zrychlení, tečné zrychlení, normálové zrychlení, frekvence, perioda.

12

Na obrázku je schematicky zachycena velikost rychlosti závodního auta na oválném okruhu v kmh^{-1}. Velikost rychlosti auta se mezi sousedními body nemění nebo se mění rovnoměrně mezi vyznačenými hodnotami. Doplňte přibližný směr zrychlení automobilu v červeně označených bodech.



13

Ke každé z následujících možností uveďte konkrétní příklad její realizace (například: těleso se pohybuje rovnoměrně přímočaře – “*vlak jede stálou rychlostí po rovných kolejích*”). Nebo napište „*nelze*”.
(a) Těleso se pohybuje rychlostí se stálou velikostí s nenulovým zrychlením.
(b) Těleso se pohybuje s konstantním zrychlením a směr jeho pohybu se změní v opačný.
(c) Těleso se pohybuje po kružnici a jeho zrychlení nesměřuje do středu kružnice.
(d) Těleso se pohybuje po kružnici a jeho zrychlení je nulové.
(e) Těleso se pohybuje rovnoměrně přímočaře a jeho zrychlení je nenulové.
(f) Rychlost tělesa a jeho zrychlení jsou nulové.
(g) Těleso se pohybuje tak, že jeho zrychlení mění směr, ale má konstantní velikost.

14

Proč se má kaskadér při vyskakování z jedoucího vlaku co nejvíc odrazit, skočit proti směru jízdy a ve vzduchu se ještě otočit o 180^0?

Úlohy

1

Střela je vystřelena počáteční rychlostí $30\,ms^{-1}$ pod elevačním úhlem 60^O. Odpor vzuchu neuvažujeme.
(a) Napište rovnice pro *x*-ovou a *y*-složku její rychlosti,
(b) napište rovnice pro *x*-ovou a *y*-složku její polohy,
(c) určete rychlost střely po uplynutí 2 s, [$\boldsymbol{v} = (15,\ 6)\,ms^{-1}$]
(d) určete polohu střely po uplynutí 2 s, [$\boldsymbol{r} = (30,\ 20)\,m$]
(e) určete dolet střely, [$D = 80\,m$]
(f) určete výšku výstupu. [$H = 35m$]

2

Hráč hodil šipku vodorovně rychlostí $20\,ms^{-1}$, mířil přitom přesně na střed terče. Za 0,19 s dopadla šipka do terče. Vypočtěte
(a) místo dopadu šipky (vzdálenost od středu terče), [17 cm]
(b) vzdálenost hráče od terče. [3,8 m]

3

Při ostřelování Paříže ze vzdálenosti 110 km používali Němci dělostřelecký kanón VW I přezdívaný “Tlustá Berta”.
(a) Vypočtěte, jaká by musela být počáteční rychlost střely při elevačním úhlu 45^O bez odporu vzduchu. [$1038\,ms^{-1}$]
(b) Můžeme v tomto případě odpor vzduchu zanedbat?
(c) Ve skutečnosti byly náboje vystřelovány pod elevačním úhlem větším než 45^O. Němci totiž zjistili, že tak dosáhnou téměř dvojnásobného doletu. Dokázali byste vysvětlit proč?

4

Určete velikost a směr zrychlení sprintera při běhu zatáčkou o poloměru 25 m. Velikost rychlosti běžce můžeme považovat za konstantní a rovnou $10\ ms^{-1}$.
[$4\,ms^{-2}$, směr do středu kružnice]

5

Vletí-li pilot stíhačky do zatáčky příliš prudce, může se vystavit vážnému nebezpečí. Dostředivé zrychlení může v tomto případě dosahovat až několikanásobku *g* a pilot může ztratit vědomí. Jaké je dostředivé zrychlení pilota (v jednotkách *g*) stíhačky F-22 při průletu kruhové zatáčky o poloměru 5,80 km rychlostí o velikosti 716 ms^{-1}?
[9*g*]

6

(a) Jakou rychlostí se pohybuje člověk stojící na rovníku vzhledem ke středu Země? [464 ms^{-1}]
(b) Jaké je jeho dostředivé zrychlení? [0,03 ms^{-2}]
(c) Jakou rychlostí se vůči středu Země pohybuje člověk v České republice? [298 ms^{-2}]

7

První člověk ve vesmíru Jurij Gagarin obletěl Zemi za 1 hodinu a 35 min ve výšce 520 km nad povrchem. Určete jeho rychlost.
[7,6 kms^{-1}]

8

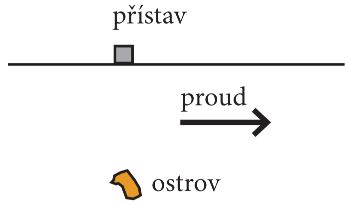
Vrtule ventilátoru se otáčí s frekvencí 5 Hz. Jak dlouho trvá jedna otáčka? Ve vzdálenosti 20 cm od osy otáčení sedí moucha, jaká je její rychlost?
[$T = 0{,}2$ s, $v = 6{,}3$ ms^{-1}]

9

Při pohledu do letového řádu zjistíte, že doba letu z Ameriky do Evropy bývá vždy o něco kratší než let opačný. Důvodem je převládající směr proudění vzduchu.
Vypočtěte časový rozdíl pro let o délce 4350 km. Rychlost letadla je 960 kmh^{-1}, průměrná rychlost větru je 87 kmh^{-1} západo-východním směrem. [50 minut]

10

Výletníci jedou na malém člunu z ostrova vzdáleného 1200 m od pobřeží (viz obrázek). Jejich člun vyvine maximální rychlost 5 kmh^{-1}. Podél pobřeží je však silný mořský proud o rychlosti 4 kmh^{-1}. Meteorologická stanice hlásí, že za 20 minut přijde bouře. Posádka člunu může vyrazit do přístavu nebo co nejrychleji k pobřeží. Propočítejte obě možnosti.



[Cesta přímo k pobřeží bude trvat 14 min, cesta přímo do přístavu 24 min.]