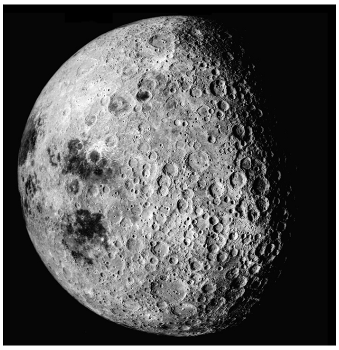
Kapitola 7

Mechanika tuhých těles

Víte, že…

Ze Země není možné nikdy spatřit Měsíc v té podobě jako na obrázku 7-2. Při pozorném prozkoumání si možná všimnete, že je na našem snímku mnohem víc kráterů a méně tmavých měsíčních „moří". Jak je to možné? Měsíc nám totiž ukazuje stále svoji dobře známou tvář, zatímco odvrácená strana zůstává skryta. K vysvětlení tohoto jevu stačí uvážit otáčení Měsíce kolem své osy. S jakou periodou musí Měsíc rotovat, abychom viděli pořád jen jednu jeho polovinu?



Obrázek 7-2. Takto viděli Měsíc astronauté z mise Apollo.

Cíle

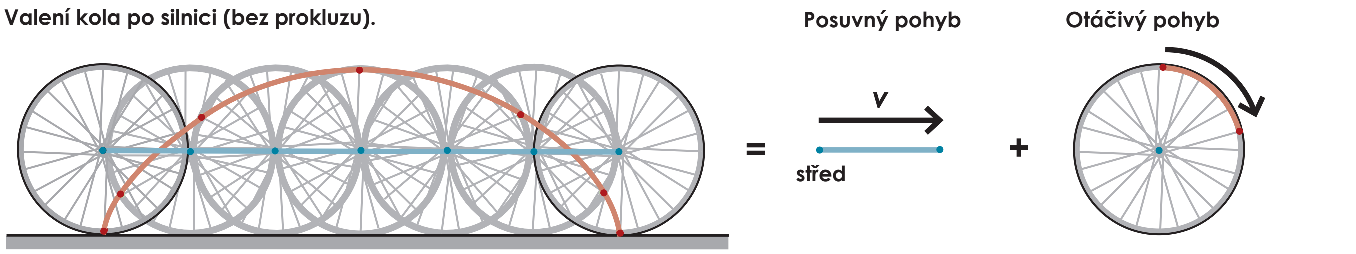
1. **Naučíte se, jak popsat otáčivý pohyb tělesa pomocí úhlových veličin.**
2. **Seznámíte se s pojmem moment síly. Poznáte, jak pomocí skládání momentů sil určit jejich výsledný otáčivý účinek na těleso.**
3. **Seznámíte se s pojmem těžiště tělesa a naučíte se řešit základní úlohy ze statiky.**
4. **Dozvíte se, jak se vypočítá kinetická energie otáčejícího se tělesa.**

7.1. Posuvný a otáčivý pohyb

Dosud jsme se zabývali pohybem těles, která jsme považovali za **hmotné body**. Zanedbání rozměrů těles bylo užitečné, protože nám umožnilo jednoduše popsat jejich pohyb a také pochopit základní zákony mechaniky. V této kapitole se zaměříme na situace, kdy rozměry a tvar tělesa hrají podstatnou roli. Budeme se zabývat pohybem **tuhých těles,** tedy těles, jejichž tvar považujeme za neměnný. Vyloučíme proto tělesa pružná, snadno deformovatelná a tekutá. Například vaše tělo není tuhým tělesem, protože při pohybu mění svůj tvar.

Pohyby tuhých těles jsou často složité a těžko popsatelné. Představte si například pohyb kola bicyklu jedoucího rovnoměrným přímočarým pohybem po silnici (viz obrázek 7-1). Každý bod kola se pohybuje po jiné trajektorii a také s jinou okamžitou rychlostí (v obrázku je červeně zakreslena trajektorie bodu na obvodu kola a modře trajektorie středu). Složitý pohyb celého kola můžeme lépe pochopit, představíme-li si jej jako složení dvou druhů pohybů. Jednak je to pohyb středu kola, který má mezi ostatními body zvláštní postavení. Pohybuje se po přímce rychlostí $\boldsymbol{v}$, což je zároveň rychlost pohybu celého bicyklu. Potom, vzhledem ke středu kola (ve vztažné soustavě s ním spojené a pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$) se všechny ostatní body kola pohybují po kružnicích kolem něj. Výsledný pohyb kola se tak skládá z **posuvného** pohybu středu rychlostí $\boldsymbol{v}$ a **otáčivého** pohybu všech ostatních bodů kolem pohybujícího se středu.

Kdyby se kolo neotáčelo, ale zůstalo v pohybu (například při brždění smy-



Obrázek 7-1. Pohyb kola bicyklu můžeme rozdělit na otáčivý a posuvný pohyb.

kem), bude vykonávat jen posuvný pohyb. Kdyby se naopak střed vůbec nepohyboval (například když otáčíme kolem na místě), půjde jen o pohyb otáčivý.

Posuvný pohyb zvládneme dobře popsat pomocí veličin, které známe z kinematiky hmotného bodu (poloha, rychlost, zrychlení). Popisu otáčivého pohybu se budeme věnovat v následujícím odstavci.

7.2. Kinematika otáčivého pohybu

Ze svého okolí známe mnoho příkladu otáčivých pohybů. Například otáčení listů větrné elektrárny, hodinových ručiček, převodových kol v motoru, ale také rotace Země nebo Měsíce.

U každého otáčivého pohybu můžeme najít význačnou množinu bodů, které při otáčení zůstávají v klidu. Nazýváme ji **osa otáčení**. Všechny ostatní body tělesa opisují kružnice, jejichž středy leží na ose otáčení. Proto bude výhodné popisovat otáčivý pohyb pomocí úhlových veličin. Jejich význam si ukážeme na příkladu otáčení rotoru větrné elektrárny (obrázky 7-3 a 7-4).

Pro popis otáčivého pohybu se používají tzv. úhlové veličiny, protože nejlépe vystihují chrakter otáčivého pohybu. První z nich je **úhlová poloha** ϕ. Vybereme si jeden význačný bod tělesa, který spojíme s osou. Tím určíme jeho základní „nulovou" polohu. Úhlová poloha je pak určena úhlem *XOA* mezi aktuální polohou vybraného bodu a základní polohou. Změnu úhlové polohy nazýváme **otočením** a značíme $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$. Příklady ukazuje obrázek 7-4.

Ve fyzice je výhodné určovat úhlovou polohu nikoliv ve stupních, ale v **radiánech**, neboli v **obloukové míře**. Mezi stupni a radiány platí jednoduchý vztah

$$360^0 = 2\pi \text{ (rad)}.$$

Jednotka rad je psána v závorce, protože ji můžeme vynechat (jedná se totiž o bezrozměrnou veličinu). Důležitou vlastností obloukové míry je, že velikost úhlu v radiánech stačí vynásobit poloměrem kružnice *r* a dostaneme **délku oblouku kružnice** *s* **příslušnou úhlu** ϕ (viz obrázek 7-4c). Platí

$$\boxed{s = r\phi \quad (\phi \text{ je v radiánech}).}$$

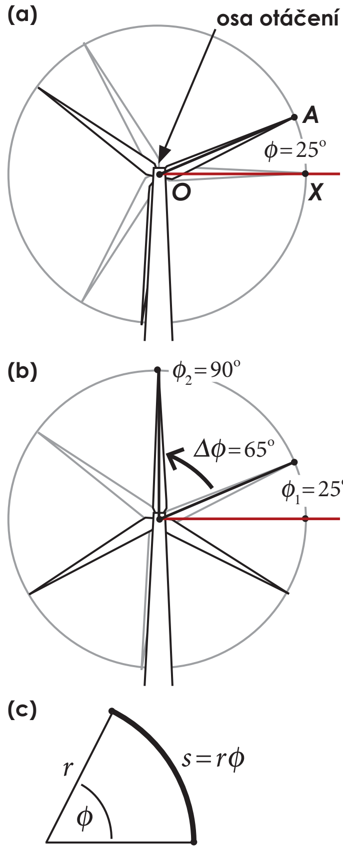
Výhody zápisu úhlu v obloukové míře si ukážeme později.

Nyní zkusme najít vhodnou veličinu, která odpovídá na otázku „jak rychle" se těleso otáčí. Víme, že všechny body tělesa se pohybují po kružnicích kolem osy otáčení. Rychlost každého bodu je jiná v závislosti na jeho vzdálenosti od osy otáčení, navíc neustále mění směr. Proto se pro otáčivý pohyb používá **úhlová rychlost** ω, která **vyjadřuje, o jaký úhel se těleso otočí za daný čas**. Vzpomeňme si na pohyb hmotného bodu na ose *x*, kde jsme definovali průměrnou a okamžitou rychlost (odstavec 2-3 na straně 16). Úhlová rychlost se definuje podobně. Stačí nahradit posunutí Δx otočením $\Delta\phi$ a dostaneme definici (okamžité) úhlové rychlosti

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.}$$

Z definice odvodíme jednotku úhlové rychlosti rad s^{-1}, případně jen s^{-1}. Často se používají i jiné jednotky vyjadřující počet otáček za časovou jednotku. Jsou to

Obrázek 7-3. Větrná elektrárna představuje jednoduchý příklad otáčivého pohybu.



Obrázek 7-4.
(a) Úhlovou polohu ϕ rotoru určuje velikost úhlu *XOA*.
(b) Otočení rotoru určuje rozdíl úhlových poloh, platí $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 90^o - 25^o = 65^o$.
(c) Základní vlastnost obloukové míry.

otáčky za sekundu a otáčky za minutu. Platí

$$1\,\text{ot/s} = 60\,\text{ot/min} = 2\pi\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}.$$

Pokud se úhlová rychlost tělesa mění (tj. otáčení se zrychluje, nebo zpomaluje), mluvíme o nerovnoměrném otáčivém pohybu. My se zde však omezíme jen na **rovnoměrný otáčivý pohyb**, kdy je úhlová rychlost konstantní.

Opět se nabízí srovnání s pohybem na ose *x*, kde pro polohu bodu v čase *t* platila rovnice $x(t) = x_0 + v_x t$. Když vztah přepíšeme pomocí úhlových veličin, dostaneme $\phi(t) = \phi_0 + \omega t$.

U rovnoměrného otáčivého pohybu můžeme rychlost otáčení určit ještě pomocí **frekvence a periody** podobně jako u rovnoměrného pohybu po kružnici (viz odstavec 3-3 na straně 33). Frekvence *f* není nic jiného než počet otáček za sekundu, což můžeme chápat jako úhlovou rychlost v jiných jednotkách. Máme-li úhlovou rychlost i frekvenci v základních jednotkách, pak platí $\omega = 2\pi f$. Uvážíme-li, že perioda *T* je převrácená hodnota frekvence, dostaneme

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.}$$

Na závěr ještě uveďme jeden důležitý vztah, který nám umožňuje určit, jak velkou rychlostí se pohybuje určitý bod tělesa, které se otáčí úhlovou rychlostí ω. Pro velikost rychlosti bodu při otáčivém pohybu se používá označení **obvodová rychlost**. Při rovnoměrném otáčivém pohybu ji můžeme určit snadno použitím vztahu $v = s/t$, kde *s* je dráha, kterou daný bod urazí za čas *t*. Bod ve vzdálenosti *r* od osy otáčení urazí dráhu $s = r\phi$, kde ϕ je příslušné otočení v radiánech. Dostaneme tak

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\phi}{t} = r\omega.$$

Obvodovou rychlost určitého bodu tedy získáme jednoduše vynásobením úhlové rychlosti tělesa ω a vzdálenosti *r* tohoto bodu od osy otáčení.

Příklad 7-1

Rotor větrné elektrárny má následující parametry: poloměr rotoru $r = 45\,\text{m}$, frekvence otáčení $f = 20\,\text{ot/min}$.

(a) Vypočtěte periodu, frekvenci a úhlovou rychlost otáčení rotoru v $\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ a obvodovou rychlost bodu na konci listu rotoru.

(b) Při fotografování otáčejícího se rotoru je nastaven čas snímání 1/60 s. O jaký úhel se za tuto dobu rotor otočí? Jakou vzdálenost přitom urazí bod na konci listu rotoru?

(a) Frekvence otáčení je $f = 20\,\text{ot/min} = 20/60\,\text{ot/s} = 0{,}33\,\text{Hz}$, perioda je $T = 1/f = 3\,\text{s}$, úhlová rychlost je $\omega = 2\pi f = 2{,}1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ a obvodová rychlost je $v = \omega r = 93\,\text{m}\,\text{s}^{-1} = 339\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$. Konce listů rotoru se pohybují obvodovou rychlostí přes 300 $\text{km}\,\text{h}^{-1}$. Tak velkou rychlost bychom pravděpodobně nečekali při pohledu na klidně (frekvence 0,33 Hz) se otáčející rotor. Dokázali byste vysvětlit proč?

(b) Za čas $t = 1/60\,\text{s}$ se rotor otočí o úhel $\phi = \omega t = 2{,}1\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \cdot 0{,}017\,\text{s} = 0{,}035\,(\text{rad})$. Bod ve vzdálenosti $r = 45\,\text{m}$ opíše část oblouku kružnice o délce $s = r\phi = 45\,\text{m} \cdot 0{,}035 = 1{,}6\,\text{m}$. Konce listů rotoru proto budou na fotografii neostré.

Úhel v radiánech převádíme na stupně a obráceně vždy podle vztahu

$$360^\circ = 2\pi\ (\text{rad}).$$

Například úhel $\phi = 0{,}035\,(\text{rad})$ **(viz příklad 7-1) převedeme na stupně takto:**

$$0{,}035\,\text{rad} = \frac{0{,}035}{2\pi} \cdot 360^\circ = 2^\circ$$

nebo obráceně:

$$2^\circ = \frac{2^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = 0{,}035\,\text{rad}.$$

7.3. Moment síly

V kapitole o zákonech pohybu jsme zkoumali pohybový účinek sil působících na různá tělesa. Uvážili jsme všechny působící síly, sečetli je a určili jejich výslednici. Jelikož jsme všechna tělesa považovali za hmotné body, nebrali jsme v potaz, **v jakých místech síly působí**. Pro posuvný pohyb to nebylo podstatné. Nyní si ukážeme, že v případě tuhých těles může být účinek stejné síly různý podle toho, kde na těleso působí. Stačí si představit jednoduchý pokus. Když chcete otevřít dveře, můžete na ně působit vždy stejnou silou (velikost i směr) v různých místech, jak ukazuje obrázek 7-5. Rozdíl mezi působením v bodech A a B nebudete pozorovat žádný, zatímco budete-li působit v bodě C, možná se vám vůbec nepodaří dveřmi pohnout. Vidíme, že otáčivý účinek síly závisí na vzdálenosti působiště od osy otáčení. Přesné vyjádření **otáčivého účinku síly na těleso** nám umožňuje veličina zvaná **moment síly**.

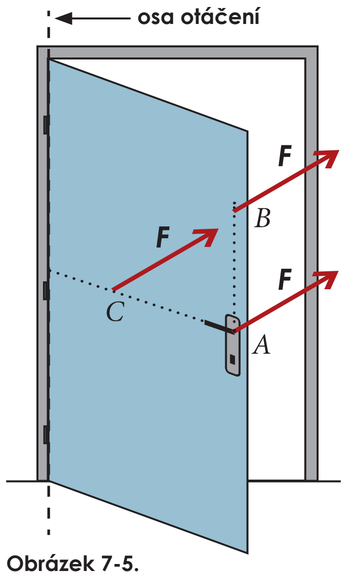
Moment síly budeme definovat jen pro případ, kdy se těleso může otáčet **kolem nehybné pevné osy otáčení** (například zmíněné dveře). Dále budeme uvažovat jen síly kolmé na osu otáčení.

Moment síly *M* je vektorová veličina. Jeho velikost definujeme jako **součin velikosti síly** F **a ramene síly** d

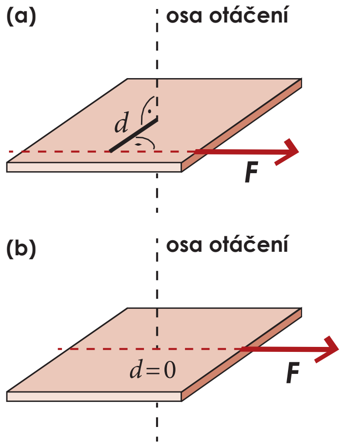
$$\boxed{M = Fd.}$$

Rameno síly je vzdálenost vektorové přímky síly **F** (přímky ve směru vektoru F) od osy otáčení. Rameno síly je vždy kolmé na osu otáčení i vektorovou přímku (viz obrázek 7-6a). Protne-li vektorová přímka osu, pak je moment síly nulový – síla nemá žádný otáčivý účinek (obrázek 7-6b).

Z definice snadno odvodíme, že jednotkou momentu síly je Nm (newton metr). Nm je také jednotkou práce či energie, kde používáme zkratku Nm = J (joule). Pro moment síly však joule nikdy nepoužíváme. Možná jste se už s jednotkou Nm setkali. Často se používá například u automobilových motorů.



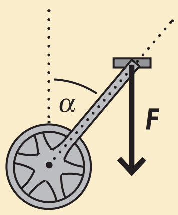
Obrázek 7-5.
Otáčivý účinek síly *F* závisí na tom, v jakém místě síla působí.



Obrázek 7-6.
(a) Rameno síly d je vzdálenost osy otáčení od vektorové přímky síly *F*.
(b) Vektorová přímka protíná osu otáčení, $d=0$, $M=0$. Síla nemá otáčivý účinek.

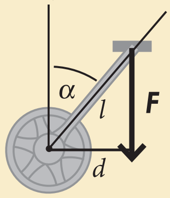
Příklad 7-2

Maximální možná síla, kterou může cyklista působit na pedál je dána jeho tíhou $F = mg$, kde $m = 75\,\mathrm{kg}$ je hmotnost cyklisty. Síla působí vždy svisle dolů. Vypočítejte moment této síly v situaci, kdy klika pedálu svírá se svislým směrem úhel α (viz obrázek). Vyřešte pro úhly (a) $\alpha = 0^0$, (b) $\alpha = 30^0$, (c) $\alpha = 90^0$. Vzdálenost pedálu od osy otáčení je $l = 22\,\mathrm{cm}$.

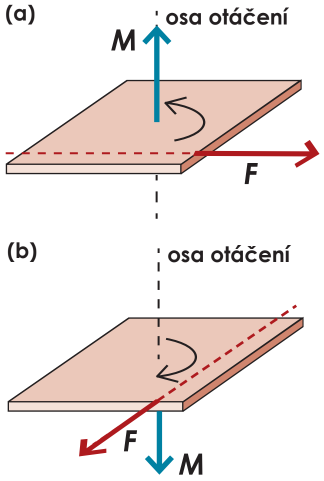


Rameno síly d (vzdálenost vektorové přímky síly **F** od osy otáčení) určíme podle obrázku $d = l\sin\alpha$. Nyní můžeme dosadit do vztahu pro velikost momentu síly

$$M = Fd = mgl\sin\alpha.$$



Pro zadané úhly dostaneme
(a) $M_a = mgl\sin 0^0 = 0\,\mathrm{Nm}$,
(b) $M_b = mgl\sin 30^0 = 75 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}5\,\mathrm{Nm} = 81\,\mathrm{Nm}$,
(c) $M_c = mgl\sin 90^0 = 75.9{,}8.0{,}22.1 = 162\,\mathrm{Nm}$.
Pro srovnání: Maximální točivý moment u motorů osobních automobilů se pohybuje od 100 do 300 Nm. Proč přesto nedokážeme kolo rozjet na rychlost 100 $\mathrm{kmh^{-1}}$, proč má motor automobilu mnohem větší výkon než cyklista?



Obrázek 7-7.
(a) Síla *F* roztáčí těleso v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček), moment síly směřuje podle pravidla pravé ruky podél osy nahoru.
(b) Síla *F* roztáčí těleso v záporném smyslu (po směru hodinových ručiček), moment síly směřuje podle pravidla pravé ruky podél osy dolů.

Směr vektoru $\boldsymbol{M}$ vyjadřuje, zda síla $\boldsymbol{F}$ roztáčí těleso po směru, nebo proti směru hodinových ručiček. Vektor momentu síly vždy leží ve směru osy otáčení a jeho orientace je dána **pravidlem pravé ruky**: Přiložíme-li pravou ruku k tělesu tak, aby prsty ukazovaly směr, kterým síla těleso působí, pak palec ukazuje orientaci momentu síly (obrázek 7-7).

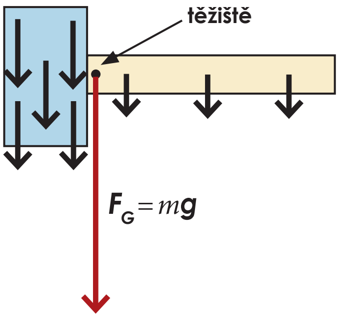
Pro vektory momentů sil působících na určité těleso tedy připadají vždy v úvahu jen dva navzájem opačné směry (díky omezení jen na síly ležící v rovině kolmé na osu otáčení). Definice byla zvolena právě tak, aby bylo možné sčítat momenty různých sil působících na jedno těleso a výsledný moment $\Sigma\boldsymbol{M}$ určit jako vektorový součet všech momentů

$$\Sigma\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_3+....+\boldsymbol{M}_n.$$

Výsledný moment sil $\Sigma\boldsymbol{M}$ má podobně důležitý význam pro otáčivý pohyb jako výsledná síla $\Sigma\boldsymbol{F}$ pro pohyb posuvný. Konkrétně si to ukážeme v odstavci věnovaném rovnováze těles.

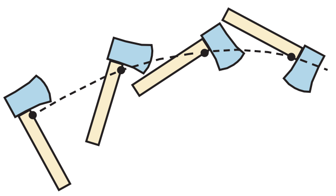
7.4. Těžiště

Pravděpodobně už o těžišti něco víte. Například, že „v něm působí gravitační síla“ nebo že „těžiště leží uprostřed tělesa“. Obě tvrzení dobře vystihují podstatu věci, zbývá je jen upřesnit.



Obrázek 7-8. Všechny části tělesa jsou přitahovány k Zemi. To je možné vyjádřit jedinou tíhovou silou $F_G = mg$ působící v těžišti.

Narozdíl od většiny ostatních sil, **tíhová síla**, nepůsobí na těleso v jenom místě, ale v celém jeho objemu. Tíhové pole je všude uvnitř tělesa (viz obrázek 7-8). Potřebujeme najít bod, do kterého můžeme **umístit tíhovou sílu** $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$, jejíž účinek na těleso bude stejný jako působení tíhového pole na celé těleso. Tento bod se nazývá **těžiště tělesa**.Že takový význačný bod existuje, se můžeme přesvědčit také pokusem.

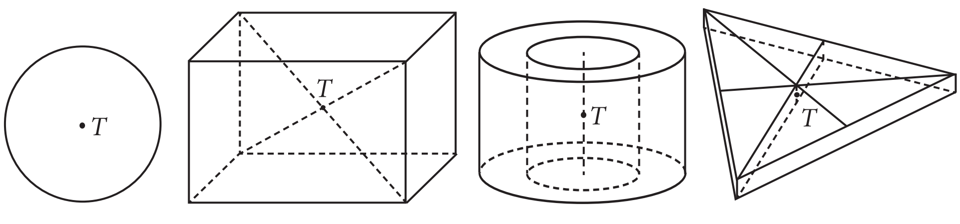


Obrázek 7-9. Těžiště vržené sekery se pohybuje po části paraboly.

Představte si, že vrhnete do prostoru libovolné tuhé těleso, například sekeru (viz obrázek 7-9). Sekera se během letu otáčí, její pohyb je složený z posuvného a otáčivého. Trajektorie různých bodů jsou složité křivky. Podrobnějším pozorováním (například na videozáznamu) bychom však zjistili, že jeden bod se pohybuje jednoduše po části paraboly, stejně jako hmotný bod při šikmém vrhu. Tímto bodem je právě těžiště sekery.

V praxi ale potřebujeme jednodušší způsob, jak najít těžiště konkrétních těles. Nachází-li se těleso v homogenním gravitačním poli (splněno pro běžná tělesa na povrchu Země), pak na všechny části tělesa působí stejná síla. Těžiště se proto bude nacházet „uprostřed“ tělesa, přesně řečeno v jeho **středu hmotnosti**. Návod na jeho nalezení se liší podle složitosti a typu tělesa.

1) Jednoduchá homogenní souměrná tělesa mají těžiště ve svém **geometrickém středu souměrnosti**. Příklady ukazuje obrázek 7-10. Všimněte si, že těžiště může ležet i mimo těleso.



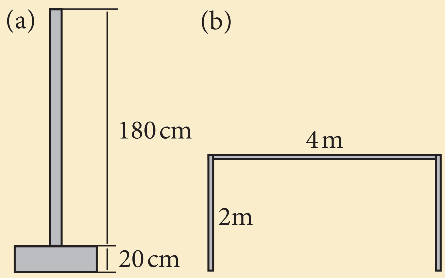
Obrázek 7-10. Těžiště jednoduchých homogenních těles

Některá méně souměrná homogenní tělesa (například kužel, polokoule,...) nemají geometrický střed. Jejich těžiště se dá určit výpočtem pomocí vyšší matematiky (integrálu).

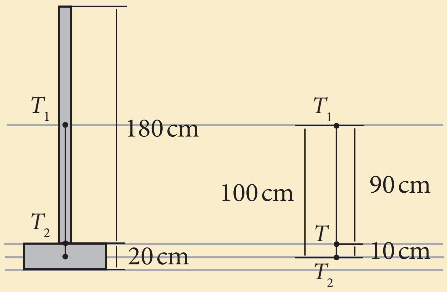
2) Těžiště **těles skládajících se z více jednoduchých částí** (jejichž těžiště známe) můžeme určit pomocí **váženého průměru**. Princip takového postupu ukazuje následující příklad.

Příklad 7-3

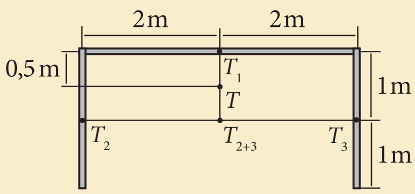
Určete polohu těžiště
(a) stojanu na dopravní značky (viz obrázek), skládajícího se ze dvou homogenních částí: betonového podstavce o hmotnosti 45kg a železné trubky o hmotnosti 5kg,
(b) fotbalové branky o rozměrech 2,5m krát 5m svařené ze stejných homogenních trubek podle obrázku.



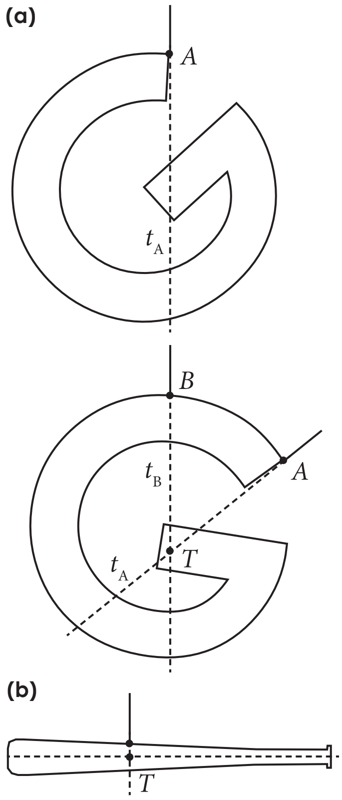
(a) Těžiště podstavce (T_2) i trubky (T_1) budou ležet v jejich středech (viz obrázek). Těžiště celého tělesa (T) bude ležet na spojnici T_1T_2. Zbývá započítat hmotnosti („váhy") obou částí. Těžiště T bude blíž těžišti s větší váhou a to tak, aby poměr hmotností odpovídal poměru vzdáleností bodu T od T_1 a T_2. S pomocí obrázku určíme, že $|T_1T_2| = 100\,\text{cm}$. Tuto vzdálenost rozdělíme v poměru hmotností $45\,\text{kg} : 5\,\text{kg} = 9 : 1 = 90\,\text{cm} : 10\,\text{cm}$. Těžiště celého tělesa se tedy nachází 10 cm nad těžištěm podstavce, což odpovídá hornímu okraji podstavce.



(b) Těleso si opět rozdělíme na části, jejichž těžiště dokážeme snadno určit. V našem případě to budou dvě svislé tyče s těžišti T_2 a T_3 a jedna vodorovná s těžištěm T_1 (viz obrázek). Nyní najdeme společné těžiště vodorovných částí (T_{2+3}), přitom nesmíme zapomenout, že bod T_{2+3} má teď váhu dvou dvoumetrových tyčí. Těžiště branky leží na spojnici bodů T_1 a T_{2+3}. Protože váha obou bodů je stejná, leží výsledné těžiště (T) ve středu úsečky T_1T_{2+3}. Těžiště branky se nachází ve výšce 1,5m nad zemí.



3) Těžiště můžeme určovat také **experimentálně**, například u nepravidelných těles, kde je výpočet příliš obtížný. Využíváme přitom skutečnosti, že zavěsíme-li těleso v jednom (jakémkoliv) bodě, ustálí se jeho poloha tak, že těžiště tělesa bude ležet na svislé přímce pod bodem závěsu (jedině v této poloze je moment tíhové síly nulový). Přímka spojující bod závěsu s těžištěm se nazývá **těžnice**. Všechny těžnice se protínají v jednom bodě - těžišti. Příklad ukazuje obrázek 7-11a. U částečně souměrných těles někdy stačí zjistit experimentem polohu jediné těžnice, těžiště se pak nachází v průsečíku těžnice s osou nebo rovinou souměrnosti tělesa (viz obrázek 7-11b).

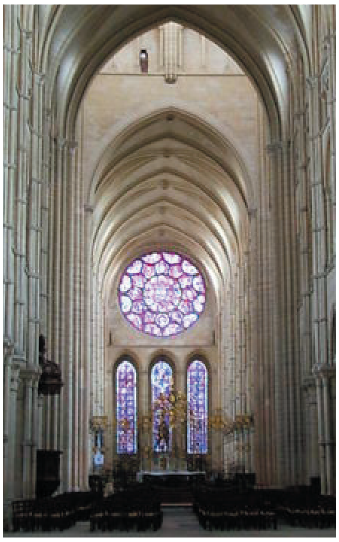


Obrázek 7-11.
(a) Určení těžiště nepravidelného tělesa pomocí těžnic.
(b) Určení těžiště basseballové pálky pomocí těžnice a osy souměrnosti.

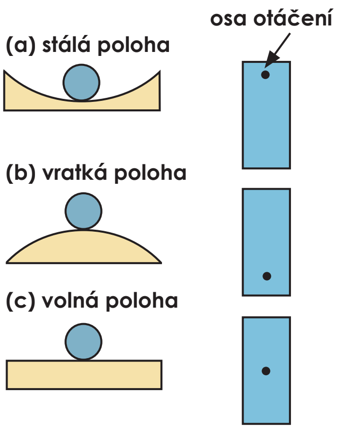
Víte, že…

Základy statiky objevili první stavitelé především na základě praktických zkušeností. Dnes se bez statického posouzení a přesných výpočtů neobejde žádná složitější stavba.

Například největším objevem gotické architektury byl lomený oblouk, který umožnil stavbu lehčích a větších konstrukcí. Dokázali byste zjistit proč?



Obrázek 7-12. Lomený gotický oblouk umožnil stavbu obrovských katedrál.



Obrázek 7-13. Tři různé polohy těles z hlediska stability.

7.5. Rovnováha těles

V mechanice jsme většinou zkoumali pohyb. Nyní se zaměříme na tělesa, která jsou v klidu, přesněji řečeno budeme zkoumat **statickou rovnováhu těles**. Myslíme tím situace, kdy se zkoumaná tělesa vhledem k vybrané vztažné soustavě žádným způsobem nepohybují – neposouvají ani neotáčejí.

Analýza statické rovnováhy je velmi důležitá v mnoha praktických oborech. Nejznámější je asi stavební statika. Na budovy, mosty a další stavby působí nejrůznější síly, kterým musí stavby odolat, musí zůstat ve statické rovnováze. Podobné je to i u konstrukce strojů nebo dopravních prostředků.

Aby těleso zůstávalo v klidu ve zvolené vztažné soustavě, musí být splněny dvě základní **podmínky rovnováhy**.

1) **Těleso se nesmí pohybovat posuvným pohybem**. Zajímá-li nás jen posuvný pohyb, můžeme těleso nahradit hmotným bodem, jehož pohyb se řídí druhým Newtonovým zákonem ve tvaru $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Víme, že hmotný bod setrvává v klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém, je-li výsledná síla nulová. Je-li tedy těleso na začátku v klidu a **výsledná síla je nulová**, těleso se nezačne pohybovat posuvným pohybem.

2) **Těleso se nesmí otáčet.** Zde je situace podobná, jen s tím rozdílem, že výsledný otáčivý účinek sil určuje výsledný moment sil $\Sigma \mathbf{M}$. Je-li **výsledný moment sil nulový**, znamená to, že se těleso buď otáčí stálou úhlovou rychlostí nebo se neotáčí vůbec. Bylo-li tedy na začátku v klidu, pak v něm také zůstane.

Uvedená podmínka platí obecně. My jsme však definovali moment síly jen vzhledem k pevné ose otáčení a pro síly ležící v rovině kolmé na tuto osu. To nám umožňuje řešit pouze „dvourozměrné“ problémy statické rovnováhy. V těchto případech můžeme výsledný moment sil určovat k pevně zvolené, avšak libovolné, ose otáčení.

Podmínky rovnováhy přehledně shrnuje následující tabulka

$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$	rovnováha sil	těleso se neposunuje
$\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$	rovnováha momentů sil	těleso se neotáčí

Rovnovážné polohy se od sebe mohou ještě lišit tím, co se s tělesem stane po drobném vychýlení z rovnováhy. Jestliže se těleso po vychýlení vrátí zpět do rovnovážné polohy, nachází se v rovnovážné poloze **stálé** (stabilní). Naopak, jestliže se po drobném vychýlení těleso zpět do statické rovnováhy nevrátí, ale dál se z ní vzdaluje, označujeme rovnovážnou polohu jako **vratkou** (labilní). Pokud těleso po vychýlení z rovnováhy zůstává v nové poloze, označujeme tuto polohu jako **volnou** (indiferentní). Jako příklad nám poslouží kulička na podložce nebo těleso otáčející se kolem vodorovné osy (viz obrázek 7-13).

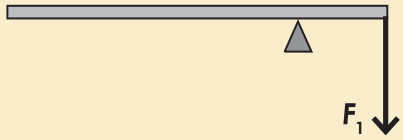
Je-li těleso ve stabilní poloze, můžeme jeho **stabilitu** dokonce přesně definovat jako **práci, kterou je třeba vykonat, abychom ho dostali do nejbližší vratké polohy** (viz příklad 7-5c).

Použití podmínek statické rovnováhy si ukážeme na dvou konkrétních příkladech. Při řešení úloh na statickou rovnováhu se držíme tohoto postupu:

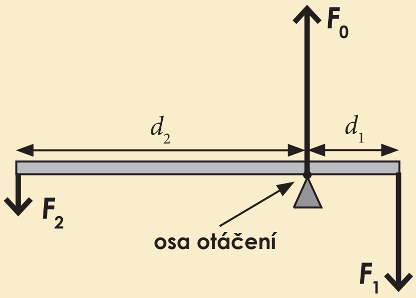
1. Sestrojíme náčrt, kde vyznačíme všechny působící síly včetně jejich působiště.
2. Zapíšeme podmínky silové a momentové rovnováhy.
3. Vyřešíme získané rovnice a dosadíme známé hodnoty.

Příklad 7-4

Ocelový nosník je podepřen ve čtvrtině své délky a na jednom konci na něj působí svislá síla $F_1 = 1200\,\mathrm{N}$ (viz obrázek). Jaká svislá síla musí působit na druhý konec nosníku, aby zůstal v klidu? Jaká síla pak působí na nosník v ose otáčení?
(a) Hmotnost samotného nosníku zanedbejte.
(b) Počítejte i s hmotností nosníku $m = 45\,\mathrm{kg}$.



(a) Nejprve sestrojíme načrt, kde vyznačíme všechny síly, které na nosník působí (viz obrázek). Velikosti sil $\mathbf{F_2}$ a $\mathbf{F_0}$ ještě neznáme, podstatný je jejich směr a působiště a ty dokážeme určit ($\mathbf{F_2}$ musí směřovat dolů, aby její moment působil proti momentu síly $\mathbf{F_1}$). Pomocí obrázku pak zapíšeme velikosti momentů všech tří sil vzhledem k ose otáčení



$$M_1 = F_1 d_1, \quad M_2 = F_2 d_2, \quad M_0 = 0.$$

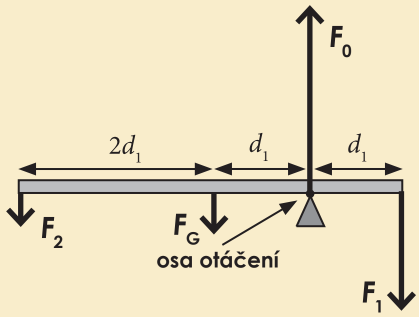
Pro úplnost dodejme, že vektor $\mathbf{M_1}$ směřuje podle pravidla pravé ruky za nákresnu, $\mathbf{M_2}$ před nákresnu. Rovnice pro momentovou rovnováhu $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$ se proto zapíše jednoduše jako

$$M_1 - M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \frac{d_1}{d_2} = F_1 \frac{1}{4} = 300\,\mathrm{N}.$$

Velikost síly $\mathbf{F_0}$ působící v ose otáčení plyne z podmínky silové rovnováhy $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Podle obrázku můžeme silovou rovnováhu opět vyjádřit jednoduše jako

$$F_0 = F_1 + F_2 = 1200\,\mathrm{N} + 300\,\mathrm{N} = 1500\,\mathrm{N}.$$

(b) Postupujeme stejně jako v části (a), jen přidáme ještě tíhu nosníku $\mathbf{F_G}$ s působištěm v jeho těžišti (viz obrázek). Velikost tíhové síly je $F_G = mg$. Rovnice pro momentovou rovnováhu $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$ bude mít tvar



$$M_1 - M_2 - M_G = 0 \quad => \quad F_1 d_1 - F_2 3d_1 - F_G d_1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_1 - 3F_2 - F_G = 0 \quad => \quad F_2 = \frac{F_1 - mg}{3}$$

Po dosazení ($g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$) dostaneme

$$F_2 = \frac{1200\,\mathrm{N} - 45\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}}{3} = 250\,\mathrm{N}.$$

Aby zůstala zachována silová rovnováha, musí se zvětšit také síla $\mathbf{F_0}$. Dostaneme

$$F_0 = F_1 + F_2 + mg = 1200\,\mathrm{N} + 250\,\mathrm{N} + 450\,\mathrm{N} = 1900\,\mathrm{N}.$$

Víte, že...

Příklad 7-4 nám zároveň odhaluje princip jednoho z prvních strojů na světě, který lidé využívali již ve starověku. Je to obyčejná páka, která umožňuje „převést“ menší sílu na větší.

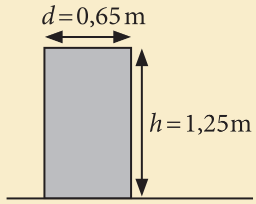
Páka patří do celé skupiny tzv. jednoduchých strojů, umožňujících převádět menší síly na větší a obráceně pomocí otáčivého pohybu. Patří sem například klín, šroub či kolo na hřídeli.

Zmenšení síly je vždy vyváženo nutností působit po delší dráze, takže výsledné množství mechanické práce vykonané s jednoduchým strojem je stejné jako bez něj.

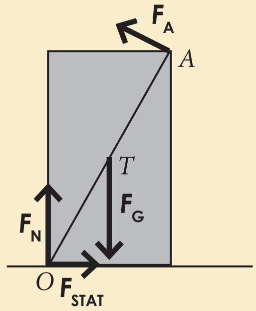
Které jednoduché stroje používáte nejčastěji?

Příklad 7-5

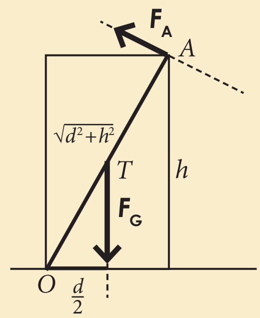
Potřebujete povalit dřevěný kmen tvaru válce o průměru 0,65 m a výšce 1,25 m (viz obrázek). Kmen je z bukového dřeva o hustotě 550 kgm^{-3}.



(a) Jaká nejmenší síla stačí ke splnění úkolu? V jakém místě a jakým směrem musíte na kmen působit? Nesmíte použít žádný jednoduchý stroj.
(b) Jaké další síly přitom budou na kmen působit?
(c) Jakou práci je třeba vykonat k převrácení kmene do vratké polohy?



(a)+(b) Nejprve vyznačíme do obrázku všechny působící síly v mezní situaci, kdy kmen právě začínáme zvedat. Budeme kmenem otáčet kolem vodorovné osy na kraji jeho podstavy procházející bodem *O*. Abychom těleso otočili, musí velikost momentu síly $\mathbf{F}_A$ překročit velikost momentu tíhové síly $\mathbf{F}_G$. Aby bylo rameno síly $\mathbf{F}_A$ (a tedy i její moment) co největší, musí síla působit v bodě *A* kolmo na spojnici *OA*. Působiště tíhové síly je v těžišti (ve středu) válce. Zachování silové rovnováhy zajišťují ještě kolmá tlaková síla $\mathbf{F}_N$ a statická třecí síla $\mathbf{F}_T$. Obě působí v ose, jejich momenty jsou proto nulové. Proto stačí porovnat velikosti momentů sil $\mathbf{F}_A$ a $\mathbf{F}_G$



$$M_A > M_G \quad \Rightarrow \quad F_A\sqrt{d^2+h^2} > mg\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad F_A > \frac{mgd}{2\sqrt{d^2+h^2}}\;.$$

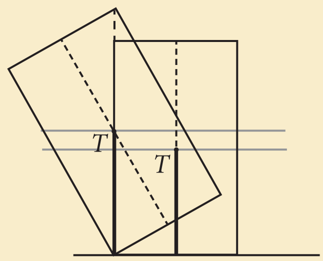
Ještě musíme vypočítat hmotnost válce pomocí jeho hustoty

$$m = V\rho = \pi r^2 h\rho = \pi\frac{d^2}{4}h\rho = 3{,}14\cdot\frac{0{,}65^2}{4}\cdot 1{,}25\cdot 550\,\mathrm{kg} = 228\,\mathrm{kg}$$

a dosadíme

$$F_A > \frac{228\cdot 9{,}8\cdot 0{,}65}{2\sqrt{0{,}65^2+1{,}25^2}}\,\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad F_A > 515\,\mathrm{N}.$$

(c) Práce vykonaná při přemístění ze stálé do vratké polohy je stabilita tělesa. Můžeme ji určit pomocí zákona zachování mechanické energie. Vykonaná práce bude rovna přírůstku gravitační potenciální energie kmene $\Delta E_p = mg\Delta h$. U tuhého tělesa je Δh změna výšky jeho těžiště. Podle obrázku je



$$\Delta h = \frac{\sqrt{d^2+h^2}}{2} - \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_p = mg\frac{\sqrt{d^2+h^2} - h}{2}$$

$$\Delta E_p = 228\cdot 9{,}8\,\frac{\sqrt{0{,}65^2+1{,}25^2} - 1{,}25}{2}\,\mathrm{J} = 178\,\mathrm{J}.$$

Pro převrácení do vratké polohy je nutné vykonat práci 178 J.

7.6. Kinetická energie otáčivého pohybu

Podívejme se na nějaké rychle rotující a těžké těleso, například rotor vrtulníku. Toto těleso má jistě velkou kinetickou energii, ale jakou? Známý vztah pro kinetickou energii hmotného bodu

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

nemůžeme přímo použít, protože každý bod se pohybuje různou rychlostí.

Vztah pro **kinetickou energii otáčivého pohybu** tělesa však můžeme odvodit následujícím způsobem. Představme si, že tuhé těleso se skládá z velkého počtu hmotných bodů o hmotnostech $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Při otáčivém pohybu kolem pevné osy se všechny body pohybují po kružnicích o poloměrech $r_1, r_2, \ldots, r_n$, ale všechny stejnou úhlovou rychlostí ω. Proto můžeme jejich obvodové rychlosti vyjádřit jako $v_1 = \omega r_1$, $v_2 = \omega r_2$, …, $v_n = \omega r_n$. Kinetickou energii celého tělesa pak vypočteme jako součet kinetických energií jednotlivých bodů

$$E_K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_n v_n^2 = \frac{1}{2}m_1\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 r_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_n\omega^2 r_n^2.$$

Odtud

$$E_K = \frac{1}{2}\omega^2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2).$$

Výraz v závorce obsahuje jen hmotnosti jednotlivých bodů tělesa a jejich vzdálenosti od osy otáčení. Je to tedy vlastnost tělesa nezávislá na tom, jakou rychlostí se těleso otáčí. Tuto fyzikální veličinu vyjadřující **rozložení látky v tělese vzhledem k určité ose** nazýváme **moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení** a platí

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2.$$

Tento vztah však nemůžeme přímo použít pro výpočet momentu setrvačnosti konkrétních tuhých těles, ve kterých je látka rozložena spojitě. K takovému výpočtu je nutné použít vyšší matematiku, která nám umožňuje „sčítat nekonečně malé příspěvky“. Na tomto místě nám proto nezbude, než se spolehnout na výsledky těchto výpočtů. Momenty setrvačnosti pro některá běžná tělesa jsou uvedeny v obrázku 7-14.

Pro fyziku je podstatné, že víme, co moment setrvačnosti znamená, a že lze vypočítat. Proto můžeme **kinetickou energii tělesa otáčejícího se kolem pevné osy** úhlovou rychlostí ω určit jako

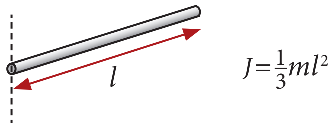
$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}J\omega^2.}$$

Koná-li těleso **současně posuvný pohyb i otáčivý pohyb kolem osy procházející těžištěm**, můžeme **celkovou kinetickou energii** vyjádřit jako součet energií posuvného a otáčivého pohybu

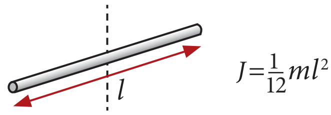
$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

přitom v je velikost rychlosti pohybu těžiště a J je moment setrvačnosti vzhledem k dané ose otáčení procházející těžištěm.

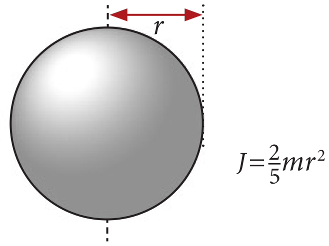
(a) tenká tyč
(vzhledem k ose procházející jejím koncem a kolmé na tyč)



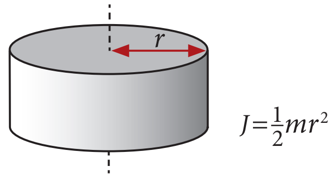
(b) tenká tyč
(vzhledem k ose procházející jejím středem a kolmé na tyč)



(c) koule o poloměru r
(vzhledem k ose procházející jejím středem)



(d) válec o poloměru r
(vzhledem k ose procházející jeho středem a kolmé na podstavu)



Obrázek 7-14.
Momenty setrvačnosti některých jednoduchých homogenních těles o hmotnosti m.

Víte, že…

U setrvačníku objevíme ještě jednu zajímavou vlastnost, bude-li se otáčet nikoliv kolem pevné osy, ale kolem volné. K vychýlení osy jeho rotace je potřeba mnohem větší síla než když je v klidu. Proto si osa rotace dobře zachovává svůj směr.

Toho využívá zařízení zvané gyroskop, které se používá se hlavně v letadlech jako umělý horizont, ale také třeba ke stabilizaci družic na oběžné dráze. Také planeta Země představuje velký setrvačník.

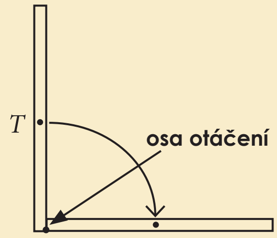
Zákon zachování mechanické energie musí platit i pro tuhá tělesa, počítáme-li s kinetickou energii otáčivého pohybu. Jeho použití ukazuje příklad 7-6.

Příklad 7-6

Suchý strom o výšce 6 m a hmotnosti 130 kg má přibližně tvar homogenní tyče. Strom u země uřízneme a necháme volně spadnout na vodorovnou zem. Jakou rychlostí dopadne na zem špička stromu? Odpor vzduchu zanedbejte.

K vyřešení úlohy použijeme zákon zachování mechanické energie. Využijeme toho, že těžiště můžeme považovat za působiště tíhové síly. Díky tomu můžeme určit změnu gravitační potenciální energie stromu

$$\Delta E_P = mgl/2,$$



kde m je hmotnost stromu a $l/2$ je změna výšky těžiště nad zemí (viz obrázek).
Tato energie se bude měnit na kinetickou energii otáčivého pohybu $E_K = \frac{1}{2}J\omega^2$. Těsně před dopadem na zem bude platit

$$\Delta E_P = E_K \quad => \quad \frac{mgl}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad => \quad \omega^2 = \frac{mgl}{J}.$$

Zbývá dosadit za moment setrvačnosti tenkou tyče vzhledem k ose procházející jejím koncem $J = \frac{1}{3}ml^2$ a úlovou rychlost vyjádřit pomocí obvodové $\omega = v/l$. Dostaneme

$$\frac{v^2}{l^2} = \frac{3mgl}{ml^2} \quad => \quad v = \sqrt{3gl} = \sqrt{3 \cdot 9{,}8 \cdot 6}\,\mathrm{ms^{-1}} = 13\,\mathrm{ms^{-1}}.$$

Špička stromu bude mít těsně před dopadem obvodovou rychlost $13\,\mathrm{ms^{-1}}$.

Rychle rotující těleso s velkým momentem setrvačnosti může mít značnou kinetickou energii. Takové těleso se nazývá **setrvačník**. Používá se často pro stabilizaci otáček strojů s nepravidelným chodem, jako jsou parní stroje, spalovací motory nebo elektrické generátory. Bohužel setrvačník, který by se dal využít ke „skladování“ většího množství energie, by musel být tak obrovský a otáčet se tak rychle, že jeho výroba není technicky výhodná.

Příklad 7-7

V padesátých letech byly ve Švýcarsku uvedeny do zkušebního provozu městské autobusy poháněné setrvačníkem, tzv gyrobusy. Pohon vozidla zajišťoval setrvačník o hmotnosti 1500kg, který se roztáčel elektromotorem na frekvenci 3000 ot/min. Předpokládejte, že setrvačník má tvar homogenního válce s poloměrem 1m.
(a) Kolik energie je „uloženo“ v plně roztočeném setrvačníku?
(b) Na jak dlouhou dobu provozu vystačí tato energie při průměrném příkonu gyrobusu 25 kW?

(a) Stačí vypočítat kinetickou energii setrvačníku podle vztahu $E_K = \frac{1}{2}J\omega^2$. Moment setrvačnosti válce je $J = \frac{1}{2}mr^2$, úhlová rychlost $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot (3000/60)\,\mathrm{rads^{-1}} = 314\,\mathrm{rads^{-1}}$. Dohromady

$$E_K = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}mr^2\omega^2 = \frac{1}{4}1500 \cdot 1^2 \cdot 314^2\,\mathrm{J} = 37\,\mathrm{MJ}.$$

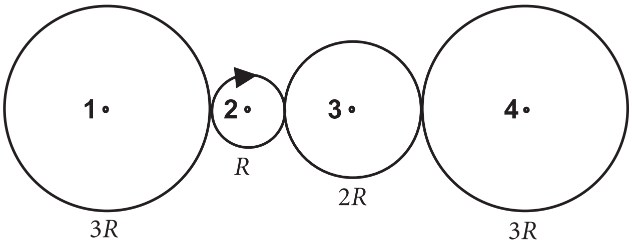
(b) Při průměrném příkonu $P = 25\,\mathrm{kW}$ se tato energie spotřebuje za čas

$$t = E_K/P = 37\,\mathrm{MJ}/25\,\mathrm{kW} = 1480\,\mathrm{s} = 25\,\mathrm{min}.$$

Otázky

1

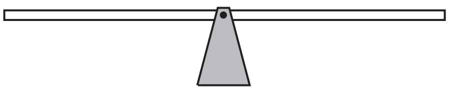
Na obrázku je schéma převodovky se čtyřmi ozubenými koly, která se otáčejí bez prokluzu. Poloměry kol jsou rovněž vyznačeny v obrázku, kolo 2 je poháněno motorem. Vyberte všechna správná tvrzení.



(a) Kola číslo 2 a 4 se otáčejí stejným směrem.
(b) Největší obvodovou rychlost mají body na obvodech kol 1 a 4.
(c) Největší obvodovou rychlost mají body na obvodu kola 2.
(d) Největší úhlovou rychlost mají body na kole 2.
(e) Největší úhlovou rychlost mají body na kolech 1 a 4.
(f) Kolo 2 se otáčí s větší frekvencí než kolo 1.
(g) Kolo 3 se otáčí s větší frekvencí než kolo 2.
(h) Všechna kola se otáčí se stejnou frekvencí.

2

Na obrázku je obyčejná dětská houpačka. Můžou se na této houpačce houpat dvě různě těžké děti? Za jakých podmínek?



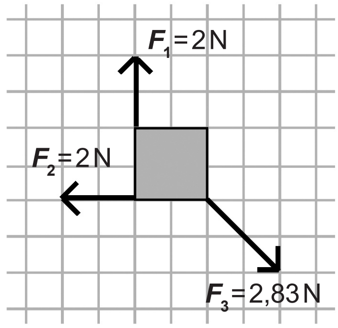
3

(a) Uveďte příklad složeného pohybu (posuvný + otáčivý). Najděte takovou vztažnou sosutavu, ve které je tento pohyb otáčivý (bez posuvného).
(b) Kolik nejméně sil potřebujete k uvedení tělesa do otáčivého pohybu (bez posuvného)? Uveďte konkrétní příklad.

4

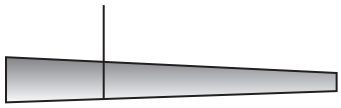
Na obrázku je pohled shora na homogenní čtvercovou desku, ležící v klidu na dokonale hladké podložce. Tři síly, jejichž velikosti i směry jsou vyznačeny na obrázku, působí na rohy desky. Určete, jestli se deska začne

(a) otáčet,
(b) posouvat.



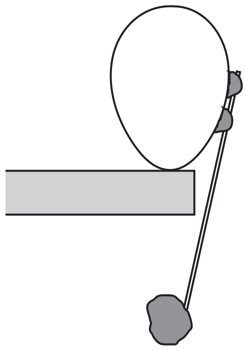
5

Potřebujete rozdělit kládu (viz obrázek) na dva stejně těžké kusy. Petr navrhuje tento postup: zavěsím kládu na lano tak, aby byla vyvážená, a poté ji rozříznu v místě závěsu. Jaký bude výsledek?
(a) Postup je správný, oba kusy budou vážit stejně,
(b) tlustší kus bude těžší,
(c) tenký kus bude těžší.



6

Je možné postavit vajíčko na špičku na desce stolu, aniž by se rozbilo? Stačí vám k tomu špějle a kus plastelíny. Návod na tento trik prozrazuje obrázek vpravo, vaším úkolem je vysvětlit jeho fyzikální princip.



7

Disk, prstenec a koule (viz obrázek) o stejné hmotnosti *m* byly současně volně vypuštěny dolů po nakloněné rovině. V jakém pořadí dorazí tělesa na konec nakloněné roviny? Odporové síly neuvažujte.
(*Návod: Použijte zákon zachování mechanické energie*)

[21 kN]

1

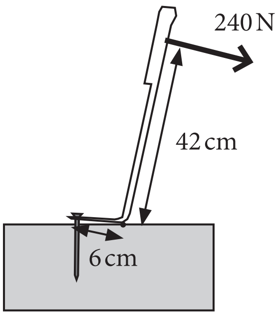
(a) Určete úhlovou rychlost otáčení hřídele v autě v základních jednotkách, je-li právě na jeho otáčkoměru údaj 4500 ot/min.
[$\omega = 471$ rads^{-1}]
(b) S jakou frekvencí se otáčí kolo horského kola o poloměru 32 cm, jedete-li právě po silnici rychlostí 25 kmh^{-1}?
[$f = 3{,}46$ Hz]

2

(a) Jaká je úhlová rychlost otáčení Země?
(b) Jakou rychlostí se pohybuje člověk na rovníku vzhledem ke středu Země?
(c) Jakou obvodovou rychlostí se pohybuje člověk v Brně (49^0 severní šířky) vzhledem ke středu Země?
[$\omega = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ rads^{-1}, $v = 463$ ms^{-1}, $v = 304$ ms^{-1}]

3

Podle parametrů vytahovače hřebíků na obrázku určete, jakou silou působí jeho spodní část na hřebík, má-li síla ruky velikost 240 N.
[1680 N]

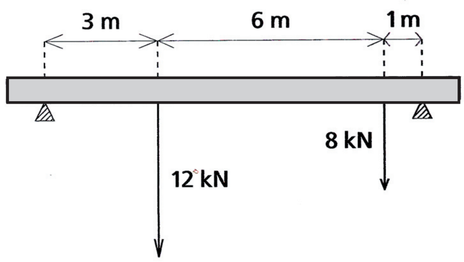


4

Dva muži nesou těžkou kládu o hmotnosti 100 kg dlouhou 5 m. Těžiště klády se nachází 2 metry od těžšího konce.
(a) Vypočtěte, jakou silou musí na kládu působit oba muži, nese-li jeden u tlustšího a druhý u tenšího konce.
(b) Jak musí nést kládu, aby oba nesli stejnou zátěž?
[(a) 600 N a 400 N]

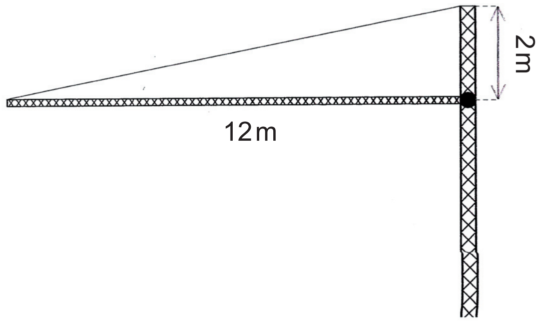
5

Vypočtěte síly, působící na podpěry ocelového nosníku. Hmotnost nosníku je 700 kg. [14,3 N a 12,7 N]



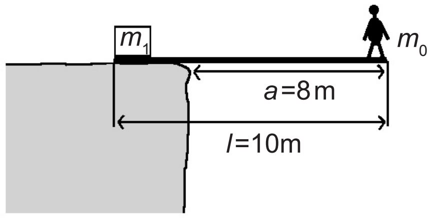
6

Vypočítejte velikost síly, kterou je napínáno lano držící rameno jeřábu. Hmotnost ramene je 700 kg, délka ramene je 12 m. Druhý konec lana je upevněn ve výšce 2 m nad osou ramene.



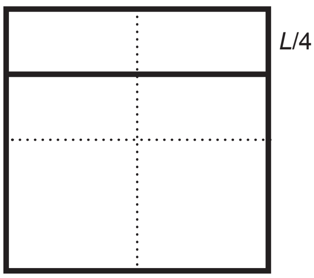
7

Homogenní prkno délky l=10m o hmotnosti m=50 kg je potřeba položit nad propast s přesahem a=8 m. Jak velké protizávaží (m_1) musíme položit na druhý konec prkna, aby až na konec prkna nad propast mohlo dojít dítě o hmotnosti m_0=20 kg? Předpokládáme, že se prkno neprohýbá.
[155 kg]



8

Rám nakreslený na obrázku je svařený z pěti stejných homogenních tyčí délky L. Vypočtěte vzdálenost těžiště rámu od jeho středu.
[L/20]

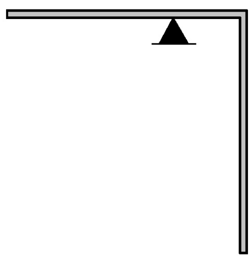


9

Těžiště můžeme určovat pomocí váženého průměru nejen u tuhých těles, ale i soustav těles, která nejsou nijak spojena. Najděte si všechny potřebné údaje a určete polohu těžiště soustavy Země – Měsíc.
[4700 km od středu Země]

10

Tenká kovová tyč délky L=120cm byla ohnuta uprostřed do pravého úhlu. V jaké vzdálenosti od bodu ohybu je třeba tyč podepřít, aby zůstala v rovnovážné poloze znázorněné na obrázku?
[15 cm]



11

Každý z trojice listů rotoru vrtulníku má délku 5,2 m a hmotnost 240 kg. Rotor se otáčí s frekvencí 350 otáček za minutu.

(a) Určete jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení (list rotoru lze pokládat za tenkou tyč). [$J = 6490\,\mathrm{kgm^2}$]

(b) Kinetickou energii rotoru. [$E_k = 4{,}36\,\mathrm{MJ}$]

(c) Proč potřebuje vrtulník dva rotory?

12

Porovnejte rotační a translační kinetickou energii Země za předpokladu, že je Země homogenní koule. Jak se bude takto získaný výsledek lišit od skutečnosti?

[$E_{rot} = 2{,}58 \cdot 10^{29}\,\mathrm{J}$, $E_{tr} = 1{,}34 \cdot 10^{33}\,\mathrm{J}$]

13

Porovnejte translační a rotační energii plného válce, který se valí bez prokluzu rychlostí o velikosti v.

[$E_{ROT} = 0{,}5 \cdot E_{TRANS}$]