UČEBNÍ TEXTY VYSOKÝCH ŠKOL

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství

RNDr. Jiří Klaška, Dr.

CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY I

PC-DIR Real, s.r.o., Brno

ÚVOD

Tento učební text je určen především posluchačům prvního ročníku oboru matematické inženýrství na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně. Skriptum obsahuje sbírku řešených a neřešených příkladů z předmětu Matematická analýza I. Látku tohoto předmětu tvoří elementy matematické logiky, množinová algebra a zejména pak následující klasické partie z matematické analýzy: reálná čísla, elementární funkce, limita a spojitost funkcí, derivace funkce, vyšetřování průběhu funkce, diferenciál funkce, Taylorova věta, křivky a funkce dané parametricky, primitivní funkce, Riemannův určitý integrál a nevlastní integrály. Vzhledem k tomu, že se tato tematika částečně shoduje s látkou probíranou v inženýrském a bakalářském studiu na Fakultě strojního inženýrství VUT, lze učební text doporučit i těmto oborům. Správné použití skripta předpokládá, že se čtenář pokusí o samostatné řešení příkladů a své výsledky pak srovná s uvedeným řešením. Samostatné řešení příkladů má studentům pomoci zlepšit jejich početní zručnost a ulehčit aktivní zvládnutí studované problematiky. S přihlédnutím k početnímu charakteru těchto skript lze dále doporučit následující literaturu:

1. G. N. Berman, *Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analyza*, Nauka, Moskva, 1971.
2. B. P. Děmidovič, *Sbornik zadač i upražněnij po matematičeskomu analyzu*, Nauka, Moskva, 1964.
3. J. Eliáš, J. Horváth, J. Kajan, *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1-2*, Alfa Bratislava, 1986.
4. G. M. Fichtengolc, *Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija, tom I a II*, Gostechizdat, Moskva, 1951.
5. F. Jirásek, E. Kriegelstein, Z. Tichý, *Sbírka řešených příkladů z matematiky*, SNTL, Praha, 1979.

Při sestavování nové sbírky úloh mohlo dojít k různým nepřesnostem a chybám. Autor bude proto čtenářům vděčen za upozornění na jakékoliv nedostatky ve výběru příkladů i v jejich řešení a uvítá náměty ke zlepšení textu.

Závěrem chci poděkovat Doc. RNDr. Ondřeji Došlému, DrSc. za pečlivé pročtení rukopisu a řadu cenných připomínek, které zlepšily celkovou úroveň textu.

Brno, březen 2000

Jiří Klaška

OBSAH

I. ÚVOD DO STUDIA MATEMATIKY

1. LOGIKA, MNOŽINY, DŮKAZY

První kapitola skript obsahuje úlohy z úvodu do studia matematiky, tedy ze základů matematiky. Základními pilíři, na kterých celá matematika stojí, je logika a teorie množin. Tyto disciplíny umožňují jiným matematickým oborům přesné vyjadřování a poskytují pravidla a metody pro konstrukce důkazů. Rozhodně nelze očekávat, že v této kapitole čtenář nalezne úplný přehled typových úloh z dané problematiky. V mnoha ohledech je dán výběr úloh tradicí a zejména je přihlédnuto k návaznosti na další tématické celky z matematické analýzy.

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1. K následujícím výrokům utvořte negaci a spočtěte její pravdivostní hodnotu.
(A) $3 > 5$ a $4 \leq 7$, (B) $3^2 = 9$ nebo $2|6$, (C) $1 + 1 = 3$ pak $\pi \in R$.

Řešení:
(A') $3 \leq 5$ nebo $4 > 7$, $P(A') = P(1 \vee 0) = 1$;
(B') $3^2 \neq 9$ a $2 \nmid 6$, $P(B') = P(0 \wedge 0) = 0$;
(C') $1 + 1 = 3$ a $\pi \notin R$, $P(C') = P(0 \wedge 1) = 0$.

2. K následujícím výrokům utvořte negaci a spočtěte její pravdivostní hodnotu.
(A) $\exists x \in R : (0 \geq |x| + 1) \vee ((x+2)(x+1) < -0.25)$,
(B) $\forall z \in C : (z \in Q) \Rightarrow ((z = \frac{x}{y}) \wedge (x, y \in Z) \wedge (y \neq 0))$,
(C) $\exists x \in R, 0 \leq x \leq 1 \forall y \in R : (y \neq \sqrt{x}) \vee (y < x^2)$.

Řešení:
(A') $\forall x \in R : (0 < |x| + 1) \wedge ((x+2)(x+1) \geq -0.25)$, $P(A') = 1$;
(B') $\exists z \in C : (z \in Q) \wedge ((z \neq \frac{x}{y}) \vee (x, y \notin Z) \vee (y = 0))$, $P(B') = 0$;
(C') $\forall x \in R, 0 \leq x \leq 1 \exists y \in R : (y = \sqrt{x}) \wedge (y \geq x^2)$, $P(C') = 1$.

3. Pomocí logické symboliky zapište následující matematická tvrzení:
(A) Ke každému kladnému reálnému číslu ε existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená čísla n větší než n_0 platí $|a_n - L| < \varepsilon$.
(B) Ke každému reálnému kladnému číslu ε existuje číslo δ reálné kladné tak, že pro každé reálné x splňující nerovnost $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Dále utvořte negace uvedených tvrzení.

Řešení:
(A) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \in N : n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.
Právě uvedené tvrzení má význam: posloupnost $\{a_n\}$ má limitu L, což zapisujeme

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

(A') $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in N, \exists n \in N : n > n_0 \wedge |a_n - L| \geq \varepsilon$.
(B) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Právě uvedené tvrzení B má význam: funkce $f(x)$ má vlastní limitu L, ve vlastním bodě x_0, což zapisujeme

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

(B') $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R : 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon.$

4. Když si dám aperitiv, dám si i předkrm. Nedám-li si hlavní jídlo, nedám si předkrm. Vyplývá z uvedeného, že dám-li si aperitiv, dám si i hlavní jídlo? Vyplývá z uvedeného, že dám-li si hlavní jídlo, pak si dám aperitiv?

Řešení: Nejprve provedeme vhodné označení jednotlivých atomárních výroků. Symbolem A označme výrok „Dám si aperitiv", symbolem B označme výrok „Dám si předkrm" a dále C označme výrok „Dám si hlavní jídlo". V provedeném označení mají výpovědi ze zadání úlohy tvar $A \Rightarrow B$ a $C' \Rightarrow B'$. Ptáme se, zda jsou úsudky $A \Rightarrow C$ a $C \Rightarrow A$ pravdivé. Pro jednoduchost dále označme

$$\mathcal{P} = (A \Rightarrow B) \wedge (C' \Rightarrow B'),$$

$$\mathcal{A} = ((A \Rightarrow B) \wedge (C' \Rightarrow B')) \Rightarrow (A \Rightarrow C),$$

$$\mathcal{B} = ((A \Rightarrow B) \wedge (C' \Rightarrow B')) \Rightarrow (C \Rightarrow A).$$

Nyní sestavíme tabulku pravdivostních hodnot všech možných kombinací.

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$C' \Rightarrow B'$	$A \Rightarrow C$	$C \Rightarrow A$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Z tabulky je ihned zřejmé, že první úsudek je správný a druhý nesprávný.

5. Šárka a Iva čekají před školou na svoje kamarády Petra, Honzu a Jirku. Šárka tvrdí: Přijde-li Petr a Honza, přijde i Jirka. Iva říká: Já si myslím, že když přijde Petr a nepřijde Jirka, nepřijde ani Honza. Na to povídá Šárka: To ale říkáš totéž co já. Rozhodněte, zda obě skutečně říkají totéž.

Řešení: Nejprve opět provedeme vhodné označení atomárních výroků. Symbolem A označme výrok „Petr přijde", symbolem B označme výrok „Honza přijde" a dále C označme výrok „Jirka přijde". V provedeném označení mají výpovědi Šárky a Ivy tvar $\mathcal{A} = (A \wedge B) \Rightarrow C$ a $\mathcal{B} = (A \wedge C') \Rightarrow B'$. Aby Šárka a Iva říkaly totéž, musí být $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ tautologie. Sestavíme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C'$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1

Z tabulky pravdivostních hodnot vyplývá, že $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ je tautologie, což znamená, že Šárka a Iva říkají skutečně totéž.

6. O podezřelých A, B, C z trestného činu jsou prověřeny tyto informace. Jestliže spáchal trestný čin podezřelý B, pak je vinen i podezřelý C. Spáchal-li trestný čin podezřelý C, pak mu pomáhal A. Nespáchal-li trestný čin podezřelý B, podílel se na činu podezřelý C. Je-li vinen podezřelý A, není vinen podezřelý B. Jaký závěr musí učinit z těchto informací vyšetřující soudce?

Řešení:Dále zaveďme označení $\mathcal{A} = B \Rightarrow C, \mathcal{B} = C \Rightarrow A, \mathcal{C} = B' \Rightarrow C, \mathcal{D} = A \Rightarrow B'$. Prověříme, za jakých okolností dojde k současnému splnění všech čtyř podmínek $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Sestavíme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$C \Rightarrow A$	$B' \Rightarrow C$	$A \Rightarrow B'$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0

Současné splnění všech čtyř podmínek je možné pouze v jediném případě, kterému odpovídá třetí řádek. Závěr vyšetřovatele: Trestný čin spáchali podezřelí A, C.

7. Buď dána dvouprvková množina $A = \{1, 2\}$ a tříprvková množina $B = \{x, y, z\}$. Kolik prvků má množina $2^A \times B$? Vypište všechny její prvky.

Řešení: Zřejmě množina 2^A má 4 prvky a platí $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Protože množina B je tříprvková, má kartézský součin $2^A \times B$ právě $4 \cdot 3 = 12$ prvků. Platí

$$2^A \times B = \{[\emptyset, x], [\emptyset, y], [\emptyset, z], [\{1\}, x], [\{1\}, y], [\{1\}, z],$$

$$[\{2\}, x], [\{2\}, y], [\{2\}, z], [\{1, 2\}, x], [\{1, 2\}, y], [\{1, 2\}, z]\}.$$

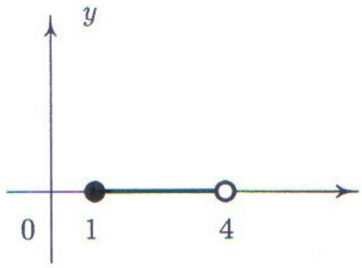
8. Jsou dány množiny $A = \{x \in R; |x - 3| < 1\}$, $B = \{x \in R; x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$. Spočtěte a v souřadnicovém systému zakreslete $B \cup (A - B)$, $(A \cap B) \times (B - A)$.

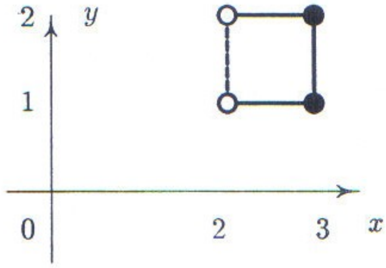
Řešení: Předně platí vztah $|x-3| < 1 \Leftrightarrow x \in (2,4)$. Odtud plyne $A = (2,4)$. Dále

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1 \leq 0 \wedge x-3 \geq 0) \vee (x-1 \geq 0 \wedge x-3 \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 1 \wedge x \geq 3) \vee (x \geq 1 \wedge x \leq 3) \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x \in \langle 1,3\rangle \Leftrightarrow x \in \emptyset \cup \langle 1,3\rangle = \langle 1,3\rangle.$$

Odtud plyne $B = \langle 1,3\rangle$. Pro množinu $B \cup (A - B)$ tedy platí: $B \cup (A-B) = \langle 1,3\rangle \cup ((2,4) - \langle 1,3\rangle) = \langle 1,3\rangle \cup (3,4) = \langle 1,4)$. Konečně množina $(A \cap B) \times (B - A) = ((2,4) \cap \langle 1,3\rangle) \times (\langle 1,3\rangle - (2,4)) = (2,3\rangle \times \langle 1,2\rangle$. Grafické znázornění zadaných množin je na následujícím obrázku.





9. Rozhodněte, zda množiny $A = 2^{\emptyset} \times \{\emptyset\}$, $B = \{1, 0.\overline{9}\}$ mají stejný počet prvků a zda mezi nimi platí vztah inkluze.

Řešení: Zřejmě platí $A = 2^{\emptyset \times \{\emptyset\}} = 2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. Množina A má tedy jediný prvek, kterým je prázdná množina. Označme $a = 0,\overline{9}$ a $b = 1$. Jestliže $a \neq b$, má množina B dva prvky. Platí ale

$$a = 0.\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots =$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots\right).$$

Posledně uvedený součet je součtem geometrické řady s kvocientem $q = 0.1$. Pro součet geometrické řady platí obecný vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Platí tedy

$$a = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1 = b.$$

Proto $0,\overline{9} = 1$ a množina $B = \{1\}$ je jednoprvková. Odhalili jsme zajímavou a překvapující skutečnost, že reálné číslo obecně nemá jednoznačně určený dekadický zápis. Dva různé dekadické zápisy tedy mohou představovat stejné reálné číslo. Závěr našeho šetření je tedy následující. Obě množiny A, B jsou jednoprvkové, $A \neq B$ a neplatí mezi nimi žádný vztah inkluze.

10. Ve výrobním podniku dodává dílna A své výrobky k dalšímu zpracování dílně B, a ta je po provedení svého úkolu předává dílně C. Dílna D vyrábí výrobky samostatně. Pomocí uspořádaných dvojic zapište relaci, která vyjadřuje výrobní závislost jednotlivých dílen.

Řešení: Hledaná relace R se dá zřejmě zapsat v následujícím tvaru

$$R = \{[A, B], [B, C], [A, C], [D, D]\}.$$

Při nedodání výrobků dílnou A je postižena také dílna C, zatímco dílna D závisí výrobně jen sama na sobě.

11. Buďte A, B, C libovolné množiny. Dokažte, že platí následující množinová inkluze

$$(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Řešení: Postupujeme následovně. Zvolíme libovolný prvek z množiny $(A \cap B) \cup C$ na levé straně a dokážeme, že leží v množině $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ na pravé straně. Při důkazu rozepíšeme formální množinový zápis podle definice na úroveň výrokové logiky, použijeme známých zákonů pro logické spojky a získaný výraz znovu množinově interpretujeme. Zápis důkazu má tvar: Buď $x \in (A \cap B) \cup C$ libovolný prvek. Pak podle definice sjednocení platí $x \in (A \cap B)$, nebo $x \in C$. To však podle definice průniku znamená, že $x \in A$ a současně $x \in B$, nebo $x \in C$. Nyní použijeme platnosti distributivního zákona pro logické spojky *a* a *nebo*. Na základě tohoto zákona platí $x \in A$, nebo $x \in C$ a současně dále platí $x \in B$, nebo $x \in C$. Tuto novou logickou formulaci interpretujeme množinově. První část posledního zápisu znamená, že $x \in A \cup C$ a druhá říká, že $x \in B \cup C$. Odtud však plyne $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Tím je důkaz inkluze dokončen. Uveďme nyní formální tvar zápisu tohoto důkazu.

$$x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in C \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in C)) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in A \cup C) \wedge (x \in B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Při zápisu důkazu obvykle používáme místo slovních komentářů stručnějšího symbolického vyjadřování pomocí logických spojek.

12. Buďte A, B, C libovolné množiny. Dokažte, že platí následující množinová rovnost

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C).$$

Řešení: Připomeňme úvodem, že důkaz množinové rovnosti $X = Y$ se skládá ze dvou důkazů množinových inkluzí. Nejprve je zapotřebí dokázat, že $X \subseteq Y$ a dále, že $Y \subseteq X$. Dokažme tedy nejprve inkluzi $A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$. Platí:

$$x \in A \times (B - C) \Rightarrow x = [a, b], \text{ kde } a \in A, b \in B - C, \text{tj. } a \in A, b \in B, b \notin C \Rightarrow$$

$$[a, b] \in A \times B \wedge [a, b] \notin A \times C \Rightarrow [a, b] = x \in (A \times B) - (A \times C).$$

Dále je třeba dokázat množinovou inkluzi $(A \times B) - (A \times C) \subseteq (A - B) \times C$. Platí:

$$x = [a,b] \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow [a,b] \in A \times B \ \wedge [a,b] \notin A \times C \Rightarrow$$

$$a \in A, b \in B, b \notin C \Rightarrow a \in A \wedge b \in B - C \Rightarrow [a,b] = x \in A \times (B - C).$$

Tím je tvrzení dokázáno. Uvedené řešení ukazuje typický důkaz množinové rovnosti. Často můžeme postupovat tak, že rovnost dokazujeme najednou pomocí řetězce ekvivalentních výroků. V tomto případě je však zapotřebí kontrolovat, zda platí obě implikace.

13. Buď A libovolná množina, buď B_i množina pro každé $i \in I$, kde I je neprázdná, tzv. indexová množina. Dokažte, že platí

$$A - \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A - B_i).$$

Řešení:

$$x \in A - \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \forall i \in I : x \notin B_i \Leftrightarrow$$

$$\forall i \in I : x \in A - B_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (A - B_i).$$

14. Dokažte, že pro množinový rozdíl neplatí asociativní zákon.

$$A - (B - C) = (A - B) - C.$$

Řešení: K důkazu tohoto tvrzení zřejmě stačí nalézt konkrétní příklad množin A a B, pro něž asociativní zákon neplatí. Nechť $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ a $C = \{a, b\}$. Pak platí

$$A - (B - C) = \{a\} - (\{b\} - \{a,b\}) = \{a\} - \emptyset = \{a\},$$

$$(A - B) - C = (\{a\} - \{b\}) - \{a,b\} = \{a\} - \{a,b\} = \emptyset.$$

15. Buďte R, S binární relace na množině A, tj. $R, S \subseteq A \times A$ a R^{-1}, S^{-1} příslušné inverzní relace. Dokažte, že platí

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}.$$

Řešení:

$$(R \cap S)^{-1} = \{[s,r]; [r,s] \in R \cap S\} = \{[s,r]; [r,s] \in R \wedge [r,s] \in S\} =$$

$$\{[s,r]; [r,s] \in R\} \cap \{[s,r]; [r,s] \in S\} = R^{-1} \cap S^{-1}.$$

16. Buďte R, S binární relace na množině A, a nechť $\circ$ značí operaci skládání relací. Dokažte, že platí

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Řešení:

$$(R \circ S)^{-1} = \{[s, r]; [r, s] \in R \circ S\} = \{[s, r]; \exists t \in A : [r, t] \in S \ \wedge [t, s] \in R\} =$$

$$\{[s, r]; \exists t \in A : [s, t] \in R^{-1} \wedge [t, r] \in S^{-1}\} = \{[s, r]; [s, r] \in S^{-1} \circ R^{-1}\} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

17. Buďte $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ injektivní zobrazení. Dokažte, že složené zobrazení $g \circ f : X \to Z$ je rovněž injektivní.

Řešení: Buďte $x, y \in X, x \neq y$. Podle předpokladu je zobrazení f injektivní, a tedy platí $f(x) \neq g(x)$. Analogicky zobrazení g je injektivní, a tedy pro $f(x), f(y) \in Y$ platí $g(f(x)) \neq g(f(y)) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$.

18. Buď $f : N \times N \to N$ zobrazení definované vztahem $f([x, y]) = (2x - 1)2^{y-1}$. Dokažte, že f je bijekce.

Řešení: Důkaz tvrzení má dvě části. Nejprve dokážeme, že zobrazení f je injektivní. K tomu je zapotřebí ukázat, že každé dva různé prvky z množiny $N \times N$ se zobrazí na různé prvky v množině N. Buďte tedy $[a, b], [c, d] \in N \times N, [a, b] \neq [c, d]$. Pak

$$[a, b] \neq [c, d] \Rightarrow (a \neq c) \vee (b \neq d) \Rightarrow (2a - 1) \neq (2c - 1) \vee (2^{b-1} \neq 2^{d-1}) \Rightarrow$$

$$(2a - 1)2^{b-1} \neq (2c - 1)2^{d-1} \Rightarrow f([a, b]) \neq f([c, d]).$$

Zbývá dokázat, že f je surjektivní. K tomu je zapotřebí dokázat, že ke každému prvku x z množiny N existuje aspoň jeden prvek z množiny $N \times N$, který se na prvek x zobrazí. To však znamená $Hf = N$. Hledaný prvek zkonstruujeme. Zřejmě

$$f\Big([\frac{1}{2}(x - 1), 1]\Big) = (2\frac{1}{2}(x - 1) - 1)2^{1-1} = x.$$

Odtud plyne, že na libovolné $x \in N$ se zobrazí prvek $[\frac{1}{2}(x - 1), 1]$. Tím je tvrzení dokázáno.

19. Proveďte přímý důkaz výroku $\sqrt{13 + \sqrt{12}} < 1 + \sqrt{13 - \sqrt{12}}$.

Řešení: Přímý důkaz tvrzení X provedeme tak, že zvolíme, respektive vyhledáme, pravdivý výrok Y. Pak pomocí řetězce implikací dokážeme, platnost implikace $Y \Rightarrow X$. Tím je dokázáno, že tvrzení X platí. Označme nyní danou nerovnost symbolem X. Nerovnost X upravíme na tvar X_1: $\sqrt{13 + \sqrt{12}} - \sqrt{13 - \sqrt{12}} < 1$. Umocněním na druhou obou nezáporných stran nerovnosti dostaneme nerovnost

$$X_2 : \qquad 13 + \sqrt{12} - 2\sqrt{(13 + \sqrt{12})(13 - \sqrt{12})} + 13 - \sqrt{12} < 1.$$

Nerovnost X_2 zjednodušíme na tvar $X_3 :\ 26 - 2\sqrt{169 - 12} < 1$ a odtud dále na tvar $X_4 :\ 25 < 2\sqrt{157}$. Opět obě nezáporné strany umocníme na druhou a získáme

$X_5: \ 625 < 4 \cdot 157$, odkud máme pravdivý výrok $Y: \ 625 < 628$. Tím však ještě není důkaz proveden. Zatím pouze víme, že platí

$$X \Rightarrow X_1 \Rightarrow X_2 \Rightarrow X_3 \Rightarrow X_4 \Rightarrow X_5 \Rightarrow Y,$$

přičemž Y platí. Přímý důkaz získáme obrácením postupu úprav. Tyto úpravy jsou však důsledkové, a proto dostáváme, že

$$Y \Rightarrow X_5 \Rightarrow X_4 \Rightarrow X_3 \Rightarrow X_2 \Rightarrow X_1 \Rightarrow X$$

platí. Protože víme, že Y platí, plyne odtud závěr, že X platí.

20. Proveďte nepřímý důkaz následujícího tvrzení. Pro každé celé číslo x platí: Je-li x^3 sudé číslo, pak x je sudé číslo.

Řešení: Nepřímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$ se provádí tak, že místo této implikace dokazujeme její obměnu $B' \Rightarrow A'$. Lze snadno ukázat, že implikace $A \Rightarrow B$ a její obměna $B' \Rightarrow A'$ mají vždy stejné pravdivostní hodnoty. Budeme tedy dokazovat následující implikaci: Je-li x liché číslo, pak x^3 je liché číslo. Jestliže x je liché číslo, pak existuje takové celé číslo m, že $x = 2m + 1$ a dále platí

$$x = 2m + 1 \Rightarrow x^3 = (2m + 1)^3 \Rightarrow x^3 = 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1 \Rightarrow$$

$$x^3 = 2(4m^3 + 6m^2 + 3m) + 1.$$

Jestliže $x^3 = 2(4m^3 + 6m^2 + 3m) + 1$, pak x^3 je liché číslo. Tím je proveden důkaz obrácené implikace, a tím i původního tvrzení.

21. Dokažte sporem, že jsou-li x, y libovolná komplexní čísla, pak platí

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Řešení: Symbolem A označme výrok „x a y jsou komplexní čísla" a symbolem B výrok $|x+y| \leq |x|+|y|$. Předpokládejme, že je pravdivý výrok $A \wedge B'$, což znamená, že x a y jsou komplexní čísla a $|x+y| > |x|+|y|$. Nechť tedy $x = a+ib$ a $y = c+id$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla. Pak podle předpokladu

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} < \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}.$$

Po snadné úpravě dojdeme k nerovnosti $(ad - bc)^2 < 0$, což je spor s vlastnostmi druhých mocnin reálných čísel. Musí tedy platit věta $A \Rightarrow B$, kterou jsme chtěli dokázat.

22. Dokažte, že množina všech prvočísel je nekonečná.

Řešení: Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že q je největší prvočíslo. Sestrojme číslo $p = q! + 1$. Je zřejmé, že toto číslo je větší nž q. Číslo p je ale dělitelné pouze čísly 1 a p, neboť při dělení libovolným prvočíslem ležícím mezi čísly 2 a q dává zbytek 1. Nalezli jsme tedy prvočíslo $p > q$, což je spor s předpokladem.

23. Russelův paradox (1903). Následující úvaha je typickým příkladem, který se objevil na počátku 20. století v souvislosti s třetí krizí matematiky. Buď A libovolná množina. Pak nastane právě jedna z možností: Buď $A \in A$ nebo $A \notin A$. Všechny množiny rozdělíme do dvou skupin $\mathscr{A} = \{A; A \in A\}$, $\mathscr{B} = \{B; B \notin B\}$. Je zřejmé, že žádná množina nemůže patřit do $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ současně a že $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ jsou také množiny. Uvažme nyní $\mathscr{B}$. Protože $\mathscr{B}$ je množina, musí sama ležet v $\mathscr{A}$ nebo $\mathscr{B}$. Připusťme nejprve $\mathscr{B} \in \mathscr{A}$. Pak ale podle definice $\mathscr{A}$ platí $\mathscr{B} \in \mathscr{B}$, což je spor, neboť $\mathscr{B}$ nemůže ležet v $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$. Připusťme tedy, že $\mathscr{B} \in \mathscr{B}$. Pak ale z definice $\mathscr{B}$ plyne $\mathscr{B} \notin \mathscr{B}$, což je rovněž spor, protože $\mathscr{B}$ nemůže ležet a současně neležet v$\mathscr{B}$. Vzniká neřešitelná situace na úrovni intuitivní teorie množin. Pojem množiny v intuitivním smyslu se ukázal příliš široký. Problém spočívá ve shrnování v jeden celek.

24. Pomocí věty matematická indukce dokažte tvrzení: Pro libovolné přirozené číslo n platí rovnost

$$3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1).$$

Řešení: Symbolem $V(n)$ označme výrokovou formu $3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ proměnné n. Důkaz pomocí věty matematická indukce se vždy skládá ze tří částí. Tvrzení které máme dokázat, má následující logickou strukturu $\forall n \in N : V(n)$. V první části dokážeme, že tvrzení platí pro počáteční případ $n = 1$, tj. že výrok $V(1)$ je pravdivý. To je však evidentní, neboť $3 = \frac{3}{2}(3 - 1) = 3$. Ve druhé části důkazu, která bývá zpravidla obtížnější, je zapotřebí dokázat, že pokud tvrzení $V(n)$ platí pro libovolné dané n, pak platí rovněž tvrzení $V(n+1)$. Předpokládejme tedy, že tvrzení $V(n)$ platí. Odtud plyne

$$3 + 3^2 + \cdots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3}{2}(3^n - 1) + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} + 3^{n+1} = \frac{3}{2}(3^{n+1} - 1).$$

Tím je druhá část důkazu hotova. Třetí závěrečná část důkazu spočívá ve znalosti věty, která se nazývá matematická indukce. Na základě této věty lze nyní tvrdit, že tvrzení platí pro libovolné přirozené číslo n.

25. Nalezněte $n-$tou mocninu matice A. Použijte princip matematické indukce.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve spočteme mocniny matice pro malé hodnoty n a na jejich základě stanovíme hypotézu pro obecné n. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na základě nalezených mocnin lze usuzovat, že obecný tvar matice bude

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

přičemž rohový prvek a_n matice A^n vyšetříme podrobněji. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ postupně získáváme následující hodnoty prvku a_n:

$$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$$

Zřejmě

$$a_{n+1} = a_n + n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) = \binom{n+1}{2}.$$

Na základě provedených výpočtů stanovíme hypotézu, že pro $n > 1$ platí

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuto hypotézu dokážeme pomocí matematické indukce. Zřejmě pro $n = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro libovolné $n > 1$ a dokažme, že platí rovněž pro $n + 1$. Spočtěme nyní $n + 1$ mocninu matice A. Z indukčního předpokladu plyne

$$\begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \binom{n}{2} + n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \binom{n+1}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle věty matematická indukce tvrzení platí pro libovolné n.

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

26. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků A a B.

$$A: \quad [(2 \cdot 3 = 6) \vee (3 \cdot 4 = 16)] \Rightarrow (2 < 1),$$
$$B: \quad [(1 < 2) \wedge (2 \neq 2)] \Leftrightarrow (3 \cdot 5 = 14).$$

27. Buď A nepravdivý výrok a B výrok, o jehož pravdivosti není nic známo. Co lze říci o pravdivosti výroku $A \Rightarrow B$?

28. Znegujte následující tvrzení:

(1) $(2 + 1 = 4) \Rightarrow (1 > 2 \vee 3 \leq 4)$;
(2) $((3 + 7 = 11) \wedge (5 \geq 1 + 7)) \Leftrightarrow ((100 < \infty) \vee (1 + 1 \neq 3))$;
(3) $\forall x \in R : x > 1 \Rightarrow x \in (0, \infty)$;
(4) $\exists x \in R : (x \neq 9) \vee (x > 7 \wedge x \leq 11)$;
(5) $\forall x \in N \exists y \in N : x + y = 100 \Rightarrow x \cdot y > 100$.

29. Rozhodněte, které z výrokových forem jsou tautologie a které kontradikce:

(1) $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$;
(2) $(A \vee B)' \wedge (A' \Rightarrow B)$;
(3) $((A \vee B) \wedge A') \Rightarrow B$;
(4) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \Rightarrow C$;
(5) $(A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C))$.

30. K formulím A', $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ najděte formule logicky ekvivalentní, v nichž se vyskytuje pouze logická spojka $|$ (Shefferův symbol).

31. Detektiv vyšetřuje případ vraždy. Vyšetřováním se okruh podezřelých zúžil na tři osoby A, B, C. O přítomnosti podezřelých na místě činu bylo zjištěno: Jestliže byl v kritické době na místě činu podezřelý C, pak tam nebyl podezřelý A, ale byl tam podezřelý B. Není pravda, že na místě činu nebyl A a přitom tam nebyl C. Pokud byl na místě činu podezřelý A, nebyl tam C, a když tam nebyl C, byl tam A. Detektiv promyslel všechny možnosti a zjistil, že mu informace k usvědčení vraha nestačí. Při dalším vyšetřování se však zjistilo, že pachatel byl na místě činu sám. Který z podezřelých je vrah?

32. Ve výstavní síni byl odcizen obraz. Z výslechů svědků lze fakta o přítomnosti podezřelých A, B, C ve výstavní síni shrnout do tří závěrů. 1. Ve výstavní síni v té době nebyl B, ale byl tam aspoň jeden z dvojice A, C. 2. Jestliže není pravda, že tam byl A současně s B, pak tam nebyl také C. 3. Podezřelý C tam byl právě tehdy, když tam nebyl žádný z dvojice A, B. Zjistěte, který z podezřelých zcizil obraz.

33. Vystoupení hudebních skupin v televizním pořadu je vázáno těmito podmínkami. Vystoupí A nebo nevystoupí B. Když nevystoupí C, pak nevystoupí A a vystoupí B. Jestliže není pravda, že vystoupí A nebo C, pak určitě vystoupí B. Rozhodněte, zda jsou za těchto podmínek správné úsudky: (1) Vystoupí-li B, pak vystoupí A i C. (2) Jestliže vystoupí C a nevystoupí B, pak vystoupí A. (3) Když nevystoupí ani A, ani B, vystoupí C. (4) Vystoupí A i C a přitom B nevystoupí.

34. Režisér si stěžuje řediteli divadla: Ani jeden z herců tohoto divadla neumí dobře zpívat a přitom dobře tančit. Ředitel: Nemohu s vámi souhlasit, že by skutečně každý z nich neuměl dobře zpívat a dobře tančit. Režisér: To já také netvrdím. Říkám jenom, že každý herec tohoto divadla není dobrý tanečník nebo není dobrý zpěvák. Rozhodněte, zda ředitel režisérovi rozuměl a zda režisér říkal v obou případech totéž.

35. Buď X libovolná množina. Rozhodněte, kdy platí vztah $\{X\} = X$.

36. Jsou dány prvky a, b. Dokažte, že $\{\{a, b\}\} = \{\{a\}, \{b\}\} \Leftrightarrow a = b$.

37. Rozhodněte, kolik prvků má množina $\{2\sqrt{5}, \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}, |2+4i|\}$.

38. Jaký vztah je mezi množinami $A = \{\frac{15}{7}, |\frac{7+3i}{5+2i}|, \frac{442}{374}\}$, $B = \{\sqrt{2}, 2.\overline{142857}\}$?

39. Převeďte na zlomek v základním tvaru následující racionální čísla $1.7\overline{32}$, $1.91\overline{5}$.

40. Následující komplexní čísla (1,1), (1,-2) zapište v algebraickém, goniometrickém a exponenciálním tvaru. Dále určete jejich sedmou mocninu a pátou odmocninu a zakreslete je v Gaussově rovině.

41. Kolik prvků má množina $\{e^{i\pi}, \sqrt[3]{-1}\}$?

42. Zjednodušte množinové výrazy $A \cap (A - (A - B)) = ?$, $(A \cap B) \times ((A - B) - A) = ?$

43. Buďte A, B libovolné množiny. Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$(2^{\emptyset} \subseteq \emptyset \vee ((A \subset A \times B) \wedge \emptyset \in 2^{\emptyset})) \Rightarrow A \subseteq B.$$

44. Jsou dány množiny $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$, $B = \left\{0, \frac{1}{1^2}, \frac{2}{2^2}, \dots\right\}$. Určete sjednocení, průnik a rozdíl těchto množin.

45. Určete $\sup M$ a $\inf M$, kde $M = \{2 - \frac{1}{1}, 2 - \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{3}, \dots\}$.

46. Určete $\sup M$ a $\inf M$, kde

$$M = \left\{\frac{3}{2^n}\right\} \text{ pro } n = 1, 2, 3, \dots$$

47. Kolik existuje podmnožin 100-prvkové množiny?

48. Jsou dány množiny $A = \langle -1, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = \{1\}$. V souřadnicovém systému nakreslete množiny $A \times B, B \times A, A \times C$.

49. Jsou dány množiny $A = (1, 2\rangle$, $B = \langle 3, 4\rangle$, $C = (-1, 2\rangle$. V souřadnicovém systému nakreslete množinu $(A \cup B) \times C$.

50. Uveďte příklad množin A, B tak, aby množina $A \times 2^B$ měla 18 prvků.

51. Nechť A, B jsou množiny. Dokažte, zda platí $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$.

52. Dokažte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí:

(1) $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$;
(2) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$;
(3) $A - B = A \div (A \cap B)$;
(4) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
(5) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

53. Dokažte, že pro symetrickou diferenci množin platí asociativní zákon

$$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C.$$

54. Dokažte, že pro intervaly na reálné ose platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}) = \langle 1, 2 \rangle, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{n}{n+1}, 2 + \frac{n}{n+1}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}) = (0, 3), \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{n}{n+1}, 2 + \frac{n}{n+1}) = (0, 3).$$

55. Nechť I je neprázdná indexová množina a nechť A, B_i jsou množiny pro každé $i \in I$. Dokažte, že platí

$$A \times \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i).$$

56. Určete definiční obor a obor hodnot relace $S = \{[x,y] \in R \times R; |x| + |y| \leq 5\}$.

57. Buď $S = \{[x,y] \in A \times A; x = 2y\}$ relace na množině $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. Nalezněte inverzní relaci S^{-1}.

58. Nechť $A = \{1,2,3\}$. Uveďte, kolik lze definovat různých relací:

(1) mezi množinami A a 2^A;
(2) mezi množinami A a $\emptyset$;
(3) na množině A;
(4) na množině $A \times A$.

59. Nechť jsou dány relace

$$S = \{[x, 3x^2 + 1] \in Z \times N; x \in Z\}$$

a

$$T = \{[x,y] \in N \times Z; y = -x \ \vee y = x^2 - 3, x, y \in N\}.$$

Určete relaci $S \circ T$ a relaci $T \circ S$.

60. Je dána relace $S = \{[x,y] \in N \times N; x + y > 3 \ \wedge \ x + 2y - 6 \leq 0\}$. Určete relaci S výčtem prvků. Dále určete definiční obor a obor hodnot relace S. Rozhodněte, zda S je injektivní zobrazení v N. Spočtěte S^{-1}. Je relace S^{-1} zobrazení?

61. Symbolem $B^A = \{f; f : A \ \to B\}$ označme množinu všech zobrazení A do B. Nechť A má 2 prvky a B má 3 prvky. Kolik prvků má kartézský součin $A^B \times B^A$?

62. Dokažte, že složení dvou zobrazení je zobrazení.

63. Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní:

(1) $f : N \times N \to N, \quad f([x,y]) = x + y$;
(2) $f : N \to N \times N, \quad f(x) = [2x, 2x+1]$;
(3) $f : N \times N \to 2^N, \quad f([x,y]) = \{x + y\}$.

64. Pro následující zobrazení $f : R \to R$ takové, že $f = \{[x,y]; y = f(x)\}$ určete, zda jsou injektivní, surjektivní, nebo bijektivní:

(1) $f(x) = 5x - 3$;
(2) $f(x) = x^2 + 7x + 12$;
(3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x$.

65. Určete, kolik existuje injektivních zobrazení tříprvkové množiny do pětiprvkové. A pětiprvkové do tříprvkové?

66. Rozhodněte, zda mezi množinami $N = \{1,2,3,\dots\}$ a $S = \{2,4,6,\dots\}$ existuje bijektivní zobrazení.

67. Rozhodněte, zda mezi množinou všech přirozených čísel a množinou všech racionálních čísel existuje bijektivní zobrazení.

68. Dokažte, že složení dvou surjektivních zobrazení je surjektivní zobrazení.

69. Je složením dvou bijektivních zobrazení opět bijektivní zobrazení? Dokažte.

70. Nechť A, B, C jsou množiny a nechť $g : A \to B$ je bijektivní zobrazení. Dokažte, že bijektivním zobrazením je pak také zobrazení

$$F : A^C \to B^C, \text{ kde } \forall f \in A^C : F(f) = g \circ f.$$

71. Proveďte přímý důkaz a důkaz sporem výroku $\sqrt{10 - \sqrt{11}} < \sqrt{10 + \sqrt{11}} - 1$.

72. Dokažte, že platí

$$2(\sin 54° - \sin 18°) = 1.$$

73. Dokažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

74. Pomocí matematické indukce dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n je číslo $n^3 + 5n$ dělitelné šesti.

75. Je dán výraz $V(n) = 2^{2n} - 7$, kde $n \in N$. Dokažte, že výraz $V(n)$ je dělitelný třemi pro každé $n \in N$.

76. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Proveďte přímý důkaz a důkaz matematickou indukcí.

77. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

78. Dokažte, že pro libovolné $n \in N$ existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou složenými čísly. Tzn. v posloupnosti prvočísel jsou libovolně velké mezery.

79. Nalezněte vztah pro délku strany a_n pravidelného 2^n-úhelníku vepsaného do kruhu o poloměru 1. Využijte matematické indukce.

80. Špatně provedená indukce může vést k nesprávným závěrům. Určete, kde je chyba v následujícím „důkazu“. Věta: Všechny květiny na planetě Zemi mají stejnou barvu. Důkaz: Stačí zřejmě dokázat, že libovolných n květin má stejnou barvu. Pro každé $n \in N$ buď $V(n)$ tento výrok: Libovolných n květin má stejnou barvu. Výrok $V(1)$ zřejmě platí. Nechť $n \geq 1$ a předpokládejme, že $V(n)$ platí. Buď K množina s $n + 1$ prvky. Zvolme $a, b \in K$, $a \neq b$ libovolně. Pak množiny $K - \{a\}$ i $K - \{b\}$ mají n prvků, takže všechny květiny v každé z těchto množin mají stejnou barvu. Tedy zejména $b \in K - \{a\}$ má stejnou barvu jako všechny květiny v $K - \{a, b\}$ a podobně $a \in K - \{b\}$ má stejnou barvu jako všechny květiny v $K - \{a, b\}$. Odtud plyne, že květiny a, b mají stejnou barvu. Tedy $V(n + 1)$ platí. Z věty matematická indukce plyne, že $V(n)$ platí pro každé $n \in N$.

II. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Následující kapitola obsahuje úlohy týkající se základních vlastností funkcí. K nejdůležitějším charakteristikám funkce patří bezesporu definiční obor, obor hodnot a graf. Každá funkce může mít dále celou řadu speciálních vlastností. Například sudost a lichost zajišťují symetrii grafu funkce, periodičnost zaručuje pravidelné opakování funkčních hodnot, ohraničenost zajistí, že se všechny funkční hodnoty budou pohybovat v pásu omezeném dvěma konstantami. Mezi další významné vlastnosti funkce patří například prostota, monotónnost a existence inverzní funkce. Vyšetřováním těchto základních charakteristik se budeme nyní zabývat.

81. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Řešení: $x \in Df \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \wedge 1-x \neq 0$. Odtud plyne $x \in Df$ právě když

$$(1+x \geq 0 \wedge 1-x > 0) \vee (1+x \leq 0 \wedge 1-x < 0) \Leftrightarrow (x \geq -1 \wedge x > 1) \vee (x \leq -1 \wedge x > 1)$$

$$\Leftrightarrow x \in \langle -1, 1) \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in \langle -1, 1) \cup \emptyset \Leftrightarrow x \in \langle -1, 1).$$

Celkem tedy platí $Df = \langle -1, 1)$.

82. Určete obor hodnot funkce

$$f(x) = \frac{5x}{|x|}.$$

Řešení: Předně je zřejmé, že $Df = R - \{0\}$. Dále platí

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Odtud plyne, že funkce f nabývá pouze hodnot –5 a 5. Platí tedy $Hf = \{-5, 5\}$.

83. Buďte dány funkce f, g. Rozhodněte, zda platí $f = g$.

$$f(x) = \frac{\dfrac{x+1}{4} - \dfrac{x-1}{5}}{\dfrac{x+1}{6} - \dfrac{x-1}{10}}, \quad g(x) = \frac{3(x+9)}{4(x+4)}.$$

Řešení: Je zapotřebí ukázat dvě věci. Aby se dvě funkce rovnaly, musí mít předně stejný definiční obor. V našem případě platí

$$Df = \{x \in R; x \neq \frac{x+1}{6} - \frac{x-1}{10}\} = \{x \in R; x \neq -4\}.$$

Protože $Dg = R - \{-4\}$ platí $Df = Dg$. Dále je zapotřebí ukázat, že funkční předpisy f, g stejně zobrazují, tj. $\forall x \in Df : f(x) = g(x)$. Provedeme algebraickou úpravu

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{4} - \frac{x-1}{5}}{\frac{x+1}{6} - \frac{x-1}{10}} = \frac{\frac{x+9}{20}}{\frac{2x+8}{30}} = \frac{3(x+9)}{4(x+4)} = g(x).$$

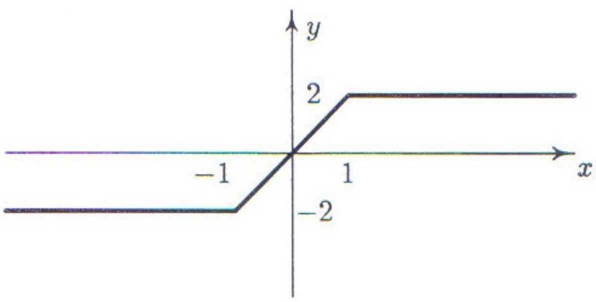
Odtud plyne, že se funkce f, g rovnají.

84. Nakreslete graf funkce $f(x) = |x+1| - |x-1|$.

Řešení: Provedeme podrobnější analýzu zadaného funkčního předpisu. Zřejmě platí

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x \in (-\infty, -1), \\ 2x & x \in \langle -1, 1 \rangle, \\ 2 & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Nyní již lze graf snadno nakreslit. Na každém z uvedených intervalů nakreslíme graf příslušné konstantní, resp. lineární funkce.



85. Nakreslete graf funkce

$$f(x) = |x^2 + 4x + 3|.$$

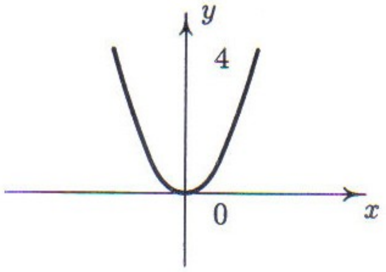
Řešení: Postupujeme následujícím způsobem. Funkční předpis přepíšeme pomocí úpravy na úplný čtverec na ekvivalentní tvar

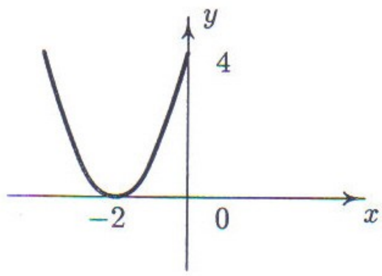
$$f(x) = |x^2 + 4x + 3| = |(x+2)^2 - 1|.$$

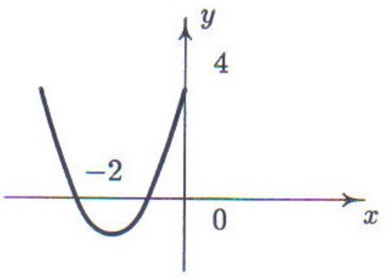
Dále úlohu rozdělíme na několik dílčích částí. Postupně nakreslíme pomocí posunutí a překlopení grafy následujících funkcí

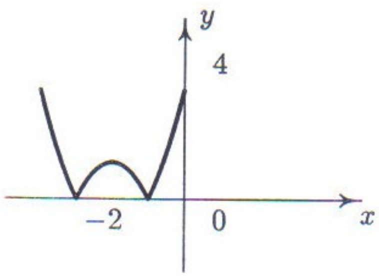
$$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = (x+2)^2,\ f_3(x) = (x+2)^2 - 1,\ f_4(x) = f(x) = |(x+2)^2 - 1|.$$

Graf funkce f_2 získáme posunutím základního grafu f_1 po ose x do bodu -2. Dále graf f_2 posuneme o hodnotu -1 ve směru osy y. Konečně graf $f_4 = f$ získáme překlopením záporné části kolem osy x. Postup je zřejmý z následujících obrázků.









86. Nakreslete graf funkce

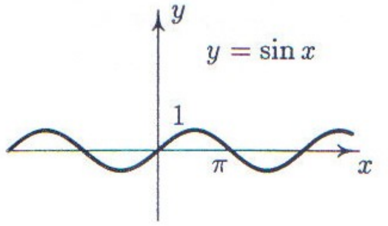
$$f(x) = 3 + \sin(x - 1).$$

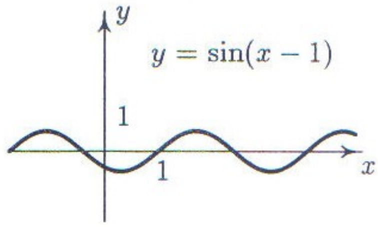
Řešení: Nejprve podrobně vysvětleme, jaký význam mají jednotlivé konstanty na celkový tvar grafu funkce $F(x) = A + B\sin(Cx + D)$. Předně konstanta A posouvá graf základní funkce o hodnotu A ve směru osy y. Přímka $y = A$ je tedy novou osou grafu. Konstanta B je tzv. amplituda, která „natahuje“, nebo „zkracuje“ graf ve směru osy y tak, že celková výška grafu funkce $F(x)$ je $2B$. Konstanta C určuje délku periody funkce $F(x)$ a konstanta D způsobuje posun grafu ve směru osy x.

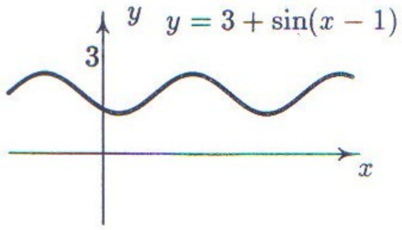
Úlohu opět rozdělíme na několik částí. Postupně nakreslíme grafy funkcí

$$f_1(x) = \sin x,\ \ f_2(x) = \sin(x - 1),\ \ f_3(x) = f(x) = 3 + \sin(x - 1).$$

Graf funkce f_2 získáme posunutím základního grafu funkce f_1 po ose x do bodu 1. Dále graf f_2 posuneme o hodnotu 3 ve směru osy y. Tím získáme graf zadané funkce $f_3 = f$. Grafy jednotlivých funkcí jsou uvedeny na následujícím obrázku.



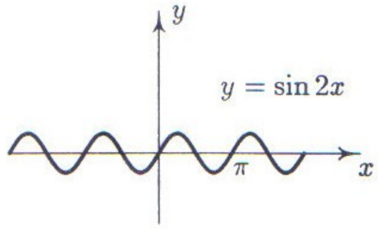


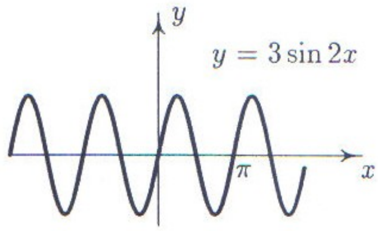


87. Nakreslete graf funkce

$$f(x) = 3 \sin 2x.$$

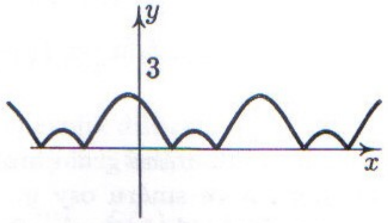
Řešení: Funkce $\sin x$ je periodická a její základní perioda je 2π. Nejprve určíme periodu funkce $f_1(x) = \sin 2x$. Pro periodu této funkce platí $0 \leq 2x \leq 2\pi$, z čehož plyne $0 \leq x \leq \pi$. Perioda funkce f_1 je tedy π. Graf dané funkce f získáme tak, že graf funkce f_1 natáhneme ve směru osy y na trojnásobnou délku.





88. Nakreslete graf funkce $f(x) = |2 \sin(3x - 1) - 1|$.

Řešení: Řešení úlohy rozdělíme do pěti kroků. Postupně budeme kreslit následující funkce: $\sin 3x$, $\sin(3x - 1)$, $2 \sin(3x - 1)$, $2 \sin(3x - 1) - 1$, $|2 \sin(3x - 1) - 1|$. Výsledný graf je na následujícím obrázku.



89. Dokažte, že daná funkce f je ohraničená.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Řešení: Musíme dokázat, že funkce f je ohraničená shora i zdola. Nejprve ukážeme, že funkce f je ohraničená shora. Zřejmě pro libovolné reálné číslo x platí nerovnost $(x-1)^2 \geq 0$. Z této nerovnosti však plyne $x^2+1 \geq 2x$ a dále

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Tím je dokázáno, že funkce f je shora ohraničená. Zbývá dokázat, že f je zdola ohraničená. Postupujeme analogicky. Pro libovolné reálné číslo x platí $(x+1)^2 \geq 0$, z čehož plyne $x^2+1 \geq -2x$ a dále

$$\frac{x}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2}.$$

Tím je dokázáno, že funkce f je zdola ohraničená. Daná funkce je tedy ohraničená.

90. Dokažte, že funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je neohraničená na intervalu $(0, \infty)$.

Řešení: Použijeme důkazu sporem. Předpokládejme, že funkce f je na intervalu $(0, \infty)$ ohraničená. Pak je pro všechna $x > 0$ funkce f ohraničená shora. To znamená, že existuje takové číslo h, že pro všechna $x > 0$ platí nerovnost

$$0 < \frac{1}{x} < h.$$

Zvolme libovolné číslo $x \in (0, \frac{1}{h})$, tj. $0 < x < \frac{1}{h}$. Odtud plyne, že $\frac{1}{x} > h$. Tím jsme došli ke sporu. Proto funkce f nemůže být na intervalu $(0, \infty)$ ohraničená.

91. Dokažte, že funkce $f(x) = x^2$ je ryze monotónní v intervalu $\langle 0, \infty)$, kdežto v intervalu $(-\infty, \infty)$ není ani monotónní.

Řešení: 1. Zvolme libovolná dvě čísla $x_1 < x_2$ z intervalu $\langle 0, \infty)$, takže je $0 \leq x_1 < x_2$. Odtud dostáváme $0 \leq x_1^2 < x_2^2$ neboli $f(x_1) < f(x_2)$. Tedy funkce $f(x) = x^2$ je v intervalu $\langle 0, \infty)$ ryze monotónní. 2. V intervalu $(-\infty, \infty)$ však není monotónní, neboť pro $x_1 = -5 < x_2 = 1$ je $f(x_1) = 25, f(x_2) = 1$, takže $f(x_1) > f(x_2)$. Naproti tomu pro $x_1^* = -1 < x_2^* = 5$ dostáváme $f(x_1^*) = 1 < f(x_2^*) = 25$.

92. Zjistěte, zda je zadaná funkce f sudá, případně lichá.

$$f(x) = x \ln |x|.$$

Řešení: Spočteme funkční hodnotu $f(-x)$. Platí

$$f(-x) = (-x) \ln |-x| = -x \ln |x| = -f(x).$$

Odtud plyne, že daná funkce je lichá.

93. Zjistěte, zda je zadaná funkce f sudá, případně lichá.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení: Spočteme funkční hodnotu $f(-x)$. Platí

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

Odtud plyne, že daná funkce je sudá.

94. Uveďte příklad funkce f, která je současně sudá i lichá.

Řešení: Aby byla funkce f sudá, musí platit vztah $f(-x) = f(x)$. Současně má být funkce f lichá, tzn. musí platit $f(-x) = -f(x)$. Odtud plyne $f(x) = -f(x)$, tj. $2f(x) = 0$. Má-li být funkce sudá a současně lichá, musí platit $f(x) = 0$. Těchto funkcí je nekonečně mnoho. Například $f(x) = 0$, $Df = (-5, -2) \cup (2, 5)$.

95. Dokažte, že funkce f je periodická a nalezněte její nejmenší periodu.

$$f(x) = \operatorname{tg} 3x + 2\sin 6x.$$

Řešení: Aby byla funkce f periodická s periodou p, musí platit $f(x+p) = f(x)$,tj.

$$\operatorname{tg}\,(3(x+p)) + 2\sin(6(x+p)) = \operatorname{tg} 3x + 2\sin 6x,$$

což znamená, že

$$\operatorname{tg}\,(3x+3p) - \operatorname{tg} 3x + 2\sin(6x+6p) - 2\sin 6x = 0.$$

Po úpravě levé strany dostáváme

$$\frac{\sin(3x+3p)}{\cos(3x+3p)} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + 2\sin(6x+6p) - 2\sin 6x =$$

$$= \frac{\sin(3x+3p)\cos 3x - \sin 3x\cos(3x+3p)}{\cos(3x+3p)\cos 3x} + 2\sin(6x+6p) - 2\sin 6x =$$

$$= \frac{\sin(3p)}{\cos(3x+3p)\cos 3x} + 2\sin(3p)\cos(6x+3p).$$

Levá strana se však rovná nule pro všechna $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}$ právě tehdy, když $\sin 3p = 0$, tj. právě když $p = \frac{1}{3}k\pi$, kde $k \in Z$. Nejmenší periodou dané funkce je tedy číslo $p = \frac{1}{3}\pi$.

96. Proveďte složení daných funkcí f a g, kde

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Řešení: Provést složení daných funkcí znamená zkonstruovat funkce

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{a} \quad G(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Platí:

$$F(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1},$$

$$G(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Z uvedeného příkladu je ihned zřejmé, že skládání funkcí není obecně komutativní.

97. Spočtěte složenou funkci $F(x) = f(f(f(x)))$, kde

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Řešení: Provedeme postupné dosazení do složené funkce a následující algebraickou úpravu

$$F(x) = f(f(f(x))) = f(f(\frac{1}{1-x})) = f(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = x.$$

98. Dokažte, že daná funkce f je prostá.

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

Řešení: Dokázat, že funkce f je prostá znamená dokázat, že f je injektivní zobrazení. Tzn. $\forall x_1, x_2 \in Df : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Nejprve určíme definiční obor funkce f. Snadno zjistíme, že $Df = \langle \frac{2}{3}, \infty)$. Buďte nyní $x_1, x_2 \in Df, x_1 \neq x_2$ libovolné. Odtud plyne $3x_1 \neq 3x_2$ a $3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2$. Protože $x_1, x_2 \in Df$, platí $\frac{2}{3} \leq x_1$ a $\frac{2}{3} \leq x_2$, a tedy $0 \leq 3x_1 - 2$ a $0 \leq 3x_2 - 2$. Odtud plyne, že $\sqrt{3x_1 - 2} \neq \sqrt{3x_2 - 2}$.

99. K dané funkci f nalezněte funkci inverzní, pokud existuje.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1.$$

Řešení: Nejprve dokážeme, že k funkci $f(x)$ existuje funkce inverzní. K tomu stačí dokázat, že je $f(x)$ prostá na svém definičním oboru $Df = R$. Důkaz provedeme sporem. Nechť existují reálná čísla x_1, x_2 taková, že $x_1 \neq x_2$ a současně platí $f(x_1) = f(x_2)$. Pak ale $\frac{1}{2}x_1 - 1 = \frac{1}{2}x_2 - 1$. Odtud plyne $\frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_2$. Tedy $x_1 = x_2$, což je spor. Funkce f je tedy prostá a k prosté funkci existuje funkce inverzní.

Nyní provedeme výpočet inverzní funkce f^{-1}. Nejprve ve funkčním předpisu $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ nahradíme symbol $f(x)$ ekvivalentním označením závisle proměnné y a získáme $y = \frac{1}{2}x - 1$. Nyní předpis chápeme jako rovnici, ze které spočteme nezávisle proměnnou x. Platí $y + 1 = \frac{1}{2}x$ a odtud získáme hledané vyjádření $x = 2y + 2$. V dalším kroku provedeme vzájemnou záměnu symbolů x a y. Dostáváme $y = 2x + 2$. Funkční předpis hledané inverzní funkce je tedy $f^{-1}(x) = 2x + 2$.

Dokažme nyní podle definice, že funkce f, f^{-1} jsou skutečně inverzní. K tomu je zapotřebí prověřit definiční vztah $f \circ f^{-1} = id = f^{-1} \circ f$. Platí
$(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(\frac{1}{2}x - 1) = 2(\frac{1}{2}x - 1) + 2 = x - 2 + 2 = x = id(x)$,
$(f^{-1} \circ f)(x) = f(2x + 2) = \frac{1}{2}(2x + 2) - 1 = x + 1 - 1 = x = id(x)$.

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Nalezněte definiční obory následujících funkcí:

100. $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$.

101. $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$.

102. $f(x) = \ln(x^2 - 9)$.

103. $f(x) = \ln(\ln x)$.

104. $f(x) = 4^{\sqrt{-x}}$.

105. $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$.

106. $f(x) = \operatorname{cotg}(4x - 3)$.

107. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$.

108. $f(x) = \dfrac{1}{\log_5(x-4)}$.

109. $f(x) = \ln \dfrac{2-x}{1-x}$.

110. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

111. $f(x) = \arccos(2x - 5)$.

112. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

113. $f(x) = \arcsin(2 - 3x)$.

114. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$.

115. $f(x) = \dfrac{5x-1}{2^x - 4}$.

116. $f(x) = \dfrac{\cos(x+1)}{5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 50}$.

117. $f(x) = \dfrac{\sin x}{4^x - 6 \cdot 2^x + 8}$.

118. $f(x) = \dfrac{x - \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos x}$.

119. $f(x) = \dfrac{3^{x+1}}{\sin x + \cos x}$.

120. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$.

121. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{|3-x| - |2x-1|}}$.

122. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3^x - 5}}$.

123. $f(x) = \sqrt{|x+1| - |x|}$.

124. $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{\sqrt{3x^3 - x^2 + 3x - 1}}$.

125. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - |x-1|}}$.

126. $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$.

127. $f(x) = \ln\sqrt{3 - 2x - x^2}$.

128. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln(x+5)}$.

129. $f(x) = \dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

130. $f(x) = \arccos(2\sin x)$.

131. $f(x) = \operatorname{arctg} \ln(x^2 - 5x + 6)$.

132. $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-3}$.

133. $f(x) = \sqrt{-x} + \sqrt{x+4}$.

134. $f(x) = \ln(x^3 - 3x^2 - x + 3)$.

135. $f(x) = \ln(\cos(\ln x))$.

Rozhodněte, zda se dané funkce f a g rovnají:

136. $f(x) = 1, \quad g(x) = \dfrac{x}{x}$.

137. $f(x) = \sqrt{x^2}, \quad g(x) = |x|$.

138. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x^2}$.

139. $f(x) = \log x^2, \quad g(x) = 2\log x$.

140. $f(x) = 2\ln x^3, \quad g(x) = 6\ln x$.

141. $f(x) = \ln e^x, \quad g(x) = e^{\ln x}$.

142. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}), g(x) = \cos x$.

143. $f(x) = ||x| - 1|, \; g(x) = |1 - |x||$.

Pomocí grafu základní funkce nakreslete následující grafy funkcí:

144. $f(x) = |x| + x$.

145. $f(x) = 3 - |x + 2|$.

146. $f(x) = ||x - 5| - 1|$.

147. $f(x) = |||x - 1| - 1| - 1|$.

148. $f(x) = (x - 1)^2 - 3$.

149. $f(x) = |x^2 + x|$.

150. $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$.

151. $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

152. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.

153. $f(x) = \left|\dfrac{x - 1}{x - 2}\right|$.

154. $f(x) = 1 - 3^{-x}$.

155. $f(x) = 3^{x-1} + 4$.

156. $f(x) = \log_2(-x)$.

157. $f(x) = |\log|x||$.

158. $f(x) = \log_x 3$.

159. $f(x) = -\dfrac{1}{2}(\cos 2x + 1)$.

160. $f(x) = -3\sin(2x + 8)$.

161. $f(x) = |2\sin(3x - 1) - 1|$.

162. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

163. $f(x) = |\sqrt{-x} - 1|$.

164. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x - 1|$.

165. $f(x) = |\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)|$.

166. $f(x) = \arccos x + 1$.

167. $f(x) = \arccos(x + 1)$.

168. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

169. $f(x) = \sin(\arcsin x)$.

170. $f(x) = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg} x)$.

171. $f(x) = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg} x)$.

172. $f(x) = |\sqrt{|x|} - 1|$.

173. $f(x) = |e^x - 2| + 1$.

174. $f(x) = \dfrac{5x}{|x|} + \sin x$.

175. $f(x) = 3 - |\sin x|$.

Rozhodněte, které z funkcí jsou sudé a liché:

176. $f(x) = 2^{-x} + 2^x$.

177. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

178. $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3$.

179. $f(x) = \log \dfrac{7 - x}{7 + x}$.

180. $f(x) = 7x^2 + \sin x^4$.

181. $f(x) = \dfrac{x(3^x + 1)}{3^x - 1}$.

182. $f(x) = \dfrac{x^4}{1 + \sqrt{x^2}}$.

183. $f(x) = \sin^3 x \cdot \sin x^2$.

Dokažte, že dané funkce jsou periodické a určete jejich nejmenší periodu:

184. $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$.

185. $f(x) = \log(\cos x + \sin x)$.

186. $f(x) = \sin x + \sin \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{x}{3}$.

187. $f(x) = \cos 7x + \cos 5x$.

188. $f(x) = \sin \dfrac{2x}{3}$.

189. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

190. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

191. $f(x) = \sin 2x + \mathrm{tg}\, \dfrac{x}{2}$.

Zjistěte na kterých intervalech je daná funkce rostoucí resp. klesající:

192. $f(x) = |x| + x$.

193. $f(x) = |x+3| + |x-2|$.

194. $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

195. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

196. $f(x) = 1 - \sqrt{x^2}$.

197. $f(x) = \sqrt{|x|} + 1$.

Utvořte složené funkce $F(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$ a $G(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$:

198. $f(x) = x^3 + \ln x, \quad g(x) = \sin x$.

199. $f(x) = 10, \quad g(x) = \log x$.

200. $f(x) = |x+1|, \quad g(x) = |x-3|$.

201. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \sqrt{x}$.

202. $f(x) = 3x + 2, \quad g(x) = x^2 - 3$.

203. $f(x) = \dfrac{1}{x-2} \quad g(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

K daným funkcím určete inverzní funkce pokud existují:

204. $f(x) = 2 - e^{x+3}$.

205. $f(x) = 3 \cdot 5^{x-1}$.

206. $f(x) = \dfrac{x-1}{2-3x}$.

207. $f(x) = 4^{\sin x}$.

208. $f(x) = 3^{\frac{x}{x-1}}$.

209. $f(x) = 3 + 4 \arccos(2x-1)$.

210. $f(x) = \ln(2-3x)$.

211. $f(x) = 2^{1+\ln\sqrt{x-2}}$.

212. $f(x) = 2^{3+\operatorname{arctg} x}$.

213. $f(x) = 1 + \sqrt{3 + e^{2x}}$.

214. $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2+1})$.

215. $f(x) = \dfrac{1+2^x}{4-2^x}$.

216. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt[3]{x}}$.

217. $f(x) = \log_x 2$.

218. Buď f libovolná funkce definovaná na intervalu $I = \langle -a, a \rangle, a > 0$. Dokažte, že funkce $F(x) = f(x) + f(-x)$ je sudá a funkce $G(x) = f(x) - f(-x)$ je lichá.

219. Nechť funkce f, g jsou periodické funkce s periodou p. Dokažte, že funkce $F(x) = f(x) + g(x), G(x) = f(x)g(x)$ a $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ jsou rovněž periodické.

220. Nechť funkce f je periodická s periodou p. Buď $a \neq 0$. Určete periodu funkce $F(x) = f(ax)$.

221. Dokažte následující tvrzení. Nechť funkce f je rostoucí. Pak platí: (a) Funkce $2f$ je rostoucí. (b) Funkce $-f$ je klesající. (c) Funkce $\frac{1}{f}, f \neq 0$ je klesající.

222. Nechť funkce f, g jsou definovány na stejném intervalu I. Jsou-li funkce f i g rostoucí, je funkce $f + g$ také rostoucí?

223. Najděte rostoucí funkci f a klesající funkci g tak, aby $f + g$ byla rostoucí.

224. Nalezněte monotónní funkce f, g tak, aby funkce $f + g$ nebyla monotónní.

2. POSLOUPNOSTI

Mezi významné speciální typy funkcí patří tzv. posloupnosti. Jedná se o funkce $f : N \to R$, jejichž definiční obor je roven množině přirozených čísel, nebo nějaké její části. Pro libovolné $n \in N$ položme $f(n) = a_n$. Hodnoty a_n se nazývají členy posloupnosti a pro posloupnost pak používáme označení $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Následující kapitola obsahuje základní tematické úlohy o posloupnostech. Mezi nejdůležitější z těchto úloh patří úlohy vyšetřující chování členů posloupnosti pro $n \to \infty$, tj. limity posloupnosti.

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

225. Je dána posloupnost

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

(a) Dokažte, že daná posloupnost je klesající.
(b) Rozhodněte, zda je uvedená posloupnost ohraničená.
(c) Vyjádřete tuto posloupnost rekurentně.

Řešení: (a) Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající, když pro všechna $n \in N$ platí $a_{n+1} < a_n$. V tomto případě má platit

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Z uvedené nerovnosti plyne $n + 1 > n$ a dále $1 > 0$, což zřejmě platí. Obrácením postupu dojdeme od nerovnosti $1 > 0$ k nerovnosti $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, a tím jsme dokázali, že daná posloupnost je klesající.
(b) Pro každé $n \in N$ platí $\frac{1}{n} > 0$, tzn. že daná posloupnost je zdola ohraničená. Zároveň pro všechna $n \in N$ platí $\frac{1}{n} \leq 1$, neboť tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností $n \geq 1$. Proto posloupnost je i zhora ohraničená, a tedy i ohraničená.
(c) Pro $n = 1$ dostaneme $a_1 = 1$. Protože $a_n = \frac{1}{n}$ a $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, platí

$$a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} = \frac{a_n}{a_n + 1}.$$

Danou posloupnost můžeme tedy rekurentně vyjádřit vztahem

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}.$$

226. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentním vztahem

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} a_n.$$

Nalezněte exaktní vzorec pro n-tý člen.

Řešení: Pro počáteční členy dané posloupnosti platí

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{4}{5},\ a_5 = \frac{5}{6}.$$

Můžeme vyslovit hypotézu: Pro každé přirozené číslo n lze n-tý člen posloupnosti vyjádřit ve tvaru

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Tuto hypotézu ověříme pomocí matematické indukce. Nejprve se přesvědčíme, zda hypotéza platí pro $n = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

což je v souladu s rekurentním vyjádřením posloupnosti. Dále zjistíme, zda pro každé $n \in N$ platí

$$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Po dosazení do rekurentní formule dostaneme

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Tím je uvedená hypotéza dokázána. Pro n-tý člen posloupnosti platí $a_n = \frac{n}{n+1}$.

227. Dokažte, že limita posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna 0.

Řešení: Podle definice limity máme určit takové číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ a libovolné kladné číslo ε platí $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, tj. $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Položíme-li $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, pak pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ skutečně platí $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. To však znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

228. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy jsou

$$2, 7, 2, 7, 2, 7, 2, 7, \ldots,$$

tj. členy s lichými indexy jsou rovny číslu 2 a se sudými číslu 7, nemá limitu.

Řešení: Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že daná posloupnost má limitu rovnu číslu a a zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Podle definice limity má od jistého členu a_0 platit pro všechny liché indexy $|2 - a| < \frac{1}{2}$ a pro sudé indexy $|7 - a| < \frac{1}{2}$. Z uvedených nerovností plyne $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$ pro liché indexy a $\frac{13}{2} < a < \frac{15}{2}$ pro sudé indexy. Takové číslo a, které splňuje obě nerovnosti současně, však neexistuje. Předpoklad, že daná posloupnost má limitu a, je tedy nesprávný.

229. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 12n^2 + 12n + 12}{n^4 - 1}.$$

Řešení: Čitatele i jmenovatele zlomku podělíme výrazem n^3. Touto úpravou se celková hodnota výrazu nezmění a platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+12n^2+12n+12}{n^4-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{12}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{12}{n^3}}{n-\frac{1}{n^3}} = \frac{1+0+0+0}{\infty-0} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

230. Nechť q je libovolné reálné číslo takové, že $|q|<1$. Určete limitu posloupnosti

$$\{1+q+\cdots+q^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení: Označme $s_n = 1+q+\cdots+q^n$. Matematickou indukcí dokážeme, že

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\{1+q+\cdots+q^n\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Vztah $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $|q|<1$, je známou větou o limitě geometrické posloupnosti.

231. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3}{1-4\cdot 2^n}.$$

Řešení: Podělíme čitatele i jmenovatele zlomku výrazem 2^n. Pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3}{1-4\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{2^n}}{\frac{1}{2^n}-4} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} - \lim\limits_{n\to\infty} 4}.$$

Protože posloupnost $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost a $|q| = \frac{1}{2} < 1$, platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

Celkem tedy platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3}{1-4\cdot 2^n} = \frac{1+3\cdot 0}{0-4} = -\frac{1}{4}.$$

232. Spočtěte následující limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Řešení: Daná posloupnost je nerostoucí a zdola ohraničená, protože platí

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^n}\cdot\frac{n+1}{2n} \le a_n$$

a $a_n > 0$ pro každé přirozené číslo n. Odtud plyne, že daná posloupnost je konvergentní. Její limitu označme L. Dále uvažujme vybranou posloupnost $\{a_{2n}\}$ z dané posloupnosti. Pro tuto vybranou posloupnost platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^{2n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \cdot L \cdot 0 = 0.$$

Nyní využijeme následující známé věty. Je-li posloupnost konvergentní, pak libovolná vybraná posloupnost z této posloupnosti je opět konvergentní a má stejnou limitu. Aplikací právě uvedené věty dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Dále určeme limitu podle věty o třech posloupnostech. Platí následující odhad

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2^{n-1}}{n \cdot (n-1)!} \leq \frac{2}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n}.$$

Protože zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0,$$

plyne odtud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

233. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sin n}{3n - 1}.$$

Řešení: Předně pro každé přirozené číslo n platí

$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$

Odtud plyne odhad

$$a_n = \frac{2n-1}{3n-1} \leq \frac{2n + \sin n}{3n-1} \leq \frac{2n+1}{3n-1} = b_n.$$

Posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou však konvergentní a mají stejné limity.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

Podle věty o třech posloupnostech je daná posloupnost konvergentní a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sin n}{3n - 1} = \frac{2}{3}.$$

234. Spočtěte hodnotu výrazu

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$$

Řešení: Zadaný výraz označuje limitu posloupnosti $\{a_n\}$, kde a_n je dán rekurentně vztahem

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}.$$

Předně pomocí principu matematické indukce dokážeme, že daná posloupnost je rostoucí, tj. pro všechna přirozená čísla n platí $a_{n+1} > a_n$. Skutečně, pro $n = 1$ máme $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$. Jestliže $a_{k+1} > a_k$, potom platí $a_{k+2} = \sqrt{2+a_{k+1}} > \sqrt{2+a_k} = a_{k+1}$. Matematickou indukcí rovněž dokážeme, že posloupnost a_n je zhora ohraničená. Budeme dokazovat, že pro libovolné přirozené číslo n platí $a_n < 2$. Skutečně pro $k = 1$ platí $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Dále pokud $a_k < 2$, pak $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$. Platí, že rostoucí a zhora ohraničená posloupnost je konvergentní. Nechť tedy L označuje limitu posloupnosti a_n. Pro $n > 1$ platí $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$. Odtud dále plyne

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = 2 + \lim_{n\to\infty} a_n,$$

tj. $L^2 = 2 + L$. Řešením kvadratické rovnice $L^2 - L - 2 = 0$ získáme kořeny $L_1 = 2$, $L_2 = -1$. Druhá možnost $L = -1$ nevyhovuje, neboť $a_n > 0$ pro každé přirozené číslo n. Hledaná limita je tedy rovna 2.

235. Dokažte, že daná posloupnost je konvergentní.

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení: n-tý člen posloupnosti rozepíšeme podle binomické věty a upravíme.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}).$$

Pak

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1}).$$

Odtud je zřejmé, že $a_n < a_{n+1}$, tedy posloupnost je rostoucí. Dále

$$a_n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3.$$

To znamená, že posloupnost je zhora ohraničená a má vlastní limitu. Limita této posloupnosti hraje v matematické analýze významnou roli. Označujeme ji e a nazýváme Eulerovo číslo.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2,718281828459\dots$$

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

236. Je dána posloupnost

$$\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

(a) Dokažte, že daná posloupnost je klesající.
(b) Rozhodněte, zda je uvedená posloupnost ohraničená.
(c) Vyjádřete tuto posloupnost rekurentně.

237. Je dána posloupnost

$$\{\log 2^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

(a) Dokažte, že daná posloupnost je rostoucí.
(b) Rozhodněte, zda je uvedená posloupnost ohraničená.
(c) Vyjádřete tuto posloupnost rekurentně.

238. Je dána posloupnost

$$\left\{8+\frac{2}{5^n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Dokažte, že daná posloupnost je klesající a ohraničená.

239. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentním vztahem

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2 - a_n.$$

Nalezněte exaktní vzorec pro n-tý člen.

240. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentním vztahem

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n.$$

Nalezněte exaktní vzorec pro n-tý člen.

241. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentním vztahem

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a_n.$$

(a) Nalezněte exaktní vzorec pro n-tý člen.
(b) Od kterého členu platí pro tuto posloupnost nerovnost $|a_n| < 0,001$?

242. Dokažte podle definice, že posloupnost $2, 2, 2, 2, 2, \ldots$ má limitu rovnu 2.

243. Dokažte podle definice, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná vztahem

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

má limitu rovnu 1.

Spočtěte následující limity:

244. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n+2}{7n-3}$.

245. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n-5}{4-2n}$.

246. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-4}{13-6n^2}$.

247. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+5}{n^3+1}$.

248. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+1}{n^2+2n+3}$.

249. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2-3n+2}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n-5}{3n^2-3}$.

251. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$.

252. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7}$.

253. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n}$.

254. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{100}}{3^n}$.

255. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_3 n}{n^2}$.

256. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

257. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7-3^n}{2\cdot 3^n+3}$.

258. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

259. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.

260. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$.

261. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

262. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

263. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-2}{1+3n}\right)^{5n-3}$.

Spočtěte následující limity:

264. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

265. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

266. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{(n+1)^3}$.

267. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)$.

268. Spočtěte hodnotu výrazu

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}.$$

269. Je dán rovnostranný trojúhelník se stranou délky a. Z jeho tří výšek je sestrojen nový rovnostranný trojúhelník, z výšek tohoto trojúhelníka další atd. Vypočítejte limitu součtu obsahů těchto trojúhelníků, pokud jejich počet n roste do nekonečna.

270. Do kruhu s poloměrem r je vepsán čtverec. Do tohoto čtverce je vepsán kruh, do něho čtverec atd. Určete limitu součtu obsahů všech kruhů a limitu součtu obsahů všech čtverců.

3. LIMITA A SPOJITOST

V následující kapitole se budeme zabývat základními úlohami o výpočtu limit a spojitostí funkcí jedné reálné proměnné. Při výpočtu limit budeme používat především základních výpočetních postupů a různých algebraických úprav. Po zvládnutí teorie derivací se k tématu výpočtu limit vrátíme ještě v páté kapitole věnované L'Hospitalovu pravidlu.

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

271. Podle definice limity (viz př. 3) dokažte, že

$$\lim_{x\to 5} x^3 = 125.$$

Řešení: Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 limitu a, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí bodu x_0, že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $|f(x) - a| < \varepsilon$, když $0 < |x - x_0| < \delta$. Danou funkci $f(x) = x^3$ budeme vyšetřovat v okolí bodu 5, např. v intervalu $4 < x < 6$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Máme ukázat, že existuje číslo δ tak, že pokud $x \in (5-\delta, 5+\delta)$, $x \neq 5$, pak $|x^3 - 125| < \varepsilon$. Zřejmě platí $|x^3 - 125| = |x-5| \cdot |x^2+5x+25|$. Pro $x \in (4,6)$ je $x^2+5x+25 > 0$ a největší hodnoty nabývá pro $x = 6$. Platí tedy $|x^2+5x+25| < 91$. Pak $|x^3-125| < 91|x-5|$. Zvolme nyní číslo $\delta < \frac{1}{91}\varepsilon$. V tomto případě pak platí $|x^3 - 125| < 91|x-5| < 91 \cdot \delta < 91 \cdot \frac{1}{91}\varepsilon = \varepsilon$. Stačí volit číslo δ menší než $\frac{1}{91}\varepsilon$.

272. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to -1} \log(3x^2 - 5x + 1).$$

Řešení: Jedná se o nejjednodušší případ, který při výpočtu limity může nastat. V našem případě lze totiž přímo dosadit a funkční hodnota je rovna hledané limitě.

$$\lim_{x\to -1} \log(3x^2 - 5x + 1) = \log(3(-1)^2 - 5(-1) + 1) = \log 9.$$

273. Vyšetřete limitu

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

Řešení: Definiční obor funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je roven množině $R - \{0\}$. Není tedy možné dosadit za x a spočítat limitu postupem, jako v předchozím příkladu. Podle definice má funkce $f(x)$ v bodě x_0 limitu a, když platí:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Vyšetřeme nyní, zda je předchozí podmínka splněna pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tj. zda platí:

$$\exists\delta > 0 : x \in (-\delta,\delta), x \neq 0 \Rightarrow |\sin\frac{1}{x} - a| < \frac{1}{2}.$$

V každém okolí bodu $x_0 = 0$, tj. v každém intervalu $(-\delta, \delta)$ však zadaná funkce nabývá hodnot -1 a 1. Odtud plyne, že hledaná limita neexistuje.

274. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}.$$

Řešení: Po dosazení hodnoty $x = 2$ zjistíme, že jmenovatel zlomku je roven nule. Provedeme proto algebraickou úpravu. Čitatele i jmenovatele rozložíme na součin lineárních členů a provedeme pokrácení. Do takto upraveného výrazu lze již dosadit.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{2+1}{2(2-1)} = \frac{3}{2}.$$

275. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}.$$

Řešení: Provedeme rozklad čitatele a jmenovatele zlomku naopak roznásobíme. V takto upraveném výrazu lze již provést pokrácení. Platí

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 2x + 1)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1} (3x^2 + 2x + 1) = 6.$$

276. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 4x + 4)}{(x-2)(x^2 - 4x + 3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{4 + 8 + 4}{4 - 8 + 3} = -16.$$

277. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{x^2 - 16} + x + 2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{x^2 - 16} + x + 2} = \lim_{x\to -5} \frac{(x+5)(x-1)}{\sqrt{x^2 - 16} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x\to -5} \frac{(x+5)(x-1)(\sqrt{x^2 - 16} - (x+2))}{(\sqrt{x^2 - 16} + x + 2)(\sqrt{x^2 - 16} - (x+2))} =$$

$$= \lim_{x\to-5} \frac{(x+5)(x-1)(\sqrt{x^2-16}-(x+2))}{(x^2-16)-(x+2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to-5} \frac{(x+5)(x-1)(\sqrt{x^2-16}-(x+2))}{-4(x+5)} = \frac{6}{4}(3+5-2) = 9.$$

278. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+5)} - x\right).$$

Řešení: Postupujeme tak, že danou funkci rozšíříme vhodným výrazem.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+5)} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x(x+5)}-x)(\sqrt{x(x+5)}+x)}{\sqrt{x(x+5)}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+5)-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1} = \frac{5}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}.$$

279. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right).$$

Řešení: Je zřejmé, že do výrazu nelze hodnotu $x = 1$ přímo dosadit. Postupujeme tedy tak, že zlomky sečteme a provedeme pokrácení.

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x+2)}{x^2+x+1} = -\frac{1+2}{1+1+1} = -1.$$

280. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}.$$

Řešení: Využijeme definičního vztahu $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a limitu rozdělíme na součin několika limit. Dále použijeme známé skutečnosti, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

281. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{3x^2-2x-1}.$$

Řešení: Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{3x^2-2x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(3x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{3x+1} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

282. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} =$$

$$= 4 \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = 4(\sqrt{1}+1) = 8.$$

283. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{\operatorname{tg} 3x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} 3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{3x} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{(3x+1)-(x+1)}{3x(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{2}{3(\sqrt{1}+\sqrt{1})} = \frac{1}{3}.$$

284. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{x^2+4}-2}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{x^2+4}-2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{(3x)^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(3x)^2}{\sqrt{x^2+4}-2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9x^2}{\sqrt{x^2+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2+4-4} = 9(\sqrt{4}+2) = 36.$$

285. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{3-\sqrt{\sin 3x+9}}{\operatorname{tg} 2x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{\sin 3x+9}}{\operatorname{tg}\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{tg}\,2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{\sin 3x+9}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{\sin 3x+9}}{2x}\cdot\frac{3+\sqrt{\sin 3x+9}}{3+\sqrt{\sin 3x+9}}=\lim_{x\to 0}\frac{9-\sin 3x-9}{2x(3+\sqrt{\sin 3x+9})}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\lim\limits_{x\to 0}(3+\sqrt{\sin 3x+9})}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3}{3+\sqrt{9}}=-\frac{1}{4}.$$

286. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+6}.$$

Řešení: Využijeme již známé skutečnosti, že

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

a pomocí algebraické úpravy převedeme vyšetřovanou limitu na tento případ. Platí

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x+6}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x+2+1}{x+2}\right)^{x+3}\right)^{2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\right)^{2}=e^2\cdot 1^2=e^2.$$

287. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}.$$

Řešení: Lze snadno ověřit, že číslo 1 je kořenem čitatele i jmenovatele. Provedeme proto jejich rozklad. Platí:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x-1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{99}+x^{98}+\cdots+x-1}{x^{49}+x^{48}+\cdots+x-1}=\frac{99-1}{49-1}=\frac{49}{24}.$$

288. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt{x+3}}{x-1}.$$

Řešení: K vyřešení úlohy je zapotřebí složitější algebraické úpravy. První krok vyžaduje aplikaci známého vzorce $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Čitatele i jmenovatele zlomku rozšíříme výrazem a^2+ab+b^2, kde $a = \sqrt[3]{x^3+7}$ a $b = \sqrt{x+3}$. Zadanou limitu tím upravíme na tvar

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x^3+7} - \sqrt{x+3})(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + \sqrt[3]{x^3+7}\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^2})}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + \sqrt[3]{x^3+7}\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+7-\sqrt{(x+3)^3}}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + \sqrt[3]{x^3+7}\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^2})}.$$

V dalším kroku provedeme rozšíření právě získané limity výrazem $x^3+7+\sqrt{(x+3)^3}$ a aplikujeme vzorec pro rozdíl druhých mocnin. Limitu tedy upravíme na tvar

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^3+7)^2-(x+3)^3}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + \sqrt[3]{x^3+7}\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^2})(x^3+7+\sqrt{(x+3)^3})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^6+13x^3-9x^2-27x+22}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + \sqrt[3]{x^3+7}\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^2})(x^3+7+\sqrt{(x+3)^3})}.$$

Polynom $x^6+13x^3-9x^2-27x+22$, stojící v čitateli, má kořen $x=1$. Provedeme tedy dělení polynomu $x^6+13x^3-9x^2-27x+22$ polynomem $x-1$ a obdržíme $x^6+13x^3-9x^2-27x+22 = (x-1)(x^5+x^4+x^3+14x^2+5x-22)$. Nyní lze provést pokrácení členů $x-1$ a dosadit.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+14x^2+5x-22)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + \sqrt[3]{x^3+7}\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^2})(x^3+7+\sqrt{(x+3)^3})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^5+x^4+x^3+14x^2+5x-22}{(\sqrt[3]{(x^3+7)^2} + \sqrt[3]{x^3+7}\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^2})(x^3+7+\sqrt{(x+3)^3})} =$$

$$= \frac{1+1+1+14+5-22}{(4+4+4)(8+8)} = 0.$$

289. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+\mathrm{e}^{3x})}{\ln(3+\mathrm{e}^{2x})}.$$

Řešení: Výraz je zapotřebí upravit na tvar, který umožní aplikovat základní zákony pro počítání s logaritmy. V argumentech logaritmů provedeme vytknutí, které vytvoří součin.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{3x}(1+2e^{-3x}))}{\ln(e^{2x}(1+3e^{-2x}))}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln(1+2e^{-3x})}{\ln e^{2x}+\ln(1+3e^{-2x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3\ln e^{x}+\ln(1+2e^{-3x})}{2\ln e^{x}+\ln(1+3e^{-2x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\ln(1+2e^{-3x})}{2x+\ln(1+3e^{-2x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x+\ln(1+3e^{-2x})}+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2e^{-3x})}{2x+\ln(1+3e^{-2x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2+\dfrac{\ln(1+3e^{-2x})}{x}}+\frac{0}{\infty+0}=\frac{3}{2}.$$

290. Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}.$$

Řešení: Nejprve provedeme algebraickou úpravu vedoucí ke zjednodušení výpočtu:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x-3)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+1}{x-3}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=-2\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}.$$

Nyní spočteme obě jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}=-2\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=-2\cdot\infty=-\infty.$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}=-2\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-2\cdot(-\infty)=\infty.$$

Protože jsou obě jednostranné limity různé, limita dané funkce neexistuje.

291. Rozhodněte, zda je daná funkce $f(x)$ spojitá.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|-x} & x<0,\\ x & x\geq 0.\end{cases}$$

Řešení: Spočteme jednostranné limity funkce $f(x)$ v bodě $x_0=0$. Platí:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Protože jsou jednostranné limity různé, funkce $f(x)$ nemá v bodě $x_0 = 0$ limitu a tedy funkce $f(x)$ není v tomto bodě spojitá.

292. Dodefinujte funkci $f(x)$ v bodě $x_0 = 1$ tak, aby byla spojitá.

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^3-1}.$$

Řešení: Funkce bude v bodě $x_0 = 1$ spojitá, pokud funkční hodnota v tomto bodě bude rovna limitě pro $x \to 1$. Je tedy zapotřebí určit limitu

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^3-1}.$$

Platí:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4-x-3}{(x-1)(x^2+x+1)(2+\sqrt{x+3})} = -\frac{1}{12}.$$

Stačí nyní položit $f(1) = -\frac{1}{12}$. Funkce $f^*(x)$ definovaná předpisem

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^3-1} & x \neq 1, \\ -\dfrac{1}{12} & x = 1 \end{cases}$$

je spojitá na R.

293. Určete číslo a tak, aby byla funkce $f(x)$ spojitá.

$$f(x) = \begin{cases} ax & x < 1, \\ 2 - \frac{x}{a} & x \geq 1. \end{cases}$$

Řešení: Spočteme jednostranné limity funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 1$. Platí:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax = a,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 - \frac{x}{a}) = 2 - \frac{1}{a}.$$

Aby funkce $f(x)$ byla v bodě $x_0 = 1$ spojitá, musí v tomto bodě existovat limita. Ta však bude existovat, pokud se budou rovnat obě jednostranné limity. Dostáváme tedy rovnici

$$a = 2 - \frac{1}{a}, \text{ tj. } a^2 - 2a + 1 = 0.$$

Vyřešením této rovnice obdržíme, že $a = 1$.

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Spočtěte následující limity funkcí:

294. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

295. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x+6}{x^3+8}$.

296. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

297. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-5x+4}{x^3-1}$.

298. $\lim\limits_{x\to \infty} (3x-\sqrt{9x^2-10x+1})$.

299. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

300. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+7x}-1}{x}$.

301. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.

302. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

303. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

Spočtěte následující limity funkcí:

304. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

305. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

306. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x}{x\cdot\sin x}$.

307. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

308. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg} x-\sin x}{x^3}$.

309. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\mathrm{tg} x}{\sin 2x}$.

310. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin x}$.

311. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

312. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

313. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$.

Spočtěte následující limity funkcí:

314. $\lim\limits_{x\to \infty} \log\dfrac{x^2+x+3}{x^2-2}$.

315. $\lim\limits_{x\to \infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

316. $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}} \dfrac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}$.

317. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x-1}{x}$.

318. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$.

319. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$.

320. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2^x-8}{x-3}$.

321. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

322. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+4}{2x+5}\right)^{x+3}$.

323. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{4x+3}\right)^{x^2}$.

Spočtěte limity zprava a limity zleva daných funkcí v bodě x_0:

324. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $x_0 = 0$.

325. $f(x) = \sin \dfrac{2\pi}{x}$, $x_0 = 0$.

326. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$.

327. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{9 - x^2}$, $x_0 = 3$.

328. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\ln(x + 1)}$, $x_0 = 2$.

329. $f(x) = \dfrac{x}{|\operatorname{tg} x|}$, $x_0 = 0$.

330. $f(x) = \dfrac{(x + 2)x}{|x + 2|}$, $x_0 = -2$.

331. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$.

332. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-7}}$, $x_0 = 7$.

333. $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$, $x_0 = 0$.

Rozhodněte, zda existují následující limity:

334. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 4}$.

335. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + 1}{x^3 - 1}$.

336. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin^2 x}$.

337. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^3}$.

338. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$.

339. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

340. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

341. $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^{-x} \sin 2\pi x$.

342. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin^2 x}$.

343. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x^2}$.

Dodefinujte následující funkce $f(x)$ v bodě x_0 tak, aby byly spojité:

344. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -3$.

345. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{\sqrt{x+3} + 2x}$, $x_0 = -1$.

346. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$.

347. $f(x) = \dfrac{(1 + x)^5 - (1 + 5x)}{x^2 + x^5}$, $x_0 = 0$.

348. $f(x) = \dfrac{7^x - 7}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

349. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3}$, $x_0 = 1$.

350. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$, $x_0 = 1$.

351. $f(x) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{3x + 22} - \sqrt{x + 24}}$, $x_0 = 1$.

352. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos x - 1}$, $x_0 = 0$.

353. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$, $x_0 = 0$.

4. DERIVACE FUNKCÍ

Derivace funkce $f : R \to R$ v bodě $x_0 \in Df$ je definována jedním z ekvivalentních vztahů

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

kde $x = x_0 + h$. Praktické příklady na výpočet derivace se však ve většině případů neřeší podle uvedeného definičního vztahu, ale pomocí vzorců, které je nutno chápat jako samostatné matematické věty. K výpočtu derivace je tedy zapotřebí znalosti základních vzorců, které pak při výpočtu častokrát kombinujeme. Aplikace těchto vzorců uvedeme i s jejich obecným tvarem v následujících příkladech.

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

354. Spočtěte na základě definice derivaci funkce $f(x) = 100$ v bodě $x_0 = 5$.
Řešení:

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{100 - 100}{x - 5} = \lim_{x \to 5} 0 = 0.$$

Obecně pro libovolnou konstantu $c \in R$ platí věta $(c)' = 0$.

355. Spočtěte na základě definice derivaci funkce $f(x) = x^3$ v libovolném bodě x_0.
Řešení:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \to 0} 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2 = 3x_0^2.$$

Obecně pro libovolnou mocninnou funkci x^n platí $(x^n)' = nx^{n-1}$.

356. Na základě definice spočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.
Řešení:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty.$$

357. Dokažte, že funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: K důkazu tvrzení použijeme větu o jednostranných derivacích. Podle této věty existuje derivace v daném bodě právě tehdy, když existují obě tzv. jednostranné derivace

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a tyto derivace se rovnají. V tomto případě pak platí $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Aplikací uvedené věty dostáváme

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Analogicky spočteme

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

Protože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, derivace $f'(0)$ neexistuje.

358. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = x^{100} + 100^x.$$

Řešení: K výpočtu uvedeného příkladu je zapotřebí hned několika základních vět. Především je zapotřebí znalosti již zmíněné věty o derivaci mocninné funkce

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Podle tohoto vzorce nyní platí $(x^{100})' = 100x^{99}$. Dále je zapotřebí vědět, jak se derivuje exponenciální funkce. Platí

$$(a^x)' = a^x \ln a, \text{ nebo speciálně } (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.$$

Z uvedeného vztahu plyne, že $(100^x)' = 100^x \ln 100$. Dále platí následující celkem snadno zapamatovatelný vztah pro derivaci součtu a rozdílu funkcí

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

Na základě těchto poznatků můžeme nyní zkompletovat řešení celého příkladu.

$$f'(x) = (x^{100} + 100^x)' = (x^{100})' + (100^x)' = 100x^{99} + 100^x \ln 100.$$

359. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = 3 + 5\log_7 x.$$

Řešení: Při řešení úlohy použijeme věty o derivaci logaritmické funkce

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}, \text{ nebo speciálně } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Dále použijeme vzorce

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'.$$

Posledně uvedený vztah je speciálním případem derivace součinu funkcí. Z uvedených vět nyní plyne

$$f'(x) = (3 + 5\log_7 x)' = 3' + (5\log_7 x)' = 0 + 5(\log_7 x)' = \frac{5}{x \log 7}.$$

360. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = x^4 \cos x.$$

Řešení: Použijeme větu o derivaci součinu funkcí. Postupujeme podle vzorce

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Dále využijeme vět o derivaci goniometrických funkcí vztahy

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

Z uvedených vztahů nyní plyne

$$f'(x) = (x^4)' \cos x + x^4(\cos x)' = 4x^3 \cos x + x^4(-\sin x) = x^3(4\cos x - x \sin x).$$

361. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = x(\sin x + \ln x).$$

Řešení: Podle vět o derivaci součtu a součinu funkcí platí

$$f'(x) = (x(\sin x + \ln x))' = x'(\sin x + \ln x) + x(\sin x + \ln x)' =$$

$$= 1(\sin x + \ln x) + x(\cos x + \frac{1}{x}) = \sin x + x\cos x + \ln x + 1.$$

362. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = x^7 2^x \mathrm{tg}\, x.$$

Řešení: Z věty o derivaci součinu funkcí plyne vztah

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Dále připomeňme, že platí

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\mathrm{cotg}\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Na základě uvedených vztahů nyní platí

$$(x^7 2^x \mathrm{tg}\, x)' = (x^7)' 2^x \mathrm{tg}\, x + x^7 (2^x)' \mathrm{tg}\, x + x^7 2^x (\mathrm{tg}\, x)' =$$

$$= 7x^6 2^x \mathrm{tg}\, x + x^7 2^x \log 2 \ \mathrm{tg}\, x + x^7 2^x \frac{1}{\cos^2 x}.$$

363. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \frac{\ln x}{\arcsin x}.$$

Řešení: Především je zapotřebí použít velmi důležitou větu o derivaci podílu funkcí

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Dále připomeňme, že platí následující vztahy pro derivace cyklometrických funkcí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Na základě uvedených vztahů nyní platí

$$\left(\frac{\ln x}{\arcsin x}\right)' = \frac{(\ln x)' \arcsin x - \ln x (\arcsin x)'}{(\arcsin x)^2} = \frac{\frac{1}{x}\arcsin x - \ln x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}.$$

364. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 12}.$$

Řešení: Funkce, kterou máme zderivovat je složená funkce. Pro derivaci složené funkce platí vztah

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g', \text{ nebo jinak zapsáno } f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Z právě uvedeného vztahu plyne, že

$$(\sqrt{x^2 - 2x + 12})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 12}} \cdot (x^2 - 2x + 12)' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 12}}.$$

365. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = 4 \operatorname{arctg}^3(3x - 7).$$

Řešení: Funkce, kterou máme zderivovat je vícenásobně složená funkce. Platí

$$(4 \operatorname{arctg}^3(3x-7))' = 3 \cdot 4 \operatorname{arctg}^2(3x-7) \cdot (\operatorname{arctg}(3x-7))' =$$

$$= 12 \left(\operatorname{arctg}^2(3x-7)\right) \cdot \frac{1}{1+(3x-7)^2}(3x-7)' = \frac{36 \operatorname{arctg}^2(3x-7)}{9x^2 - 42x + 50}.$$

366. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (\cos x)^{\operatorname{cotg} x}.$$

Řešení: Funkce, kterou máme zderivovat je typu „funkce na funkci". V tomto případě lze postupovat dvěma možnými způsoby. Nejprve využijeme možnost zderivovat funkci přímo podle vzorce

$$(f)^g = f^g(g' \ln f + g\frac{f'}{f}).$$

Pak platí

$$\left((\cos x)^{\mathbf{cotg}\, x}\right)' = (\cos x)^{\mathbf{cotg}\, x}\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\ln(\cos x) + \operatorname{cotg} x\frac{-\sin x}{\cos x}\right).$$

Druhá možnost spočívá ve využití tzv. logaritmické derivace. Postupujeme tak, že nejprve obě strany zlogaritmujeme, tj.

$$\ln f(x) = \ln(\cos x)^{\mathbf{cotg}\, x},$$

a pak využijeme následující základní vlastnosti logaritmické funkce

$$\ln f(x) = \operatorname{cotg} x \cdot \ln(\cos x).$$

V následujícím kroku provedeme derivaci levé i pravé strany

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\operatorname{cotg} x)' \cdot \ln(\cos x) + \operatorname{cotg} x \cdot (\ln(\cos x))' = \frac{-1}{\sin^2 x} \cdot \ln(\cos x) + \operatorname{cotg} x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}.$$

V závěrečném kroku výpočtu vynásobíme posledně uvedenou rovnost funkcí $f(x)$. Pak dostáváme

$$f(x)' = (\cos x)^{\mathbf{cotg}\, x}\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\ln(\cos x) + \operatorname{cotg} x\frac{-\sin x}{\cos x}\right).$$

Následující řešené úlohy již uvedeme bez podrobnějšího vysvětlujícího komentáře. Pokud lze derivaci úpravou zjednodušit, uvedeme i výsledek této úpravy. Algebraickou úpravu derivací je nutné dobře procvičit, protože ji budeme potřebovat zejména u vyšetřování průběhu funkce, kde je nutné s upraveným tvarem derivace dále pracovat.

367. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left(\frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}\right)' = \frac{(1 - 2x)(1 - x + x^2) - (2x - 1)(1 + x - x^2)}{(1 - x + x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1 - 2x)}{(1 - x + x^2)^2}.$$

368. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)' = \frac{-3x^2(1+x^3) - 3x^2(1-x^3)}{(1+x^3)^2} = \frac{-6x^2}{(1+x^3)^2}.$$

369. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\right)' = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x) - (-\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^x)}{(1-\mathrm{e}^x)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$$

370. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^3}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^3}\right)' = \frac{-2x(x^2+1)^3 - (1-x^2)\cdot 3(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6} = \frac{4x(x^2-2)}{(x^2+1)^4}.$$

371. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \sqrt{\frac{5+x}{5-x}}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{5+x}{5-x}}\right)' = \frac{\frac{1}{2}(5+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1(5-x)^{\frac{1}{2}} - (5+x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}(5-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{5-x} =$$

$$= \frac{5}{(5-x)\sqrt{25-x^2}}.$$

372. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \sin 2x}.$$

373. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \ln(\sin x + \cos x).$$

Řešení:

$$f'(x) = \ln(\sin x + \cos x)' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}.$$

374. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} + \sqrt{\mathrm{e}^{4x} + 1}).$$

Řešení:

$$f'(x) = \left(\ln(\mathrm{e}^{2x} + \sqrt{\mathrm{e}^{4x} + 1})\right)' = \frac{2\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{4x} + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x} + \sqrt{\mathrm{e}^{4x} + 1}} =$$

$$= \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x} + 1}}.$$

375. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \ln \frac{(x+1)^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{(x+1)^2} \cdot \frac{2(x+1)\sqrt{(2x+1)^3} - (x+1)^2 \cdot \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{(\sqrt{(2x+1)^3})^2} =$$

$$= \frac{x-1}{2x^2 + 3x + 1}.$$

376. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

377. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = e^x\sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x.$$

Řešení:

$$f'(x) = e^x\sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \frac{1}{2}(1-e^{2x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2e^{2x}) + \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = 2e^x\sqrt{1-e^{2x}}.$$

378. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\,(x - \sqrt{1+x^2}).$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-\sqrt{1+x^2})^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

379. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{6}\frac{1}{\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}} \cdot \frac{2(x+1)(x^2-x+1)-(x+1)^2(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 = \frac{1}{x^3+1}.$$

380. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^x)^x.$$

Řešení: Postupujeme analogicky jako v příkladu 366.

$$f'(x) = ((x^x)^x)' = x^{x^x}(x^x(1+\ln x)\cdot\ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}) = x^{x^x} \cdot x^x \cdot \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right).$$

381. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \sqrt[x]{x+1}.$$

Řešení: Použijeme metodu logaritmické derivace. Danou funkci přepíšeme na tvar $f(x) = \sqrt[x]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{x}}$ a tento tvar zlogaritmujeme. Pak platí

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln(x+1).$$

Nyní provedeme derivaci obou stran rovnosti.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \frac{1}{x}\frac{1}{x+1}.$$

Odtud plyne

$$f'(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \frac{1}{x}\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2}(x+1)^{\frac{1-x}{x}}\left(x - \ln(x+1)^{x+1}\right).$$

382. Spočtěte třetí derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = 2\frac{\cos x\cos^3 x - 3\cos^2 x(-\sin x)\sin x}{\cos^6 x} = \frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

383. Spočtěte třetí derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

384. Užitím Leibnizova vzorce určete třetí derivaci funkce

$$f(x) = x^2\ln x.$$

Řešení: Leibnizův vzorec má obecně tvar

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

Podle tohoto vzorce nyní platí

$$f'''(x) = (x^2)'''\ln x + 3(x^2)''(\ln x)' + 3(x^2)'(\ln x)'' + x^2(\ln x)''' = \frac{2}{x}.$$

385. Spočtěte třetí derivaci funkce

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.$$

Řešení:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + x \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 \cdot (x-2) - (x-1) \cdot 1}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2 - 7x + 4}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}.$$

Výpočet druhé derivace je již obtížnější. Platí

$$f''(x) = \frac{(4x-7)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}(x-2)^2 - (2x^2-7x+4)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1\cdot(x-2)-(x-1)\cdot 1}{(x-2)^2}(x-2)^2 + \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}2(x-2)\right)}{2\frac{x-1}{x-2}\cdot(x-2)^4}.$$

Po úpravě předchozího výrazu dostáváme

$$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7x-8}{(x-1)(x-2)^3\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}.$$

Nyní podobně spočteme, že

$$f'''(x) = -\frac{3}{8} \cdot \frac{14x^2 - 33x + 20}{(x-1)^2(x-2)^4\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}.$$

386. Spočtěte n-tou derivaci funkce

$$f(x) = \ln(ax+b), \quad \text{kde} \quad ax+b > 0.$$

Řešení: Postupně vypočteme derivace

$$f'(x) = \frac{a}{ax+b},$$

$$f''(x) = \frac{-a^2}{(ax+b)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2a^3}{(ax+b)^3},$$

$$f''''(x) = \frac{-2 \cdot 3a^4}{(ax+b)^4}.$$

Na základě těchto výsledků lze usoudit, že

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!a^n}{(ax+b)^n}.$$

Správnost této hypotézy ověříme matematickou indukcí. Pro $n = 1, 2, 3, 4$ jsme již hypotézu ověřili. Zbývá dokázat, že z platnosti vztahu pro $n = k$ plyne platnost pro $n = k + 1$. Skutečně

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})' = \left(\frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!a^k}{(ax+b)^k}\right)' =$$

$$\frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!a^k(-k)a}{(ax+b)^{k+1}} = \frac{(-1)^k \cdot k!a^{k+1}}{(ax+b)^{k+1}}.$$

Nalezený vztah tedy platí pro všechna přirozená čísla n.

387. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $A = [\frac{1}{2}, ?]$.

Řešení: Jedná se o základní úlohu na geometrickou aplikaci pojmu derivace. K vyřešení úlohy je především zapotřebí znalosti obecné rovnice tečny t ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0. Tato rovnice má tvar:

$$t: \qquad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ze zadání úlohy plyne, že $x_0 = \frac{1}{2}$. Dopočítáme y-ovou souřadnici bodu dotyku, která je v zadání označena otazníkem. Platí $? = f(x_0) = f(\frac{1}{2}) = 2$. Dále určíme derivaci $f'(x_0)$. Zřejmě

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{a} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4.$$

Nyní již dosadíme získané hodnoty do obecné rovnice tečny. Dostáváme

$$y - 2 = -4(x - \frac{1}{2}), \quad \text{což po úpravě dává} \quad t: \ 4x + y - 4 = 0.$$

Analogicky postupujeme při nalezení rovnice normály. Obecná rovnice normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 je

$$n: \qquad y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Protože všechny pomocné výpočty máme již provedeny, můžeme provést dosazení

$$y - 2 = -\frac{1}{-4}(x - \frac{1}{2}) \quad \text{a po úpravě obdržíme} \quad n: \ 2x - 8y + 15 = 0.$$

388. Rozhodněte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ v bodě $x_0 = 0$.

389. Dokažte, že funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

je v bodě $x_0 = 0$ spojitá, ale nemá v tomto bodě derivaci.

390. Dokažte, že funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0, \\ x \cos \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

je v bodě $x_0 = 0$ spojitá, ale nemá v tomto bodě derivaci.

Spočtěte derivace následujících funkcí:

391. $f(x) = (2x^3 + 3)^2$.

392. $f(x) = (x^4 - 6x^2 + 7)^3$.

393. $f(x) = (1 + 2x)(3 - 4x^2)$.

394. $f(x) = (x - \sqrt{1 - x^2})^2$.

395. $f(x) = \sqrt{4x + 1}$.

396. $f(x) = x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[9]{x}$.

397. $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}$.

398. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$.

399. $f(x) = x^5 \cdot \sqrt[3]{x^6 - 8}$.

400. $f(x) = \sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}$.

401. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 + 2}$.

402. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}$.

403. $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

404. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}}$.

405. $f(x) = \sin^2 x^3$.

406. $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.

407. $f(x) = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

408. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln \cos x$.

409. $f(x) = \sqrt{\sin x \cos x}$.

410. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

411. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

412. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}$.

413. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

414. $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.

415. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$.

416. $f(x) = \sqrt[3]{\ln \cos x}$.

417. $f(x) = \ln^4(\operatorname{tg} x)$.

418. $f(x) = \ln \cos \sqrt{e^x + 1}$.

419. $f(x) = \arccos \ln x$.

420. $f(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

421. $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{7 + x}{7 - x}}$.

422. $f(x) = \ln \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

Spočtěte derivace následujících funkcí a proveďte úpravu:

423. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arccotg} x}{x^2}$

424. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$

425. $f(x) = \sin^2\left(\dfrac{1 - \ln x}{x}\right)$

426. $f(x) = \arccos \dfrac{2 - x}{x\sqrt{2}}$

427. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

428. $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{2 - x}{x - 3}}$

429. $f(x) = 10^{3x}$

430. $f(x) = 2^{3^x}$

431. $f(x) = 5^{\sqrt{x}}$

432. $f(x) = 3^{\operatorname{tg} x}$

433. $f(x) = \sqrt{x^{\sin x}}$

434. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

435. $f(x) = \operatorname{tg} x^x$

436. $f(x) = (\ln x)^x$

437. $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$

438. $f(x) = x^{e^x}$

U následujících funkcí odvoďte vztah pro n-tou derivaci:

439. $f(x) = \sqrt{x}$

440. $f(x) = e^{2x+3}$

441. $f(x) = xe^x$

442. $f(x) = x \ln x$

443. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

444. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

445. $f(x) = \log_a x$

446. $f(x) = x \cos 2x$

447. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

448. $f(x) = \dfrac{1}{7x + 2}$

449. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 5}}$

450. $f(x) = x^{n-1} \ln x$

Pomocí Leibnizovy formule vypočtěte k-tou derivaci funkce $f(x)$:

451. $f(x) = x^4 e^{2x}, \ k = 6$

452. $f(x) = x^3 \ln x, \ k = 4$

453. $f(x) = e^{4x} \sin 3x, \ k = 5$

454. $f(x) = e^x \cos x, \ k = 5$

455. Nalezněte tečny k hyperbole $7x^2 - 2y^2 = 14$ kolmé na přímku $2x + 4y = 3$.

456. Ke křivce $f(x) = x \ln x$ spočtěte rovnici normály, která je rovnoběžná s přímkou danou rovnicí $2x - 2y + 3 = 0$.

457. Zjistěte, ve kterém bodě je tečna k parabole $y = x^2 + 4x$ rovnoběžná s osou x.

458. Zjistěte, ve kterém bodě má křivka $f(x) = \frac{x}{1+x}$ směrnici $k = \frac{1}{4}$.

459. Určete vzdálenost počátku od normály grafu $f(x) = x^2 + e^a 2x$ v bodě $x = 0$.

460. Dokažte, že platí následující tvrzení:
(1) Derivace sudé funkce je funkce lichá.
(2) Derivace liché funkce je funkce sudá.
(3) Derivace periodické funkce s periodou l je periodická funkce s periodou l.

5. DIFERENCIÁL A TAYLORŮV POLYNOM

V úvodu této kapitoly připomeňme některé skutečnosti, které jsou důležité pro řešení úloh. Předpokládejme, že je dána funkce $f(x)$, která je definovaná v okolí bodu x_0. Z bodu x_0 se posuneme v tomto okolí o hodnotu h do bodu $x = x_0 + h$. Diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě x_0 při přírůstku h nazýváme číslo

$$\mathrm{d}_h f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x = f'(x_0) \cdot h.$$

Diferenciálu lze použít k přibližným výpočtům funkčních hodnot. Platí formule

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \mathrm{d}_h f(x_0).$$

Podobně jako existují derivace vyšších řádů, existují i vyšší diferenciály. Pro n-tý diferenciál platí

$$\mathrm{d}_h^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot \mathrm{d}x^n = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n.$$

Vyšší diferenciály umožňují zpřesňovat přibližné výpočty pomocí tzv. Taylorova polynomu. Taylorův polynom n-tého stupně funkce $f(x)$ v bodě x_0 je polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Pro $x_0 = 0$ se tento polynom nazývá Maclaurinův. Funkci $f(x)$ lze vyjádřit jako součet Taylorova polynomu a funkce $R_n(x)$, která se nazývá chyba. Platí tedy

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

Uvedený vztah se nazývá Taylorova formule. Taylorova věta tvrdí, že mezi čísly x a x_0 existuje číslo c tak, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Hlavní význam teorie spočívá v tom, že funkci, jejíž funkční hodnoty lze obtížně vyčíslovat lze převést na výpočet funkční hodnoty polynomu, tj. na základní aritmetické operace sčítání a násobení. Chybu $R_n(x)$ nedokážeme explicitně spočítat, ale v řadě případů ji dokážeme rozumně odhadnout. Uvedený tvar chyby se nazývá Lagrangeův. Tento tvar je pouze jedním z nekonečně mnoha existujících tvarů, je však nejpoužívanější. Souvislost Taylorova polynomu s teorií diferenciálů je zřejmá, protože Taylorův polynom lze vyjádřit ve tvaru

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}_h f(x_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_h^2 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}_h^n f(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{d}_h^k f(x_0).$$

Poznamenejme ještě, že užitím Taylorovy formule lze určit i limity některých funkcí. Nyní se již věnujme řešení konkrétních příkladů.

461. Spočtěte diferenciál funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 3$ při přírůstku $h = 0,09$, kde

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}.$$

Řešení: Víme, že diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0 při přírůstku h má tvar

$$d_h f(x_0) = f'(x_0)h.$$

Je tedy zapotřebí určit derivaci funkce $f(x)$ a její funkční hodnotu v bodě $x_0 = 2$. Platí

$$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad f'(3) = 6 + \frac{1}{9} = \frac{55}{9}.$$

Celkem tedy platí

$$d_h f(x_0) = f'(x_0)h = \frac{55}{9} \cdot 0,09 = 0,55.$$

462. Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu $\sqrt{16,06}$.

Řešení: K přibližnému vyjádření hledané hodnoty použijeme vztahu

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + d_h f(x_0),$$

přičemž $f(x) = \sqrt{x}$ a za bod x_0 volíme bod $x_0 = 16$. Z této volby ihned plyne, že $h = 0,06$. Dále určíme derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(x_0) = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Odtud plyne

$$\sqrt{16,06} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{8} \cdot 0,06 = 4 + 0,0075 = 4,0075.$$

Pro srovnání, kalkulačka dává hodnotu 4,007492982...

463. Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu arctg 0,97.

Řešení: K přibližnému vyjádření hledané hodnoty použijeme vztahu

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + d_h f(x_0),$$

přičemž $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a za bod x_0 volíme $x_0 = 1$. Z této volby ihned plyne, že $h = -0,03$. Dále pro diferenciál platí $d_h f(x_0) = f'(x_0) \cdot h$. Určíme derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad f'(x_0) = \frac{1}{2}.$$

Odtud plyne

$$\operatorname{arctg} 0,97 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{2} \cdot (-0,03) = \frac{\pi}{4} - \frac{0,03}{2} = 0,785 - 0,015 = 0,770.$$

Pro srovnání, kalkulačka dává hodnotu 0,770170...

464. Spočtěte druhý diferenciál funkce $f(x) = \ln x$ v bodě $x_0 = 2$ pro $h = 0,1$.

Řešení: Druhý diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0 při přírůstku h má tvar

$$d_h^2 f(x_0) = f''(x_0)h^2.$$

Je tedy zapotřebí určit druhou derivaci funkce $f(x)$ a spočítat její funkční hodnotu v bodě $x_0 = 2$. Platí

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(2) = -\frac{1}{4}.$$

Celkem tedy platí

$$d_h^2 f(x_0) = f''(x_0)h^2 = \frac{-1}{4} \cdot 0,1^2 = 0,0025.$$

465. Spočtěte Taylorův polynom $T_3(x)$ funkce

$$f(x) = \sqrt[7]{e^x}$$

v bodě $x_0 = 0$ a s jeho pomocí určete $\sqrt[7]{e}$. Výsledek srovnejte s hodnotou na kalkulačce.

Řešení: Funkci $f(x) = \sqrt[7]{e^x}$ upravíme na tvar

$$f(x) = \sqrt[7]{e^x} = e^{\frac{x}{7}}.$$

Zřejmě platí $f(0) = \sqrt[7]{e^0} = \sqrt[7]{1} = 1$. Dále určíme derivace funkce $f(x)$ až do třetího řádu. Platí

$$f'(x) = \frac{1}{7}e^{\frac{x}{7}}, \quad f''(x) = \frac{1}{49}e^{\frac{x}{7}}, \quad f'''(x) = \frac{1}{343}e^{\frac{x}{7}},$$

$$f'(0) = \frac{1}{7}, \quad f''(0) = \frac{1}{49}, \quad f'''(0) = \frac{1}{343}.$$

Po dosazení do obecného tvaru Taylorova polynomu

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

a krátké úpravě dostáváme hledaný tvar Taylorova polynomu

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{98}x^2 + \frac{1}{2058}x^3.$$

Nyní platí

$$\sqrt[7]{\mathrm{e}} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{98} + \frac{1}{2058} = \frac{2374}{2058} = 1,1535471331...$$

Pro srovnání, hodnota na kalkulačce je $\sqrt[7]{\mathrm{e}} = 1,1535649948...$

466. Spočtěte Maclaurinův polynom $T_3(x)$ funkce

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

a s jeho pomocí určete tg 0, 3. Výsledek srovnejte s hodnotou na kalkulačce.

Řešení: Určíme derivace funkce $f(x)$ až do třetího řádu. Platí

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \quad f'''(x) = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x},$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2.$$

Po dosazení do obecného tvaru Taylorova polynomu

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

dostáváme

$$T_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3.$$

Odtud plyne

$$\operatorname{tg} 0,3 \approx T_3(0,3) = 0,3 + \frac{0,3^3}{3} = 0,3 + 0,009 = 0,309.$$

Pro srovnání, hodnota na kalkulačce je $\operatorname{tg} 0,3 = 0,309336249...$

467. Spočtěte Maclaurinův polynom $T_3(x)$ funkce $f(x) = \sin x$. Pomocí $T_3(x)$ určete hodnotu sin 1 a odhadněte, jaké chyby jste se dopustili.

Řešení: Napíšeme obecný tvar polynomu.

$$T_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3,$$

U Maclaurinova polynomu platí, že $x_0 = 0$. Určíme potřebné derivace. Čtvrtou derivaci potřebujeme pro odhad chyby. Platí

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f''''(x) = \sin x,$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$$

Dosazením nalezených hodnot do obecného vztahu nyní dostáváme, že

$$T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Odtud plyne

$$\sin 1 \approx T_3(1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0,833...$$

Lagrangeova chyba má tvar

$$R_3(x) = \frac{1}{4!}f''''(c)(x - x_0)^4 = \frac{1}{4!}\sin c \cdot x^4, \text{ kde } c \in (0, 1).$$

Odtud plyne odhad

$$R_3(1) = \frac{1}{4!}\sin c \cdot 1^4 \leq \frac{1}{24} = 0,0416...$$

Celkem tedy dostáváme $\sin 1 \approx 0,833 \pm 0,041$. Pro srovnání, hodnota na kalkulačce je $\sin 1 = 0.841470...$

468. Spočtěte Taylorův polynom $T_2(x)$ funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 4$. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně $\sqrt{5}$ a odhadněte chybu $R_2(x)$.

Řešení: Napíšeme obecný tvar polynomu

$$T_2(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x - 4) + \frac{f''(4)}{2!}(x - 4)^2.$$

Spočteme potřebné derivace. Třetí derivaci potřebujeme pro odhad chyby. Platí:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}},$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}.$$

Příslušné funkční hodnoty jsou

$$f(4) = 2, \quad f'(4) = \frac{1}{4}, \quad f''(4) = -\frac{1}{32}.$$

Dosazením nalezených hodnot do obecného vztahu nyní dostáváme, že

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{64}(x - 4)^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}x - \frac{1}{64}x^2.$$

Odtud plyne

$$\sqrt{5} \approx T_2(5) = \frac{3}{4} + \frac{15}{8} - \frac{25}{64} = \frac{143}{64} = 2,234375...$$

Lagrangeova chyba má tvar

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-4)^3 = \frac{\frac{3}{8\sqrt{c^5}}}{3!}(x-4)^3, \text{ kde } c \in (4,5).$$

Odtud plyne odhad

$$R_2(5) = \frac{3}{6 \cdot 8\sqrt{c^5}}(5-4)^3 \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^5}} = \frac{1}{512} = 0,001953\ldots$$

Celkem tedy dostáváme $\sqrt{5} \approx 2,2343 \pm 0,0019$. Počítali jsme tedy správně aspoň na dvě desetinná místa. Pro srovnání, hodnota získaná na kalkulačce je $\sqrt{5} = 2,236067\ldots$

469. Pomocí Taylorova polynomu vyjádřete polynom $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ v mocninách dvojčlenu $x - 4$.

Řešení: Rozvést daný polynom v mocninách dvojčlenu $x-4$ znamená najít Taylorův polynom v bodě $x_0 = 4$. Je zřejmé, že hledaný Taylorův polynom bude čtvrtého stupně, protože pátá derivace zadaného polynomu a všechny derivace vyšší jsou rovny nule. Pro derivace a jejich funkční hodnoty v bodě $x_0 = 4$ platí

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4, & f(4) &= -56,\\
f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3, & f'(4) &= 21,\\
f''(x) &= 12x^2 - 30x + 2, & f''(4) &= 74,\\
f'''(x) &= 24x - 30, & f'''(4) &= 66,\\
f''''(x) &= 24, & f''''(4) &= 24.
\end{aligned}$$

Nyní již můžeme napsat hledaný Taylorův polynom

$$f(x) = T_4(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f''''(4)}{4!}(x-4)^4.$$

Po dosazení obdržíme vyjádření polynomu $f(x)$ v mocninách dvojčlenu $x - 4$. Platí

$$f(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4.$$

470. Pomocí Taylorovy formule spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4}.$$

Řešení: Funkci $f(x) = \cos x$ vyjádříme pomocí Taylorovy formule

$$f(x) = T_5(x) + R_5(x).$$

Platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\cos cx.$$

Odtud plyne

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2 + 2(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + R_5(x)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{360}\cos cx}{x^4} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{12} - \frac{x^2}{360}\cos cx\right) = \frac{1}{12} - 0 = \frac{1}{12}.$$

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Spočtěte diferenciál funkce $f(x)$ pro přírůstek dx v obecném bodě:

471. $f(x) = \dfrac{2x^3}{\sin x}$.

472. $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$.

473. $f(x) = x^2 \cdot 7^x$.

474. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

475. $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$.

476. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

477. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

478. $f(x) = 5^{\ln \operatorname{tg} x}$.

479. Spočtěte diferenciál funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ v $x_0 = 1$ při $h = 0,3$.

480. Spočtěte diferenciál funkce $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 2x}$ v $x_0 = 3$ při $h = -0,02$.

Pomocí diferenciálu určete přibližně následující funkční hodnoty:

481. $\sqrt[3]{1,02}$. **482.** $\ln 11$. **483.** $\arcsin 0,2$. **484.** $\operatorname{tg} 46^o$. **485.** $\operatorname{arctg} 1,1$.

V následujících příkladech spočtěte vyšší diferenciály $d_h^n f(x)$ funkce $f(x)$:

486. $f(x) = e^x \cdot \ln x,\ n = 4$.

487. $f(x) = \sin^2 x,\ n = 3$.

488. $f(x) = x \sin x,\ n = 10$.

489. $f(x) = x \cos 2x,\ n = 10$.

Spočtěte Maclaurinův polynom $T_n(x)$ následujících funkcí:

490. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1},\ n = 4$.

491. $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3},\ n = 13$.

492. $f(x) = \sin(\sin x),\ n = 3$.

493. $f(x) = \ln \cos x,\ n = 6$.

494. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ n = 3$.

495. $f(x) = \ln(\dfrac{\sin x}{x}),\ n = 6$.

Spočtěte Taylorův polynom $T_n(x)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0:

496. $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ n = 3,\ x_0 = 1$.

497. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ n = 4,\ x_0 = 2$.

498. $f(x) = x^x - 1,\ n = 3,\ x_0 = 1$.

499. $f(x) = \sqrt{x},\ n = 2,\ x_0 = 1$.

500. Proveďte rozvoj polynomu $f(x) = x^3 - 2x + 5$ do mocnin dvojčlenu $x - 100$.

501. Polynom $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ rozveďte do mocnin dvojčlenu $x + 1$.

Pomocí Taylorovy formule určete následující limity funkcí:

502. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$.

503. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

505. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln(1 + \dfrac{1}{x})\right]$.

6. L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Následující kapitola obsahuje další příklady na výpočet limity funkce. Při řešení těchto úloh však budeme využívat pojmu derivace. Teoretickým základem pro výpočet limit je věta nazývaná L'Hospitalovo pravidlo. Před řešením úloh této kapitoly si především zopakujte podmínky, za kterých lze pravidlo použít.

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Pomocí L'Hospitalova pravidla spočtěte limitu funkce typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Základní metodický postup je následující. Funkce, jejíž limitu v daném bodě máme počítat, má tvar zlomku. Určíme nejprve limitu čitatele a limitu jmenovatele. Tyto limity často zjistíme pouhým dosazením. Je-li limita čitatele i jmenovatele rovna nule, lze aplikovat L'Hospitalovo pravidlo. Při výpočtu je pak mnohdy nutné provést aplikaci pravidla vícekrát po sobě. Připomeňme ještě, že L'Hospitalovo pravidlo lze použít i pro výpočet jednostranných limit.

506. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$

507. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$

508. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-(-1)e^{-x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2.$

509. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$

510. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2}{2\cdot\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3} = \lim_{x\to 0}\frac{2(e^{2x}-1)}{3\cdot\sin 6x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\cdot e^{2x}}{18\cdot\cos 6x} = \frac{4\cdot 1}{18\cdot 1} = \frac{2}{9}.$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla spočtěte limitu funkce typu $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$.

Postup při výpočtu je analogický jako v případě limit typu $\left|\frac{0}{0}\right|$. Funkce, jejíž limitu v daném bodě máme počítat, je ve tvaru zlomku. Určíme limitu absolutní hodnoty jmenovatele. Je-li tato limita rovna ∞, lze aplikovat L'Hospitalovo pravidlo. Při výpočtu je v řadě případů opět nutné provést aplikaci pravidla vícekrát po sobě. Zdůrazněme skutečnost, že limita čitatele ani jmenovatele nemusí sama o sobě existovat. Dále připomeňme, že výraz $\frac{a}{\infty} = 0$ pro libovolné reálné číslo a.

511. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x-2}{x^2-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{2} = \infty.$$

512. $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \frac{\infty}{6} = \infty.$$

513. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3^x\cdot\ln 3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3^x\cdot\ln^2 3} = \frac{2}{\infty\cdot\ln^2 3} = 0.$$

514. $$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\sin x}{\ln\operatorname{tg} x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x\cdot\cos^2 x}} = \lim_{x\to0^+} \cos^2 x = 1.$$

515. $$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-\sin 2x}{1} = 0.$$

516. $$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{tg} x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{-1}{\sin^2 2x}\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = -2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 2x} =$$

$$= -2\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

Pomocí vhodné úpravy převeďte výpočet na L'Hospitalovo pravidlo.

Nejprve zjistíme, jakého je limita typu. Typ určíme většinou snadno dosazením, nebo krátkým výpočtem. Potom volbou vhodné úpravy podle typu převedeme výpočet zadané limity na výpočet limity, při němž lze L'Hospitalovo pravidlo použít. Na L'Hospitalovo pravidlo jsou převeditelné následující typy limit: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Pro typ $0\cdot\infty$ používáme nejčastěji jednu z úprav

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

která výpočet převede na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Pro limitu typu $\infty - \infty$ lze použít úpravy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}.$$

V řadě případů lze u typu $\infty - \infty$ postupovat jinou cestou. V případě, že funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají tvar zlomků, stojí za pokus provést jejich rozdíl převedením na společného jmenovatele. V jiných případech lze realizovat vytknutí některé části a převést limitu rozdílu na limitu součinu funkcí. U limit typu 0^0, ∞^0, 1^∞ lze použít následující úpravy

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

517. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x\ln x = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

518. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} (\pi - 2\mathrm{arctg}\, x)\cdot\ln x = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\mathrm{arctg}\, x}{\dfrac{1}{\ln x}} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-2}{x^2+1}}{\dfrac{-1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{x\ln^2 x}{x^2+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{\ln^2 x + 2x\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2(\ln x\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{x}) = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{1}{x} = 0.$$

519. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right) = |\infty - \infty| = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{x(x+1)}}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{x(x+1)}\cdot\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{\ln(x+1)} - x(x+1)}{\dfrac{x^3(x+1)}{\ln(x+1)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x(x+1)\cdot\ln(x+1)}{x^3+x^4} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-(x+1)\cdot\ln(x+1)}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\ln(x+1)-(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}}{2x-3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\ln(x+1)}{2x-3x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{x+1}}{2-6x} = \frac{-1}{2}.$$

520. $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x - x = |\infty - \infty| = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1) =$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty\cdot\infty = \infty.$$

521. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = |\infty^0| = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = |0\cdot\infty| = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| =$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\infty}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

522. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}\, x} = |\infty^0| = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, x\cdot \ln\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\mathrm{tg}\, x\cdot\ln x} =$

$$= \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{tg}\, x\cdot\ln x} = \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\mathrm{cotg}\, x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} =$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x\cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}} = \mathrm{e}^{0\cdot 1} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

523. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=|1^\infty|=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\cdot\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\ln(1+\frac{1}{x})}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}}=\left|\frac{0}{0}\right|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x(x+1)}}{\frac{-2}{x^3}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{4x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{4}}=e^\infty=\infty.$$

524. $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=|1^\infty|=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x+x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x+x)}=$

$$=|\infty\cdot0|=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+1}{e^x+x}}=e^2.$$

525. $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}=|0^0|=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\operatorname{tg}x\cdot\ln\arcsin x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{tg}x\cdot\ln\arcsin x}=$

$$=|0\cdot\infty|=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\arcsin x}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}}=\left|\frac{0}{0}\right|=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\operatorname{tg}^2x\cdot\cos^2x}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\sin^2x}{\arcsin x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\sin^2x}{\arcsin x}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\sin x\cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}=e^0=1.$$

526. $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x=|0^0|=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\cdot\ln(\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln(\sin x)}=|0\cdot\infty|=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2\cos x}{\sin x}}=e^0=1.$$

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

V následující skupině úloh řešte příklady na výpočet limit typu $\frac{0}{0}$:

527. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}$.

528. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(x+1) - \sin^2 x}{1 - e^{-x}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+16} - 5}{x^3 - 2x^2 - x - 6}$.

530. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

531. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

532. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

533. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

534. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.

535. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

536. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$.

537. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2}$.

538. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{1 - \cos x}$.

539. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

540. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x}$.

V následující skupině úloh řešte příklady na výpočet limit typu $\frac{\infty}{\infty}$:

541. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{100}}{10^x}$.

542. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

543. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

544. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln|\sin 7x|}{\ln|\sin 9x|}$.

546. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 3x}$.

547. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2\operatorname{tg} 3x}$.

548. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$.

V následující skupině úloh řešte limity typu $0 \cdot \infty$:

549. $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$.

550. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

551. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x$.

552. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{cotg} x$.

553. $\lim\limits_{x\to \infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x) \ln x$.

554. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1) \cdot \operatorname{cotg} x$.

V následující skupině úloh řešte limity typu $|\infty - \infty|$:

555. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

559. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

560. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

561. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)$.

562. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

564. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x-1}{2x^2}+\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^{2x}-1)}\right)$.

V následující skupině úloh řešte příklady na výpočet limit typu $1^\infty, 0^0, \infty^0$:

565. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

566. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{\dfrac{1}{x^2}}$.

567. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

568. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

569. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

570. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

571. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

572. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

573. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

574. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg} x^{\operatorname{tg} 2x}$.

575. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$.

576. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

Zjistěte, zda je možno použít L'Hospitalova pravidla v těchto případech:

577. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

578. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

579. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin 2x}{x+\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}$.

580. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}(\cos x+2\sin x)+\mathrm{e}^{-x^2}\sin^2 x}{\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)}$.

Spočtěte následující limity:

581. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

582. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\operatorname{arctg} x-\operatorname{tg} x}$.

583. Nalezněte limitu

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\,\sin x}{\arcsin\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg}\arcsin x}.$$

7. PRŮBĚH FUNKCE

Problematika vyšetřování průběhu funkce je v jistém smyslu vyvrcholením diferenciálního počtu funkcí jedné reálné proměnné. Při řešení úloh se totiž využívají téměř veškeré znalosti, které jsme doposud o funkcích získali. Vyšetřování průběhu funkce je založeno na teorii, která využívá derivací a výpočtu limit. Nyní alespoň stručně připomeňme základní postup. Vyšetřování průběhu funkce je možno rozdělit do pěti následujících částí: (1) Určíme definiční obor funkce. Je-li to možné, vytvoříme si alespoň hrubou představu o oboru hodnot. Dále zjistíme, zda funkce nemá nějakou významnou speciální vlastnost, např. zda není periodická, nebo nemá nějaký druh symetrie grafu, tj. zda není sudá nebo lichá. Dále nalezneme nulové body funkce, tj. body, kde graf funkce protíná osu x. Nalezení nulových bodů umožní zjistit signum dané funkce, tj. intervaly, na nichž se funkce nachází pod osou, resp. nad osou x. (2) Přikročíme k výpočtu první derivace. Nalezneme nulové body první derivace a vyšetříme její signum. Na intervalech, kde je první derivace kladná, je vyšetřovaná funkce rostoucí, kde je derivace záporná, je funkce klesající. V bodech, v nichž střídá první derivace znaménko nastává lokální extrém. Kombinace $+-$ odpovídá maximu, kombinace $-+$ minimu. O existenci a kvalitě lokálních extrémů lze rozhodnout rovněž pomocí vyšších derivací. (3) Spočítáme druhou derivaci. Zjistíme její nulové body a signum. Na intervalech, kde je druhá derivace kladná, je vyšetřovaná funkce konvexní, kde je druhá derivace záporná, je funkce konkávní. V bodě, v němž druhá derivace střídá znaménko, má funkce inflexní bod. O existenci inflexních bodů lze rovněž někdy rozhodnout pomocí vyšších derivací. (4) Vyšetříme asymptoty funkce. Připomeňme, že existují dva typy asymptot: bez směrnice a se směrnicí. K nalezení asymptot je zapotřebí výpočtu limit. Přímka $x = x_0$ je asymptotou bez směrnice, když existuje aspoň jedna nevlastní jednostranná limita funkce $f(x)$ v bodě x_0. Funkce $f(x)$ může mít i nekonečně mnoho asymptot bez směrnice. Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí funkce $f(x)$, pokud

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

Analogicky je zapotřebí určit uvedené limity pro $x \to -\infty$. Asymptoty se směrnicí mohou existovat nejvýše dvě. Funkce však obecně nemusí mít žádné asymptoty. Příkladem funkcí, které nemají žádné asymptoty jsou polynomy stupně většího než 1. (5) V závěrečném kroku provedeme kompletaci všech získaných informací a na jejich základě nakreslíme graf vyšetřované funkce. Pro vylepšení obrázku můžeme dopočítat ještě několik vhodných funkčních hodnot.

Před řešením konkrétních úloh si pozorně zopakujte celou teorii. Právě uvedený postup, vzhledem ke své volnější formulaci, nemůže studovanou teorii nahradit. Každá úloha má většinou své obtížnější místo. V některých příkladech může být náročný výpočet a úprava druhé derivace, v jiné úloze může být například problém již s nalezením nulových bodů dané funkce. V případě, že Vám některá úloha, nebo její část, bude vzdorovat, použijte k ověření svých výpočtů počítače. V následujících příkladech se budeme nejprve zabývat dílčími úlohami z vyšetřování průběhu funkce.

584. Vyšetřete lokální extrémy a inflexní body funkce

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3.$$

Řešení: Spočítáme první derivaci funkce $f(x)$ a položíme ji rovnu nule. Tím vznikne rovnice. Její řešení jsou stacionární body. Lokální extrém může nastat buď ve stacionárním bodě, nebo v bodě, kde neexistuje derivace. Protože $Df'(x) = R$, stačí vyšetřit pouze stacionární body. Platí

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x^3 - 3x + 2) = 0.$$

Jediní kandidáti na celočíselné kořeny jsou čísla $\pm 1, \pm 2$. Snadno se ověří, že vyhovuje $x = 1$ a $x = -2$. Odtud plyne

$$f'(x) = 4(x-1)^2(x+2) = 0.$$

Nalezli jsme dva stacionární body $x = 1, x = -2$. Zbývá rozhodnout, zda má v těchto bodech funkce $f(x)$ lokální extrém. Obecně lze postupovat dvěma způsoby. První způsob rozhodování je založen na využití první derivace. Na číselnou osu vyneseme všechny stacionární body a body v nichž neexistuje první derivace. Určíme signum (tj. znaménko) první derivace v okolí těchto bodů. To lze provést tak, že v každém z intervalů, na které se rozpadne číselná osa zvolíme vhodného reprezentanta, tj. bod, v němž se snadno počítá funkční hodnota. Spočteme funkční hodnotu derivace v tomto zvoleném bodě a její znaménko zapíšeme pod příslušný interval. Platí

interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
sgn $f'(x)$	$-$	$+$	$+$

Protože první derivace střídá v bodě $x = -2$ znaménko v kombinaci $-+$, je v bodě $x = -2$ lokální minimum. Ve stacionárním bodě $x = 1$ nestřídá první derivace znaménko, a proto funkce $f(x)$ nemá v bodě $x = 1$ lokální extrém. Další způsob rozhodování o existenci lokálních extrémů je založen na využití druhé derivace. Platí

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1).$$

Spočteme funkční hodnotu druhé derivace ve stacionárním bodě. Je-li tato funkční hodnota kladná, má funkce ve stacionárním bodě lokální minimum, je-li záporná, má v tomto bodě maximum. Je-li funkční hodnota rovna nule, nelze na základě druhé derivace rozhodnout o existenci a kvalitě extrému. V našem případě platí

$$f''(-2) = 12(-2)^2 - 12 = 36 > 0, \qquad f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 12 = 0.$$

Odtud plyne, že v bodě $x = -2$ je lokální minimum. O bodu $x = 1$ však nedokážeme na základě výpočtu druhé derivace rozhodnout. V takovém případě lze použít vyšších derivací. Počítáme postupně funkční hodnoty vyšších derivací ve vyšetřovaném bodě až do okamžiku, kdy je funkční hodnota derivace nenulová. V případě, že je řád derivace lichý, není ve stacionárním bodě lokální extrém. Je-li řád sudý a funkční hodnota kladná, má funkce ve stacionárním bodě lokální minimum. Je-li řád sudý a funkční hodnota záporná, má funkce ve stacionárním bodě lokální maximum. V našem případě platí:

$$f'''(x) = 24x, \qquad f'''(1) = 24.$$

Protože je hledaný řád derivace lichý, nemá funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$ lokální extrém. Nyní přejděme k vyšetřování inflexních bodů. Určíme druhou derivaci, nalezneme její nulové body a určíme signum. Z předchozích výpočtů plyne

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
sgn $f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Rozhodovací kritérium je jednoduché. Střídá-li druhá derivace na okolí vyšetřovaného nulového bodu znaménko, má funkce $f(x)$ v tomto bodě inflexní bod. Odtud plyne, že funkce $f(x)$ má dva inflexní body, a to $x = -1$ a $x = 1$. Rovněž o existenci inflexních bodů lze rozhodnout na základě výpočtu vyšších derivací. Opět počítáme postupně funkční hodnoty vyšších derivací ve vyšetřovaném bodě až do okamžiku, kdy je funkční hodnota derivace nenulová. V případě, že je řád této derivace lichý, má funkce $f(x)$ ve vyšetřovaném bodě inflexní bod.

585. Zjistěte, zda má funkce $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5$ lokální extrém v bodě 0.

Řešení: Spočteme první derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x-1)(x-3).$$

První derivaci položíme rovnu nule a určíme stacionární body. Je zřejmé, že bod $x = 0$ je stacionárním bodem. Musíme tedy vyšetřit signum funkce $f'(x)$ v okolí bodu nula. Platí

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$
sgn $f'(x)$	$+$	$+$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ nemá v bodě $x = 0$ lokální extrém. Rozhodněme o lokálním extrému ještě pomocí vyšších derivací.

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x, \qquad f''(0) = 0.$$

Ani na základě druhé derivace nelze rozhodnout o existenci extrému. Určíme třetí derivaci.

$$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30, \qquad f''(0) = 30.$$

Protože řád první vyšší nenulové derivace je lichý, není v bodě $x = 0$ lokální extrém. Bod $x = 0$ je inflexním bodem funkce $f(x)$.

586. Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2+1} - \operatorname{arctg} x.$$

Řešení: Spočteme první derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

První derivaci položíme rovnu nule a určíme stacionární body.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Protože derivace existuje pro všechna reálná čísla, je bod $x = 1$ jediným kandidátem na lokální extrém. Určíme signum první derivace. Platí:

interval	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
sgn $f'(x)$	$-$	$+$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ má v bodě $x = 1$ lokální minimum. Pro ilustraci rozhodneme o lokálním extrému ještě pomocí druhé derivace.

$$f''(x) = \frac{(x^2+1) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, \qquad f''(1) = \frac{1}{2} > 0.$$

Protože je druhá derivace ve stacionárním bodě kladná, plyne odtud, že funkce $f(x)$ má v bodě $x = 1$ lokální minimum.

587. Nalezněte inflexní body funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Řešení: Spočteme druhou derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = (-2x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2},$$

$$f''(x) = (-2x)\cdot(-2x)\cdot\mathrm{e}^{-x^2} + (-2)\cdot\mathrm{e}^{-x^2} = 4\cdot\mathrm{e}^{-x^2}(x^2 - \frac{1}{2}) = 4\cdot\mathrm{e}^{-x^2}(x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Druhou derivaci položíme rovnu nule a určíme její nulové body. Kandidáty na inflexní bod jsou body $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Určíme signum druhé derivace. Platí

interval	$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, \infty)$
sgn $f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ má dva inflexní body $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nyní rozhodneme o existenci inflexních bodů ještě pomocí třetí derivace.

$$f'''(x) = -4x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}(2x^2 - 3), \quad f'''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4\sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \quad f'''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -4\sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

Protože je třetí derivace ve vyšetřovaných bodech různá od nuly, plyne odtud, že body $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní body.

588. Vyšetřete, na kterých intervalech je daná funkce $f(x)$ konvexní, případně konkávní a nalezněte její inflexní body.

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Řešení: Spočteme druhou derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \qquad f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

Druhou derivaci položíme rovnu nule a určíme její nulové body. Kandidáty na inflexní bod jsou body $x = -1$ a $x = 1$. Určíme signum druhé derivace. Platí:

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
sgn $f''(x)$	$-$	$+$	$-$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(-1, 1)$ konvexní a na intervalech $(-\infty, -1), (1, \infty)$ konkávní. Dále funkce $f(x)$ má inflexní body $x = -1$ a $x = 1$.

589. Určete, na kterých intervalech je funkce $f(x)$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ konvexní, případně konkávní. Určete inflexní body této funkce.

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}.$$

Řešení: Spočteme druhou derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = \cos x \cdot \mathrm{e}^{\sin x}, \qquad f''(x) = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x).$$

Druhou derivaci položíme rovnu nule a určíme její nulové body. Řešíme rovnici

$$\cos^2 x - \sin x = 0,$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Zavedením substituce $y = \sin x$ získáváme kvadratickou rovnici $y^2 + y - 1 = 0$. Odtud

$$y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Druhý kořen nevyhovuje, protože $|\sin x| \leq 1$. Existuje tedy jediné řešení rovnice na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Kandidátem na inflexní bod je bod

$$x_0 = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Určíme signum druhé derivace. Platí

interval	$(-\pi/2, x_0)$	$(x_0, \pi/2)$
sgn $f''(x)$	$+$	$-$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ je na intervalu $(\frac{-\pi}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ konvexní a na intervalu $(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2})$ konkávní. Funkce $f(x)$ má inflexní bod $x = \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Nyní rozhodneme o existenci inflexního bodu pomocí třetí derivace.

$$f'''(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - 3\sin x - 1).$$

Protože je třetí derivace ve vyšetřovaném bodě x_0 různá od nuly, plyne odtud, že x_0 je inflexní bod.

590. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

$$f(x) = 2\sin x(1 + \cos x).$$

Řešení: Nejprve určíme lokální extrémy. Spočteme první derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x.$$

První derivaci položíme rovnu nule a určíme stacionární body. To znamená vyřešit goniometrickou rovnici

$$2\cos x + 2\cos 2x = 0.$$

Platí

$$\cos x + \cos 2x = 0,$$
$$\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0,$$
$$\cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0,$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Nyní zavedeme substituci $y = \cos x$ a řešíme kvadratickou rovnici

$$2y^2 + y - 1 = 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}.$$

Odtud plyne $y_1 = -1$ a $y_2 = \frac{1}{2}$. Nyní je ještě třeba vyřešit následující dvě rovnice:

$$\cos x = -1, \qquad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Snadno zjistíme, že na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ existuje jediné řešení rovnice $\cos x = -1$, a to $x = \pi$. Druhá rovnice má na $\langle 0, 2\pi\rangle$ dvě řešení, a to $x = \frac{\pi}{3}$ a $x = \frac{5\pi}{3}$. Na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ jsme nalezli tři stacionární body. Protože derivace existuje pro všechna reálná čísla, jsou tyto body jedinými kandidáty na lokální extrém. Určíme signum první derivace. Platí

interval	$(0, \pi/3)$	$(\pi/3, \pi)$	$(\pi, 5\pi/3)$	$(5\pi/3, 2\pi)$
sgn $f'(x)$	+	−	−	+

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ nemá v bodě $x = \pi$ lokální extrém. V bodě $x = \frac{\pi}{3}$ nastává lokální maximum, zatímco v bodě $x = \frac{5\pi}{3}$ nastává lokální minimum. Globální extrém může nastat buď v krajních bodech intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, nebo v bodech lokálních extrémů. Nyní spočteme potřebné funkční hodnoty. Platí:

$$f(0) = 0, \quad f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}, \quad f(2\pi) = 0.$$

Největší hodnota funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ je $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ a nejmenší $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$.

591. Vojenská loď kotví 9 km od nejbližšího místa břehu. Z lodi je zapotřebí vyslat rychlého posla do tábora, ležícího 15 km od místa na břehu, k němuž má loď nejblíž. Ke břehu posel vesluje na loďce rychlostí maximálně 4 km/h, po pobřeží se může pohybovat maximálně 5 km/h. Na kterém místě pobřeží musí posel přistát, aby se dostal do tábora co nejdříve? Jak dlouho mu to bude trvat?

Řešení: Symbolem x označme vzdálenost přistání loďky od tábora. Zřejmě platí $0 \leq x \leq 15$. Sestavíme funkci $t(x)$ závislosti času na poloze přistání. Ze známého fyzikálního vztahu $t = \frac{s}{v}$, který vyjadřuje závislost času na dráze a rychlosti a z Pythagorovy věty plyne:

$$t(x) = \frac{\sqrt{(15-x)^2 + 9^2}}{4} + \frac{x}{5}.$$

První sčítanec vyjadřuje dobu, kterou posel vesluje na loďce, zatímco druhý sčítanec vyjadřuje dobu po kterou se bude posel pohybovat po souši. Nyní je zapotřebí nalézt minimum funkce $t(x)$. Určíme první derivaci

$$t'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(15-x)(-1)}{\sqrt{(15-x)^2 + 9^2}} + \frac{1}{5}.$$

Položíme $t'(x) = 0$ a spočteme stacionární body. Platí

$$5 \cdot 2(15-x)(-1) = -4 \cdot 2\sqrt{(15-x)^2 + 9^2},$$

$$5(15-x) = 4\sqrt{(15-x)^2 + 9^2},$$

$$(15-x)^2 = 144,$$

$$x = 3.$$

Nalezli jsme jediný stacionární bod $x = 3$. Nyní prověříme, zda má funkce $t(x)$ v tomto bodě lokální extrém. Spočteme druhou derivaci a provedeme její úpravu.

$$t''(x) = \frac{81}{4\sqrt{((15-x)^2 + 81)^3}}.$$

Nyní spočteme hodnotu druhé derivace ve stacionárním bodu. Platí

$$t(3) = \frac{27}{5000} > 0.$$

Odtud plyne, že v bodě $x = 3$ má funkce $t(x)$ lokální minimum. Dále určíme čas, který posel potřebuje k tomu, aby dorazil do tábora v co nejkratším čase.

$$t(3) = \frac{\sqrt{(15-3)^2 + 9^2}}{4} + \frac{3}{5} = \frac{435}{100} = 4,35.$$

Posel musí přistát 3 km od tábora a cesta mu bude trvat 4,35 h.

592. Náklady na palivo pro provoz parníku jsou přímo úměrné třetí mocnině jeho rychlosti. Při rychlosti 10 km/h jsou výdaje za palivo 30 Kč/h. Ostatní výdaje na provoz, které nejsou závislé na rychlosti, jsou 480 Kč/h. Při jaké rychlosti parníku bude celková výše nákladů na 1 km cesty nejmenší? Jaká bude přitom tato celková výše nákladů za 1 hodinu?

Řešení: Nechť x označuje rychlost parníku. Sestavme funkci $f(x)$ závislosti nákladů na rychlosti parníku na jeden kilometr cesty. Za 1 hodinu ujede parník x kilometrů. Na těchto x kilometrů činí náklady za palivo kx^3 Kč, kde k je konstanta úměrnosti a 480 Kč na ostatní výdaje. Platí tedy

$$f(x) = \frac{kx^3}{x} + \frac{480}{x}.$$

Dále spočteme konstantu úměrnosti k. Protože při $x = 10$ km/h jsou náklady na palivo 30 Kč/h platí $30 = k \cdot 10^3$. Odtud plyne, že $k = 0,03$. Tedy

$$f(x) = \frac{3}{100}x^2 + \frac{480}{x}.$$

Nyní nalezneme minimum funkce $f(x)$ na $(0, \infty)$. Určíme první derivaci:

$$f'(x) = \frac{6}{100}x - \frac{480}{x^2} = \frac{6(x^3 - 8000)}{100x^2}.$$

Položíme $f'(x) = 0$ a spočteme stacionární body. Nalezneme $x = 20$. Snadno ověříme, že v tomto bodě nastává lokální minimum. Konečně $f(20) = 36$. Za 1 hodinu však parník urazí 20 km, a tedy náklady na jednu hodinu jsou $36 \cdot 20 = 720$ Kč. Celková výše nákladů na 1 km bude nejmenší při rychlosti 20 km/h a bude činit 720 Kč/h.

593. Nalezněte asymptoty funkce

$$f(x) = 3x + \frac{3}{x-2}.$$

Řešení: Nejprve vyšetříme asymptoty bez směrnice. Definiční obor funkce $f(x)$ je roven $R - \{2\}$. Odtud plyne, že jediný bod x_0, ve kterém funkce může mít nevlastní limitu, je bod $x_0 = 2$. Platí

$$\lim_{x\to 2^+} \left(3x + \frac{3}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+} 3x + \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = 6 + 3 \cdot \infty = \infty.$$

Podobně zjistíme, že

$$\lim_{x\to 2^-}\left(3x+\frac{3}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^-}3x+\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=6+3\cdot(-\infty)=-\infty.$$

Protože existuje aspoň jedna nevlastní jednostranná limita v bodě $x_0=2$ je přímka $x=2$ asymptotou bez směrnice. Nyní vyšetříme asymptoty se směrnicí $y=ax+b$.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{3}{x(x-2)}\right)=3+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x(x-2)}=3+0=3.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(3x+\frac{3}{x-2}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x-2}=0.$$

Přímka $y=3x$ je asymptotou se směrnicí pro $x\to\infty$. Analogicky spočteme limity pro $x\to-\infty$. Opět vychází $y=3x$. Přímka $y=3x$ je dvojnásobnou asymptotou se směrnicí.

594. Nalezněte asymptoty funkce

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

Řešení: Nejprve vyšetříme asymptoty bez směrnice. Definiční obor funkce $f(x)$ je roven $R-\{-1\}$. Odtud plyne, že jediný bod x_0, ve kterém funkce může mít nevlastní limitu, je bod $x_0=-1$. Platí

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-1^+}(x-1)^3\cdot\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{(x+1)^2}=-8\cdot\infty=-\infty.$$

Podobně zjistíme, že

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-1^-}(x-1)^3\cdot\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{(x+1)^2}=-8\cdot\infty=-\infty.$$

Protože existuje aspoň jedna nevlastní jednostranná limita v bodě $x_0=-1$, je přímka $x=-1$ asymptotou bez směrnice. Nyní vyšetříme asymptoty se směrnicí $y=ax+b$.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1,\ b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-2x^2-x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5.$$

Přímka $y=x-5$ je asymptotou se směrnicí pro $x\to\infty$. Snadno je vidět, že tytéž limity vychází pro $x\to-\infty$. Jediná asymptota se směrnicí je $y=x-5$.

595. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Řešení: I. Pro definiční obor platí $Df = R$. Dále $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 2 = x^4 - 2x^2 + 2 = f(x)$. Odtud plyne, že zadaná funkce je sudá. Dále platí, že $f(x)$ je spojitá na R. Úpravou funkčního předpisu $x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2-1)^2 + 1 > 0$ zjistíme, že rovnice $f(x) = 0$ nemá řešení v R. Funkce $f(x)$ je tedy stále kladná a nemá nulové body.
II. Spočteme první derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1).$$

Určíme nulové body první derivace. Rovnice $f'(x) = 0$ má tři řešení $x = -1$, $x = 0$ a $x = 1$. Můžeme určit signum první derivace.

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
sgn $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Zjistili jsme, že funkce $f(x)$ je na intervalech $(-\infty,-1), (0,1)$ klesající a na intervalech $(-1,0), (1,\infty)$ rostoucí. V bodě $x = 0$ má funkce lokální extrém, a to lokální maximum. Platí $f(0) = 2$. V bodech $x = -1$ a $x = 1$ nabývá funkce lokálních minim a platí $f(-1) = f(1) = 1$.
II. Spočteme druhou derivaci. Platí

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 12(x^2 - \frac{1}{3}) = 12(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Nalezneme nulové body druhé derivace. Řešením rovnice $f''(x) = 0$ získáváme $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,58$ a $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$. Určíme signum druhé derivace.

interval	$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$(1/\sqrt{3}, \infty)$
sgn $f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Odtud plyne, že funkce je na intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ konvexní a na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ konkávní. Funkce má dva inflexní body, a to $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ a $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dále platí $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 1,44$.
IV. Asymptoty bez směrnice neexistují, neboť pro každé $x_0 \in R$ platí

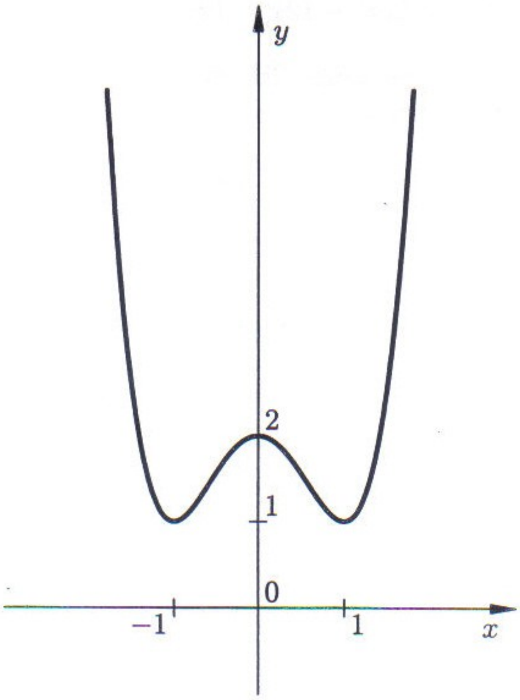
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dále vyšetřeme asymptoty se směrnicí pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$. Snadno zjistíme, že

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} 4x(x^2-1) = 4\cdot\infty\cdot(\infty - 1) = \infty,$$

$$\overline{a} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-2x^2+2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 4x(x^2-1) = -4\infty\cdot(\infty-1) = -\infty.$$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ asymptoty se směrnicí nemá.
V. Provedeme kompletaci všech informací a nakreslíme obrázek.



596. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^4 - 2x^3.$$

Řešení: I. Pro definiční obor platí $Df = R$. Protože $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^3 = x^4 + 2x^3$, plyne odtud, že $f(x)$ není ani sudá, ani lichá. Řešením rovnice $f(x) = x^3(x-2) = 0$ dostáváme, že existují dva nulové body $x = 0$ a $x = 2$. Určíme signum funkce $f(x)$.

interval	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
sgn $f(x)$	$+$	$-$	$+$

II. Spočteme první derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3).$$

Určíme nulové body první derivace. Rovnice $f'(x) = 0$ má dvě řešení $x = 0$ a $x = \frac{3}{2}$. Můžeme určit signum první derivace.

interval	$(-\infty,0)$	$(0,3/2)$	$(3/2,\infty)$
sgn $f'(x)$	$-$	$-$	$+$

Zjistili jsme, že funkce $f(x)$ je na intervalech $(-\infty, 0), (0, \frac{3}{2})$ klesající a na intervalu $(\frac{3}{2}, \infty)$ rostoucí. V bodě $x = \frac{3}{2}$ má funkce lokální extrém, a to lokální minimum. Platí $f(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16} \approx -1,68$. V bodě $x = 0$ lokální extrém není a $f(0) = 0$.
II. Spočteme druhou derivaci. Platí

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1).$$

Nalezneme nulové body druhé derivace. Řešením rovnice $f''(x) = 0$ získáváme $x = 0$ a $x = 1$. Určíme signum druhé derivace.

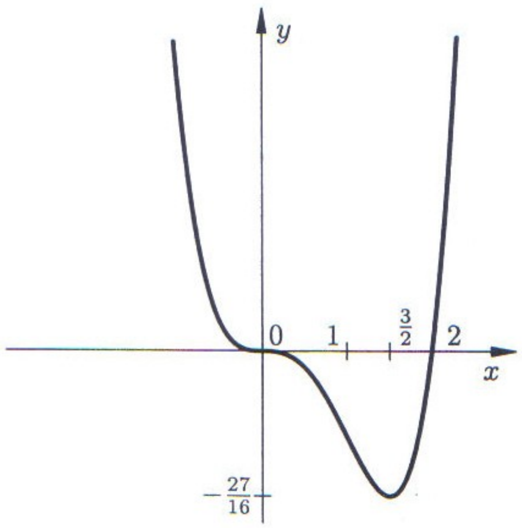
interval	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
sgn $f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Odtud plyne, že funkce je na intervalech $(-\infty, 0), (1, \infty)$ konvexní a na intervalu $(0,1)$ konkávní. Funkce má dva inflexní body, a to $x = 0$ a $x = 1$. Dále platí $f(0) = 0$ a $f(1) = -1$.
IV. Podobně, jako v předchozím příkladě, polynom $f(x)$ nemá asymptoty bez směrnice ani se směrnicí. Vyšetřeme chování funkce $f(x)$ pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} x^4 - 2x^3 = \lim_{x\to\infty} x^3(x-2) = \infty(\infty - 2) = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^4 - 2x^3 = \lim_{x\to-\infty} x^3(x-2) = -\infty(-\infty - 2) = \infty.$$

V. Nyní provedeme kompletaci všech informací a nakreslíme obrázek.



597. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

Řešení: I. Pro definiční obor platí $Df = R - \{0\}$. Protože $f(-x) = (-x)^2 + \frac{2}{-x} = x^2 - \frac{2}{x}$, plyne odtud, že $f(x)$ není ani sudá, ani lichá. Funkce může střídat znaménko buď v nulových bodech, nebo v bodech, kde není definována. Řešením rovnice $f(x) = 0$ dostáváme, že jediný nulový bod je bod $x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$. Nyní již můžeme určit signum funkce $f(x)$.

interval	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	$(0, \infty)$
sgn $f(x)$	$+$	$-$	$+$

II. Spočteme první derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = 2x(1 - \frac{1}{x^3}) = \frac{2x(x^3-1)}{x^3}.$$

Určíme nulové body první derivace a body, v nichž není první derivace definována. Rovnice $f'(x) = 0$ má jediné řešení $x = 1$. Můžeme určit signum první derivace.

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
sgn $f'(x)$	$-$	$-$	$+$

Zjistili jsme, že funkce $f(x)$ je na intervalech $(-\infty, 0), (0, 1)$ klesající a na intervalu $(1, \infty)$ rostoucí. V bodě $x_0 = 1$ má funkce lokální extrém, a to lokální minimum. Platí $f(1) = 3$.

III. Spočteme druhou derivaci. Platí

$$f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3} = \frac{2(x^3+2)}{x^3}.$$

Nalezneme nulové body druhé derivace a body, v nichž není druhá derivace definována. Řešením rovnice $f''(x) = 0$ získáváme $x = -\sqrt[3]{2}$. Určíme signum druhé derivace.

interval	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	$(0, \infty)$
sgn $f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Odtud plyne, že funkce je na intervalech $(-\infty, -\sqrt[3]{2}), (0, \infty)$ konvexní a na intervalu $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ konkávní. Funkce má jediný inflexní bod, a to $-\sqrt[3]{2}$. Rovněž v bodě 0 střídá druhá derivace znaménko. Bod 0 však není inflexním bodem funkce $f(x)$, neboť $0 \notin Df$. Dále platí $f(-\sqrt[3]{2}) = 0$ a $f(1) = 3$.

IV. Nejprve vyšetříme asymptoty bez směrnice. Jediným kandidátem na asymptotu bez směrnice je přímka $x = 0$. Vyšetříme příslušné limity.

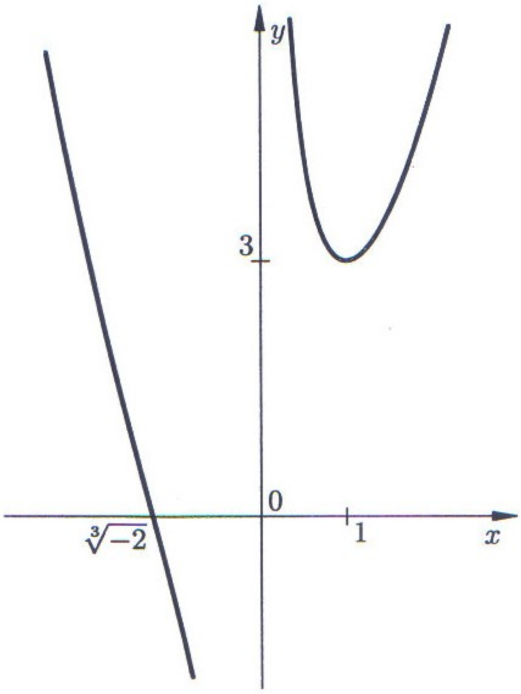
$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + \frac{2}{x} = 0 - \infty = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^2 + \frac{2}{x} = 0 + \infty = \infty.$$

Odtud plyne, že přímka $x = 0$ je asymptota bez směrnice. Dále vyšetřeme asymptoty se směrnicí pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$. Snadno zjistíme, že

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} x + \frac{2}{x^2} = \infty, \qquad \overline{a} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x + \frac{2}{x^2} = -\infty.$$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ asymptoty se směrnicí nemá.

V. Provedeme kompletaci všech informací a nakreslíme obrázek.



598. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení: I. Definiční obor je roven množině $Df = R - \{0\}$. Protože $f(-x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, plyne odtud, že $f(x)$ není ani sudá, ani lichá. Funkce je stále kladná a nemá nulové body.

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn $f(x)$	$+$	$+$

II. Spočteme první derivaci funkce $f(x)$. Platí

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(-1)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Nulové body první derivace neexistují. První derivace je stále záporná a není definována v bodě $x = 0$ a platí $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$.

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn $f'(x)$	$-$	$-$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru. Lokální extrémy funkce $f(x)$ nemá.

III. Spočteme druhou derivaci. Platí

$$f''(x) = (-1)(-2)\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(-1)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

Nalezneme nulové body druhé derivace a body, v nichž není druhá derivace definována. Řešením rovnice $f''(x) = 0$ získáváme $x = -\frac{1}{2}$. Určíme signum druhé derivace.

interval	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, \infty)$
sgn $f''(x)$	$-$	$+$	$+$

Odtud plyne, že funkce je na intervalech $(-\frac{1}{2}, 0), (0, \infty)$ konvexní a na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$ konkávní. Funkce má jediný inflexní bod, a to $-\frac{1}{2}$. Dále platí $f(-\frac{1}{2}) \approx 0,13$ a $f(-1) \approx 0,36$.

IV. Nejprve vyšetříme asymptoty bez směrnice. Jediným kandidátem na asymptotu bez směrnice je přímka $x = 0$. Vyšetříme příslušné limity.

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty.$$

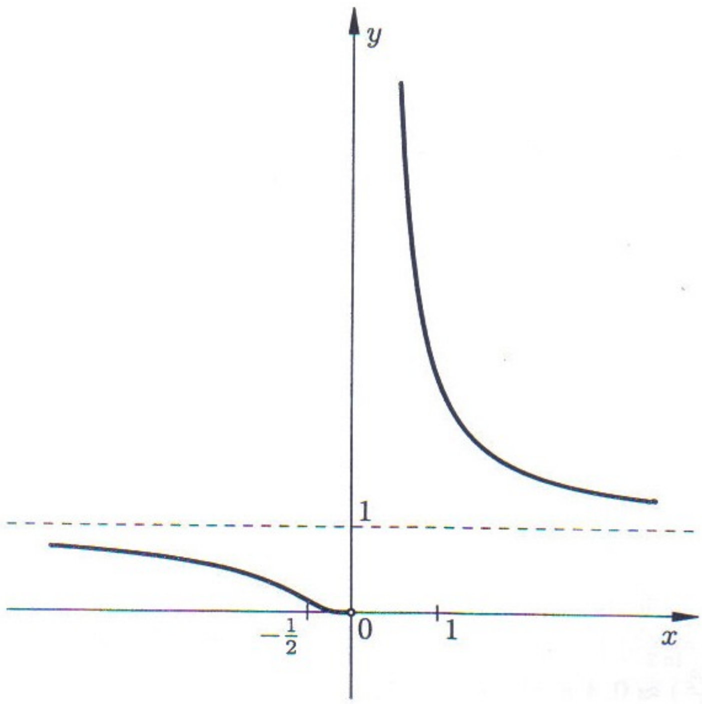
Odtud plyne, že přímka $x = 0$ je asymptota bez směrnice. Dále vyšetřeme asymptotu se směrnicí $y = ax + b$ pro $x \to \infty$.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Přímka $y = 1$ je asymptotou se směrnicí pro $x \to \infty$. Analogicky vyšetříme případ asymptoty pro $x \to -\infty$. Opět vyjde přímka $y = 1$. Přímka $y = 1$ je tedy dvojnásobnou asymptotou se směrnicí.

V. Provedeme kompletaci všech informací a nakreslíme obrázek.



599. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}.$$

Řešení: I. $Df = R$. Protože $x^2 \geq 0$ a $2^{-x} > 0$ platí $Hf \subseteq \langle 0, \infty)$. Funkce $f(x)$ je tedy nezáporná a spojitá na R. Dále $f(-x) = (-x)^2 2^{-(-x)} = x^2 2^x$. Odtud plyne, že funkce $f(x)$ není ani sudá, ani lichá. Určíme nulové body funkce $f(x)$. Je zřejmé, že existuje jediný nulový bod $f(x)$, a to $x_0 = 0$. Platí

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn $f(x)$	$+$	$+$

II. Spočteme první derivaci. Platí

$$f'(x) = 2x \cdot 2^{-x} + x^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{-x}(-1) = -\ln 2 \cdot x \cdot 2^{-x}(x - \frac{2}{\ln 2}).$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ získáme dva stacionární body $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{2}{\ln 2} \approx 2,88$. Určíme signum první derivace.

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2/\ln 2)$	$(2/\ln 2, \infty)$
sgn $f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(\frac{2}{\ln 2}, \infty)$ klesající a na intervalu $(0, \frac{2}{\ln 2})$ rostoucí. V bodě 0 je lokální minimum a $f(0) = 0$. V bodě $\frac{2}{\ln x}$ je lokální maximum a $f(\frac{2}{\ln x}) \approx 1,13$.

III. Určíme druhou derivaci. Platí

$$f''(x) = (-1)\ln 2 \cdot 2^{-x}(2x - \ln 2 \cdot x^2) + 2^{-x}(2 - 2\ln 2 \cdot x) = 2^{-x}(\ln^2 2 \cdot x^2 - 4\ln 2 \cdot x + 2).$$

Nalezneme řešení rovnice $f''(x) = 0$. To znamená vyřešit kvadratickou rovnici $\ln^2 2 \cdot x^2 - 4\ln 2 \cdot x + 2 = 0$. Snadno se vidí, že tato rovnice má dvě řešení

$$x_{1,2} = \frac{4\ln 2 \pm \sqrt{16\ln^2 2 - 4 \cdot \ln^2 2 \cdot 2}}{2 \cdot \ln^2 2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{\ln 2}.$$

Platí $\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2} \approx 0,84$ a $\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2} \approx 4,92$. Nyní můžeme určit signum druhé derivace.

interval	$(-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2})$	$(\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, \frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2})$	$(\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, \infty)$
sgn $f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Odtud plyne, že funkce je na intervalech $(-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}), (\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, \infty)$ konvexní a na intervalu $(\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, \frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2})$ konkávní. Funkce má dva inflexní body, a to $\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, \frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}$. Dále platí $f(\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}) \approx 0,4$ a $f(\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}) \approx 0,8$.

IV. Asymptoty bez směrnice funkce $f(x)$ nemá. Vyšetřeme asymptotu se směrnicí $y = ax + b$ pro $x \to \infty$.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x \cdot 2^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot 2^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

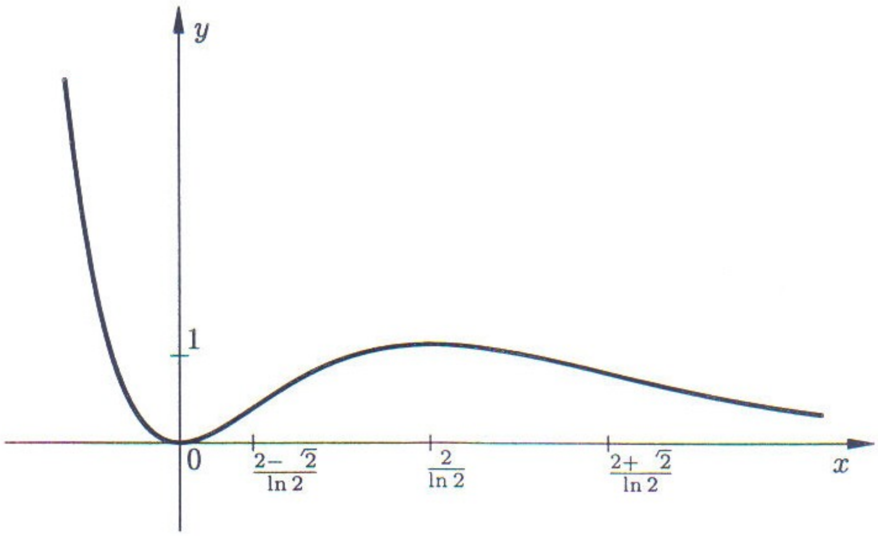
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot 2^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\ln 2 \cdot 2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\ln^2 2 \cdot 2^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Přímka $y = 0$ je asymptotou se směrnicí pro $x \to \infty$. Dále vyšetříme případ asymptoty $y = \bar{a}x + \bar{b}$ pro $x \to -\infty$. Platí

$$\bar{a} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot 2^{-x} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \lim_{x\to-\infty} 2^{-x} = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty.$$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ pro $x \to -\infty$ asymptotu se směrnicí nemá.

V. Provedeme kompletaci všech informací a nakreslíme obrázek.



ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí:

600. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 36x - 5.$

601. $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7.$

602. $f(x) = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$

603. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$

604. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^3}.$

605. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}.$

606. $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x.$

607. $f(x) = 4x + \operatorname{tg} x.$

608. $f(x) = \sqrt{6x - x^2}.$

609. $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}.$

610. $f(x) = \ln(1 + x - 4x^2).$

611. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1).$

Určete intervaly, na nichž je daná funkce rostoucí, případně klesající:

612. $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}.$

613. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}.$

614. $f(x) = x + \sin x.$

615. $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}.$

616. $f(x) = 2x^2 - \ln x.$

617. $f(x) = \dfrac{x - 3}{\sqrt{1 + x^2}}.$

618. $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{1 - x}.$

619. $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}.$

Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x)$ na daném intervalu:

620. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2},\ (-3, 2).$

621. $f(x) = x - 2\ln x,\ \langle 1, \mathrm{e}\rangle.$

622. $f(x) = x^x,\ (0, \infty).$

623. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1,\ \langle -2, 1\rangle.$

624. $f(x) = x^3 - 12x + 1,\ \langle -1, 3\rangle.$

625. $f(x) = 4 - 2x - \mathrm{e}^{1-x},\ (0, 1).$

626. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - x}{1 + x},\ \langle 0, 1\rangle.$

627. $f(x) = x + \ln(8 - 2x),\ \langle -\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}\rangle.$

Určete inflexní body funkce $f(x)$ a intervaly na nichž je funkce konvexní, příp. konkávní:

628. $f(x) = \ln(x^2 + 1).$

629. $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2.$

630. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x^2.$

631. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}.$

632. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x - 7}.$

633. $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}.$

V následujících příkladech nalezněte všechny inflexní body dané funkce $f(x)$:

634. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + 2x.$

635. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + 27}.$

636. $f(x) = \dfrac{\ln(x + 2)}{\sqrt{x + 2}}.$

637. $f(x) = \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^4.$

V následující skupině úloh nalezněte všechny asymptoty dané funkce:

638. $f(x) = x + 2 \cdot \operatorname{arccotg} x.$

639. $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}.$

640. $f(x) = x \cdot \ln(\mathrm{e} + \dfrac{1}{x}).$

641. $f(x) = 5x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{5}.$

642. $f(x) = 3x + \dfrac{3}{x-2}.$

643. $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}.$

644. $f(x) = 2x - \dfrac{\cos x}{x}.$

645. $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1+x^2}.$

646. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}.$

647. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1}.$

V následující skupině úloh proveďte kompletní vyšetření průběhu dané funkce:

648. $f(x) = 3x - x^3.$

649. $f(x) = 16x(x-1)^3.$

650. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}.$

651. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}.$

652. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}.$

653. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}.$

654. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - x.$

655. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} + x.$

656. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}.$

657. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}.$

658. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

659. $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{1-x}.$

660. $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$

661. $f(x) = 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}.$

662. $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x.$

663. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}.$

664. V rovině jsou dány body $A = [0,3]$, $B = [4,5]$. Na ose x nalezněte takový bod M, aby součet vzdáleností $|AM| + |BM|$ byl nejmenší.

665. Jaké jsou rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu 32 m^3, aby jeho vyzdění vyžadovalo minimální spotřebu materiálu?

666. Dva splavné kanály, které jsou na sebe kolmé, mají šířku 4 m a 6 m. Spočtěte, jaké nejdelší břevno je možno splavit těmito kanály.

667. Plakát obdélníkového tvaru velký 500 cm^2 má mít okraj 6cm nahoře a 4cm na každé straně a dole. Jaké největší rozměry může mít potištěná plocha?

668. Dvě lodi křižují svoji dráhu pod pravým úhlem. Když první z nich je v průsečíku drah, je druhá od něj vzdálena ještě 20 km. První loď se pohybuje rychlostí 30 km/h, druhá loď rychlostí 50 km/h. Najděte nejmenší vzdálenost lodí. Vypočtěte rychlost, s jakou se lodi vzdalují.

8. KŘIVKY A FUNKCE DANÉ PARAMETRICKY

V následující kapitole se budeme stručně zabývat základními úlohami s tématikou rovinných křivek a funkcí daných parametricky. Graf funkce, jehož vyšetřováním jsme se zabývali v předešlé kapitole, je speciálním případem rovinné křivky. Pojem křivky je tedy přirozeným zobecněním pojmu grafu funkce. Při řešení úloh budeme navazovat na předchozí vědomosti o derivacích a průběhu funkce.

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

669. Zjistěte, zda je parametrickými rovnicemi

$$x(t) = t^3 + t, \quad y(t) = t^2 - t, \quad t \in R$$

zadána nějaká funkce $y = f(x)$.

Řešení: Protože $x'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ pro každou hodnotu parametru $t \in R$, plyne odtud, že funkce $x(t)$ je rostoucí na R. Každá rostoucí funkce je prostá a k prosté funkci existuje funkce inverzní. Parametrickými rovnicemi je tedy zadána funkce.

670. Nalezněte první, druhou a třetí derivaci funkce dané parametricky

$$x(t) = \mathrm{e}^t, \quad y(t) = \arcsin t, \quad t \in (-1, 1).$$

Řešení: První derivaci určíme podle vzorce

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Je zřejmé, že pro derivace $x'(t)$ a $y'(t)$ platí: $x'(t) = \mathrm{e}^t$ a $y'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Odtud

$$f'(x(t)) = \frac{1}{\mathrm{e}^t\sqrt{1-t^2}}.$$

Druhou derivaci určíme podle vzorce

$$f''(x(t)) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

Protože pro druhé derivace platí $x''(t) = \mathrm{e}^t$ a $y''(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, dostáváme, že

$$f''(x(t)) = \frac{t^2 + t - 1}{\mathrm{e}^{2t}\sqrt{(1-t^2)^3}}.$$

Třetí derivaci určíme podle vzorce

$$f'''(x(t)) = \frac{y'''(t)(x'(t))^2 - 3y''(t)x''(t)x'(t) + 3y'(t)(x''(t))^2 - y'(t)x'(t)x'''(t)}{(x'(t))^5}.$$

Protože pro třetí derivace platí $x'''(t) = \mathrm{e}^t$ a $y'''(t) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$, plyne odtud, že

$$f'''(x(t)) = \frac{2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 3t + 3}{\mathrm{e}^{3t}\sqrt{(1-t^2)^5}}.$$

671. Určete rovnici tečny k elipse zadané parametrickými rovnicemi

$$x(t) = 3\cos x, \quad y(t) = 5\sin x, \ t \in \langle 0, 2\pi)$$

v bodě odpovídajícím hodnotě parametru $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Řešení: Připomeňme, že rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Hodnotě parametru t_0 odpovídá bod $A = [x(t_0), y(t_0)] = [x_0, y_0]$. Platí

$$x_0 = x(t_0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad x'(t) = -3\sin t, \quad x'(\frac{\pi}{4}) = -3\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$y_0 = y(t_0) = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad y'(t) = 5\cos t, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = 5\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Nyní již můžeme určit hodnotu derivace $f'(x_0)$. Platí

$$f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\frac{5}{3}.$$

Rovnice tečny k zadané elipse v bodě $A = [\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}]$ tedy je

$$y - \frac{5\sqrt{2}}{2} = -\frac{5}{3}(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}),$$

$$t: \qquad 10x + 6y - 30\sqrt{2} = 0.$$

672. Určete rovnici tečny ke křivce zadané parametrickými rovnicemi

$$x(t) = \frac{9t}{t+1}, \quad y(t) = \frac{t}{2(t-1)}, \quad t \in R - \{-1, 1\}$$

v bodě odpovídajícím hodnotě parametru $t_0 = 2$.

Řešení: Budeme postupovat jinak, než v předchozím příkladu. Připomeňme, že rovnice tečny ke křivce dané parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$ v bodě odpovídající hodnotě parametru t_0, tj. v bodě $A = [x(t_0), y(t_0)]$ je

$$t: \qquad y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

Analogicky pro rovnici normály platí

$$n: \qquad x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

Spočteme tedy potřebné derivace a funkční hodnoty. Platí

$$x(2) = 6, \quad x'(t) = \frac{9}{(t+1)^2}, \quad x'(2) = 1,$$

$$y(2) = 1, \quad y'(t) = \frac{-2}{4(t-1)^2}, \quad y'(2) = -\frac{1}{2}.$$

Dosazením do uvedených rovnic a po krátké úpravě získáváme

$$t: \quad x + 2y - 8 = 0, \qquad n: \quad 2x - y - 11 = 0.$$

673. Zjistěte, zda je parametrickými rovnicemi

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t, \ t \in R,$$

zadána nějaká funkce $y = f(x)$. V kladném případě určete její první a druhou derivaci. Dále určete rovnici tečny k příslušné křivce v bodě odpovídajícím hodnotě parametru $t_0 = \pi$.

Řešení: Protože $x'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ pro každou hodnotu parametru $t \in R$, plyne odtud, že funkce $x(t)$ je rostoucí na R. K funkci $x(t)$ tedy existuje funkce inverzní, tu však v našem případě nelze najít ve tvaru elementární funkce. Nyní určíme první a druhou derivaci. Platí

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \ t \neq 2k\pi,$$

$$f''(x(t)) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3} = \frac{(1 - \cos t)\cos t - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^3}, \ t \neq 2k\pi.$$

Hodnotě parametru $t_0 = \pi$ odpovídá bod $[\pi, 2]$. Protože $f'(\pi) = 0$, plyne odtud, že rovnice tečny je tvaru $y - 2 = 0$.

674. Určete asymptoty funkce dané parametrickými rovnicemi

$$x(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad y(t) = \text{tg } t, \ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Řešení: Pro $t \to \pm\frac{\pi}{2}$ je $\lim x(t) = \lim(1/\cos t) = \infty$. Dále je

$$\lim_{t\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\frac{\pi}{2}} \sin t = \pm 1,$$

zatímco

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (y(t) - x(t)) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{\cos t}) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t - 1}{\cos t} = 0.$$

Podobně je

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}} (y(t) + x(t)) = \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\, x + \frac{1}{\cos t}) = \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + 1}{\cos t} = 0.$$

Daná křivka (hyperbola) má dvě asymptoty $y = -x$ a $y = x$.

675. Vyšetřete průběh funkce dané parametrickými rovnicemi

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1}, \quad y(t) = \frac{t}{t^2-1}, \; t \in R - \{-1, 1\}.$$

Řešení: Parametrické rovnice definují y jako spojitou funkci proměnné x na těch intervalech, na nichž je funkce $x(t)$ ryze monotónní. Funkce $x(t)$ je spojitá na intervalech $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$. Derivace

$$x'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

existuje na celém definičním oboru funkce $x(t)$. Nulové body derivace jsou $t = 0$ a $t = 2$. Vyšetřeme signum derivace $x'(t)$. Platí

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
sgn $x'(t)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Na intervalech uvedených v tabulce je funkce $x(t)$ ryze monotónní. V bodě $t = 0$ má funkce $x(t)$ lokální maximum a v bodě $t = 2$ má lokální minimum. Funkce $y(t)$ je spojitá na intervalech $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$. Parametrické rovnice tedy definují celkem pět funkcí $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ proměnné x, které jsou dány na těchto intervalech: $f_1(x)$ na $(-\infty, -1)$, $f_2(x)$ na $(-1, 0)$, $f_3(x)$ na $(0, 1)$, $f_4(x)$ na $(1, 2)$ a $f_5(x)$ na $(2, \infty)$. Pro každou z těchto funkcí na příslušném intervalu platí

$$f_i'(x(t)) = -\frac{t^2+1}{t(t+1)^2(t-2)}.$$

Funkce $x(t)$ zobrazuje interval $(-\infty, -1)$ na interval $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Funkce $f_1(x)$ klesá od 0 do $-\infty$, neboť $f_1'(x(t)) < 0$ a platí

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t}{t^2-1} = 0, \qquad \lim_{t\to-1^-} \frac{t}{t^2-1} = -\infty.$$

Analogicky $x(t)$ zobrazuje interval $(-1, 0)$ na interval $(-\frac{1}{2}, 0)$. Funkce $f_2(x)$ klesá od ∞ k 0, neboť na tomto intervalu platí $f_2'(x(t)) < 0$ a

$$\lim_{t\to -1^+} \frac{t}{t^2-1} = \infty, \qquad \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{t^2-1} = 0.$$

Dále $x(t)$ zobrazuje interval $(0, 1)$ na interval $(-\infty, 0)$. Funkce $f_3(x)$ roste od $-\infty$ do 0, neboť na tomto intervalu platí $f_3'(x(t)) > 0$ a

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{t}{t^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t^2-1} = 0.$$

Interval $(1, 2)$ se funkcí $x(t)$ zobrazuje na interval $(4, \infty)$, přičemž $f_4'(x(t)) > 0$. Funkce $f_4(x)$ roste od $\frac{2}{3}$ do ∞, neboť

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{t}{t^2-1} = \infty, \qquad \lim_{t\to 2^-} \frac{t}{t^2-1} = \frac{2}{3}.$$

Konečně interval $(2, \infty)$ se funkcí $x(t)$ zobrazí na $(4, \infty)$, přičemž $f_5'(x(t)) < 0$. Funkce $f_5(x)$ klesá od $\frac{2}{3}$ do 0, neboť

$$\lim_{t\to 2^+} \frac{t}{t^2-1} = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{t\to \infty} \frac{t}{t^2-1} = 0.$$

Nyní určíme druhou derivaci. Pro každou z funkcí $f_i(x(t))$ na příslušném intervalu platí

$$f_i''(x(t)) = \frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t+1)^3(t-2)^3}.$$

Podrobným vyšetřením druhé derivace zjistíme, že polynom $t^3 + 3t + 1$ střídá na intervalu $(-1, 0)$ znaménko, a tedy má na intervalu nulový bod. V tomto bodě má funkce f_3 inflexní bod. Zbývá určit asymptoty. Funkce f_1 a f_2 mají v bodě $x = -\frac{1}{2}$ asymptotu $x = -\frac{1}{2}$. Vyšetřeme dále asymptoty pro $x \to -\infty$ a $x \to \infty$. Platí

$$a = \lim_{x\to -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{t\to -\infty} \frac{\frac{t}{t^2-1}}{\frac{t^2}{t-1}} = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{t^2-1} \cdot \frac{t-1}{t^2} = \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{t(t+1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} f_1(x) - ax = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{t^2-1} = 0.$$

Osa $y = 0$ je asymptotou se směrnicí funkce $f_1(x)$ pro $x \to -\infty$. Analogicky vypočteme

$$a = \lim_{x\to -\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to -\infty} f_3(x) - \frac{x}{2} = \lim_{t\to 1^-} \left(\frac{t}{t^2-1} - \frac{t^2}{2(t-1)}\right) = \lim_{t\to 1^-} \frac{-t^3-t^2+2t}{2(t^2-1)} = -\frac{3}{4}.$$

Přímka $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ je asymptotou se směrnicí funkce $f_3(x)$ pro $x \to -\infty$. Dále

$$a_4 = \lim_{x\to\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{t\to 1^+} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

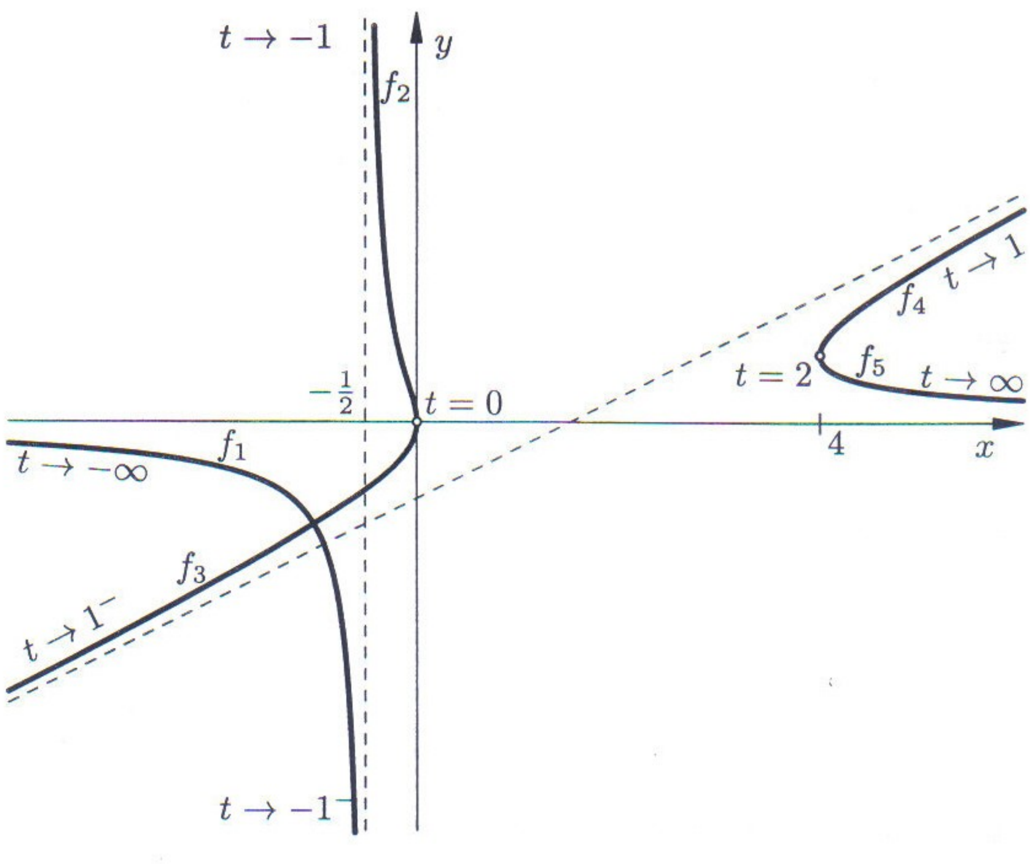
$$b = \lim_{x\to\infty} f_4(x) - \frac{x}{2} = -\lim_{t\to 1^+} \frac{t^2+2t}{2(t+1)} = -\frac{3}{4}.$$

Přímka $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ je asymptotou se směrnicí funkce $f_4(x)$ pro $x \to \infty$. Konečně

$$a_5 = \lim_{x\to\infty} \frac{f_5(x)}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t(t+1)} = 0,$$

$$b_5 = \lim_{x\to\infty} f_5(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^2-1} = 0.$$

Osa $y = 0$ je asymptotou se směrnicí funkce $f_5(x)$ pro $x \to \infty$. Další asymptoty neexistují. Zbývá zkompletovat získané informace a nakreslit obrázek.



676. Řada křivek získala svůj vlastní název, který často vystihuje její tvar nebo charakter. Mezi tyto křivky patří například cykloida, kardioida, asteroida, lemniskata, Archimedova spirála, logaritmická spirála a hyperbolická spirála. Napište parametrické rovnice těchto známých křivek a nakreslete jejich grafy.

V následující skupině úloh spočtěte derivaci funkce dané parametricky:

677. $x(t) = \dfrac{1-t}{1+t}, \quad y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}.$ **678**. $x(t) = 4t + t^2, \quad y(t) = t^3 + t.$

679. $x(t) = a\cos^3 t,\ y(t) = a\sin^3 t.$ **680**. $x(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos^2 t,\ y(t) = \mathrm{e}^{2t}\sin^2 t.$

Spočtěte první, druhou a třetí derivaci funkce dané parametricky:

681. $x(t) = \ln t, \quad y(t) = \sin 2t.$ **682**. $x(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \quad y(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$

683. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce dané parametrickými rovnicemi $x(t) = t^2 - 4t + 4, \quad y(t) = t^2 - 3t + 2$ v bodě $A = [1, 0]$.

684. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce dané parametrickými rovnicemi $x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t)$ pro $t = \frac{3\pi}{2}$.

Nalezněte inflexní body funkce dané parametricky:

685. $x(t) = \sin t, \quad y(t) = \mathrm{e}^t.$ **686**. $x(t) = 3t + t^3, \quad y(t) = t^2.$

687. Zjistěte, pro jaká a, b je bod $A = [1, 4]$ inflexním bodem funkce dané parametrickými rovnicemi $x(t) = bt^2, \quad y(t) = at + t^3$ pro $t \geq 0$.

Nalezněte asymptoty křivky dané parametrickými rovnicemi:

688. $x(t) = \dfrac{t\mathrm{e}^t}{t-1}, \quad y(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^t}{t-1}.$ **689**. $x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3}, \quad y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}.$

Vyšetřete průběh křivky zadané parametrickými rovnicemi:

690. $x(t) = \dfrac{t^2}{1-t^2}, \quad y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}.$ **691**. $x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}.$

692. $x(t) = \dfrac{\ln t}{t}, \quad y(t) = t\ln t.$ **693**. $x(t) = t\mathrm{e}^t, \quad y(t) = t\mathrm{e}^{-t}.$

694. $x(t) = \cos^4 t, \quad y(t) = \sin^4 t.$ **695**. $x(t) = 2t - t^2, \quad y(t) = 3t - t^3.$

III. INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. NEURČITÝ INTEGRÁL

Následující kapitola obsahuje příklady na výpočet neurčitých integrálů. V úvodní části se budeme zabývat přímou integrací, při které používáme znalosti základních integračních vzorců a různých algebraických úprav. V další části kapitoly uvedeme úlohy na substituční metodu a metodu per partes. Dále budou následovat úlohy na integraci racionálně lomených funkcí. Konečně ukážeme, že na výpočet integrálu z racionálně lomené funkce lze převést celou řadu speciálních typů integrálů.

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

696. Pomocí přímé integrace řešte integrál

$$\int \left(x^3 - 2^x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x.$$

Řešení: K výpočtu tohoto integrálu je zapotřebí znalosti hned několika základních integračních vzorců. Především je nutno vědět, že platí

$$\int (f(x) \pm g(x)) \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm \int g(x)\, \mathrm{d}x.$$

V našem případě je tedy nutné rozdělit výpočet zadaného integrálu na výpočet tří integrálů. Platí

$$\int \left(x^3 - 2^x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int x^3\, \mathrm{d}x - \int 2^x\, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x.$$

K vyřešení těchto tří dílčích integrálů je zapotřebí znalosti následujících integračních vzorců

$$\int x^n\, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ pro } n \neq -1, \quad \int x^{-1}\, \mathrm{d}x = \ln|x| + c,$$

$$\int a^x\, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad \text{speciálně pak} \quad \int \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c.$$

Odtud plyne

$$\int \left(x^3 - 2^x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{2^x}{\ln 2} + \ln|x| + c.$$

697. Pomocí přímé integrace řešte integrál

$$\int (10\sin x - 5\cos x)\mathrm{d}x.$$

Řešení: K výpočtu tohoto integrálu je zapotřebí znalosti následujících vzorců.

$$\int c\cdot f(x)\ \mathrm{d}x = c\int f(x)\ \mathrm{d}x, \quad \int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + c, \quad \int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + c.$$

Z uvedených integračních vzorců ihned plyne

$$\int (10\sin x - 5\cos x)\mathrm{d}x = \int 10\sin x\ \mathrm{d}x - \int 5\cos x\ \mathrm{d}x =$$

$$= 10\int \sin x\ \mathrm{d}x - 5\int \cos x\ \mathrm{d}x = -10\cos x - 5\sin x + c.$$

698. Pomocí přímé integrace řešte integrál

$$\int \Big(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + 7\Big)\mathrm{d}x.$$

Řešení: K výpočtu tohoto integrálu je zapotřebí znalosti následujících integračních vzorců.

$$\int \mathrm{d}x = x + c, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\ x + c.$$

Z uvedených vzorců ihned plyne

$$\int \Big(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + 7\Big)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x + \int 7\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\ x - \mathrm{cotg}\ x + 7x + c.$$

699. Pomocí přímé integrace řešte integrál

$$\int \Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}\Big)\mathrm{d}x.$$

Řešení: K výpočtu tohoto integrálu je zapotřebí znalosti integračních vzorců

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\ x + c_1 = -\mathrm{arccotg}\ x + c_2.$$

Odtud ihned plyne

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x = \arcsin x + \operatorname{arctg} x + c.$$

700. Pomocí přímé integrace řešte integrál

$$\int \frac{2x - \sin x}{\cos x + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: K výpočtu tohoto integrálu je zapotřebí znalosti integračního vzorce

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln |f(x)| + c.$$

Protože $(\cos x + x^2)' = -\sin x + 2x$ plyne odtud, že

$$\int \frac{2x - \sin x}{\cos x + x^2} \, \mathrm{d}x = \ln |\cos x + x^2| + c.$$

701. Substituční metodou řešte integrál

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 3^x \\ \mathrm{d}t = \ln 3 \cdot 3^x \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \arcsin t = \frac{1}{\ln 3} \arcsin 3^x + c.$$

702. Substituční metodou řešte integrál

$$\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 1 + 3\cos x \\ \mathrm{d}t = -3 \sin x \, \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} \left(-\frac{\mathrm{d}t}{3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{3} \cdot \ln |t| = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3\cos x| + c.$$

703. Substituční metodou řešte integrál

$$\int x^3 \sqrt{5x^2 + 3} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int x^3\sqrt{5x^2+3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = 5x^2+3 \Rightarrow x^3 = \frac{t-3}{5}x \\ \mathrm{d}t = 10x\cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{10x} \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\frac{t-3}{5}\frac{\mathrm{d}t}{10} =$$

$$= \frac{1}{50}\int \sqrt{t}(t-3)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{50}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{t^5} - \frac{3}{50}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} = \frac{(5x^2+3)(5x^2-2)\sqrt{5x^2+3}}{125} + c.$$

704. Substituční metodou řešte integrál

$$\int \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{1+t^2}\cdot\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3\mathrm{e}^x} + c.$$

Daný integrál bylo možno vyřešit i kratší cestou pomocí jediné substituce.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{arctg}\mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\cdot\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3\mathrm{e}^x} + c.$$

705. Substituční metodou řešte integrál

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t) = \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}) = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c.$$

706. Metodou per partes řešte integrál

$$\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int x^3 e^x \, dx = \left| \begin{matrix} f = x^3 & f' = 3x^2 \\ g' = e^x & g = e^x \end{matrix} \right| = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x \, dx = \left| \begin{matrix} f = x^2 & f' = 2x \\ g' = e^x & g = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x \, dx = \left| \begin{matrix} f = x & f' = 1 \\ g' = e^x & g = e^x \end{matrix} \right| = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6\int e^x \, dx =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c.$$

707. Metodou per partes řešte integrál

$$\int \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} \, dx.$$

Řešení:

$$\int \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} \, dx = \left| \begin{matrix} f = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} & f' = \frac{1}{x^2+1} \\ g' = 1 & g = x \end{matrix} \right| = x \cdot \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = x \cdot \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

708. Metodou per partes řešte integrál

$$\int x \ln^2 x \, dx.$$

Řešení:

$$\int x \ln^2 x \, dx = \left| \begin{matrix} f = \ln^2 x & f' = \frac{2\ln x}{x} \\ g' = x & g = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x \ln x \, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} f = \ln x & f' = \frac{1}{x} \\ g' = x & g = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c$$

709. Metodou per partes řešte integrál

$$\int \cos(\ln x) \, dx.$$

Řešení:

$$\int \cos(\ln x) \, dx = \left| \begin{matrix} f = \cos(\ln x) & f' = -\sin(\ln x)\frac{1}{x} \\ g' = 1 & g = x \end{matrix} \right| = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx$$

$$= \left| \begin{array}{ll} f = \sin(\ln x) & f' = \cos(\ln x)\frac{1}{x} \\ g' = 1 & g = x \end{array} \right| = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x.$$

Nyní došlo k zajímavé situaci. Po druhé aplikaci pravidla per partes jsme získali stejný integrál jako na začátku výpočtu. Dále budeme postupovat tak, že sestavíme rovnici, jejíž levá strana je rovna danému integrálu a pravá strana posledně získanému výrazu. Neznámou v rovnici je hledaný integrál. Platí tedy

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x.$$

Odtud plyne

$$\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)\right) + c.$$

710. Metodou per partes řešte integrál

$$\int x\mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int x\mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f = x & f' = 1 \\ g' = \mathrm{e}^x \sin x & g = \int \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x \end{array} \right|.$$

Integrál $g = \int \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x$ spočteme metodou per partes jako v předchozím příkladu.

$$\int \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f = \sin x & f' = \cos x \\ g' = \mathrm{e}^x & g = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} f = \cos x & f' = -\sin x \\ g' = \mathrm{e}^x & g = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x(-\sin x)\ \mathrm{d}x.$$

Odtud plyne

$$g = \int \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x).$$

Tedy

$$\int x\mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x)x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x)x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x.$$

Integrál $\int \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x$ již známe a integrál $\int \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x$ určíme analogicky. Platí

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x + \cos x).$$

Celkem dostáváme

$$\int x\mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{x\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x)x + \frac{\mathrm{e}^x}{2}\cos x + c.$$

711. Kombinací substituční metody a metody per partes řešte integrál

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \ln t \, \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{cc} f = \ln t & f' = \frac{1}{t} \\ g' = 1 & g = t \end{array} \right| =$$

$$= t \ln t - \int \frac{t}{t} \, \mathrm{d}t = t \ln t - t = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + c.$$

712. Kombinací substituční metody a metody per partes řešte integrál

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \operatorname{arctg} t \cdot 2t \, \mathrm{d}t = 2 \int t \cdot \operatorname{arctg} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} f = \operatorname{arctg} t & f' = \frac{1}{t^2+1} \\ g' = t & g = \frac{t^2}{2} \end{array} \right| = 2 \cdot \left(\frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{2(t^2+1)} \, \mathrm{d}t \right) =$$

$$= t^2 \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = t^2 \operatorname{arctg} t - \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) \, \mathrm{d}t =$$

$$= t^2 \operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + c.$$

713. Řešte integrál z racionální ryze lomené funkce

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} \mathrm{d}x.$$

Řešení: Předně nalezneme reálné kořeny jmenovatele. Pro rozklad jmenovatele platí $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Dále provedeme rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky. Z teorie vyplývá počet a tvar těchto zlomků. Sestavíme rovnici

$$\frac{2x+7}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

a určíme koeficienty A, B. Koeficienty lze určit dvěma způsoby. V obou případech však rovnici vynásobíme členem $(x-1)(x+2)$. Pak dostáváme

$$2x+7=A(x+2)+B(x-1).$$

První možnost jak určit koeficienty A, B spočívá v tom, že pravou stranu roznásobíme a provedeme porovnání koeficientů u stejných mocnin x na levé a na pravé straně. Získáme tím systém lineárních rovnic s neznámými A, B, který je nutno vyřešit. Tento postup se nazývá metoda neurčitých koeficientů. Platí

$$A+B=2$$

$$2A-B=7.$$

Řešením systému získáme $A=3, B=-1$. Druhý postup spočívá v tom, že v rovnici $2x+7=A(x+2)+B(x-1)$ provedeme vhodné dosazení za x. Vhodné dosazení je přitom takové dosazení, které vynuluje některé členy a umožní stanovit hodnotu nějakého koeficientu. V našem případě je například vhodné dosadit $x=-2$ a $x=1$. Získáme opět $A=3, B=-1$. Odtud dále plyne

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}=$$

$$=3\ln|x-1|-\ln|x+2|=\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|+c.$$

714. Řešte integrál z racionální ryze lomené funkce

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x.$$

Řešení: Provedeme rozklad jmenovatele nad R. Protože jmenovatel x^2+2x+5 nemá reálné kořeny je daná funkce parciálním zlomkem. Provedeme následující algebraickou úpravu

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}.$$

Úloha se rozpadla na výpočet dvou integrálů. Cílem úpravy bylo získat v čitateli prvního integrálu derivaci jmenovatele. Pro první integrál tedy platí

$$\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\ln|x^2+2x+5|.$$

V případě druhého integrálu postupujeme následovně

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4}=\left|\begin{array}{l}t=x+1\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x\end{array}\right|=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4}=$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(\frac{t}{2})^2+1} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{t}{2} \\ du = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{2du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\text{arctg } u = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x+1}{2}.$$

Z předchozích výpočtů plyne

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \text{arctg}\frac{x+1}{2} + c.$$

715. Řešte integrál z racionální ryze lomené funkce

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx.$$

Řešení: Provedeme rozklad jmenovatele nad R. Platí $x^3-2x^2+2x = x(x^2-2x+2)$. Druhý člen na pravé straně nemá reálné kořeny. Funkci rozložíme na parciální zlomky. Platí

$$\frac{x+2}{x(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}.$$

Nyní spočítáme koeficienty A, B, C. Sestavíme rovnici

$$x+2 = A(x^2-2x+2) + x(Bx+C) = (A+B)x^2 - (2A-C)x + 2A,$$

ze které získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$A + B = 0,$$

$$-2A + C = 1,$$

$$2A = 2.$$

Jejím vyřešením získáme hledané koeficienty $A = 1, B = -1, C = 3$. Výsledkem tohoto výpočtu je úprava

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x-3}{x^2-2x+2}dx.$$

Úloha se rozpadla na výpočet dvou integrálů. Zřejmě $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$. Zbývá určit druhý integrál. Platí

$$\int \frac{x-3}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2-2x+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + 2\text{arctg }(x-1).$$

Z předchozích výpočtů plyne

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + 2\text{arctg }(x-1) + c.$$

716. Řešte integrál z racionální neryze lomené funkce

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Protože stupeň čitatele je roven stupni jmenovatele, provedeme dělení čitatele jmenovatelem. Tak dostáváme, že

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}\, \mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{4x - 3}{x^2 - 4x + 3}\right) \mathrm{d}x = \int 1\, \mathrm{d}x + \int \frac{4x - 3}{x^2 - 4x + 3}\, \mathrm{d}x.$$

U posledního integrálu nalezneme kořeny jmenovatele a dále provedeme rozklad na parciální zlomky. Platí

$$\frac{4x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{4x - 3}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3}.$$

Odtud plyne

$$4x - 3 = A(x - 3) + B(x - 1).$$

Nyní se snadno zjistí, že $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{9}{2}$. Tím je integrál převeden na tvar

$$\int 1\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{x - 1} + \frac{9}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{x - 3} = x - \frac{1}{2} \ln|x - 1| + \frac{9}{2} \ln|x - 3| + c.$$

717. Řešte integrál z racionální neryze lomené funkce

$$\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 8}{2x^2 + 7x - 15}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Protože stupeň čitatele je větší než stupeň jmenovatele provedeme dělení čitatele jmenovatelem. Tak dostáváme

$$\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 8}{2x^2 + 7x - 15}\, \mathrm{d}x = \int \left(x - 1 + \frac{22x - 7}{2x^2 + 7x - 15}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int x\, \mathrm{d}x - \int 1\, \mathrm{d}x + \int \frac{22x - 7}{(2x - 3)(x + 5)}\, \mathrm{d}x.$$

Dále provedeme rozklad na parciální zlomky. Platí

$$\frac{22x - 7}{(2x - 3)(x + 5)} = \frac{A}{2x - 3} + \frac{B}{x + 5}.$$

Odtud plyne

$$22x - 7 = A(x + 5) + B(2x - 3).$$

Nyní se snadno zjistí, že $A = 4, B = 9$. Tím je integrál převeden na tvar

$$\int x\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3} + 9\int \frac{\mathrm{d}x}{x+5} = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|2x-3| + 9\ln|x+5| + c.$$

718. Řešte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$$

Řešení: Nejprve vhodnou substitucí převedeme integrál z iracionální funkce na integrál z racionální lomené funkce. Platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^6 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = t^2, \sqrt{x} = t^3 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t \end{array} \right| = 6\int \frac{t^5}{t^2+t^3}\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3}{t+1}.$$

Dále provedeme dělení čitatele jmenovatelem. Pak dostáváme, že

$$6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + c.$$

719. Řešte integrál

$$\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x + \cos x - 1}\mathrm{d}x.$$

Řešení: Zavedeme tzv. univerzální substituci, pomocí níž převedeme daný integrál na integrál z racionální lomené funkce. Platí

$$\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x + \cos x - 1}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{2t}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\frac{1-t^2}{t(1+t^2)}}{\frac{2t+1-t^2-1-t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{2t^2(1-t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1+t}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|t| =$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Řešte přímou integrací následující integrály:

720. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x\sqrt{x}} + x^2 - 2}{x^2}\, \mathrm{d}x.$

721. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}}{x^3}\, \mathrm{d}x.$

722. $\displaystyle\int \frac{x(\sqrt[3]{x} - x^3\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}\, \mathrm{d}x.$

723. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, \mathrm{d}x.$

724. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\, \mathrm{d}x.$

725. $\displaystyle\int \frac{3 - 2\operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x.$

726. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}\, \mathrm{d}x.$

727. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1 - 3\mathrm{e}^{2x}}\, \mathrm{d}x.$

728. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x}\, \mathrm{d}x.$

729. $\displaystyle\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x}\, \mathrm{d}x.$

730. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}\, \mathrm{d}x.$

731. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\, \mathrm{d}x.$

Substituční metodou řešte následující integrály:

732. $\displaystyle\int (3x - 11)^9\, \mathrm{d}x.$

733. $\displaystyle\int 2x(x^2+2)^3\, \mathrm{d}x.$

734. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1-x)^{25}}\, \mathrm{d}x.$

735. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^4}\, \mathrm{d}x.$

736. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^4 + 4}.$

737. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x + x^2}.$

738. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4 - 9x^2}.$

739. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 5x + 11}\, \mathrm{d}x.$

740. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4x + 12}\, \mathrm{d}x.$

741. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\, \mathrm{d}x.$

742. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20}\, \mathrm{d}x.$

743. $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$

744. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+4)^6}\, \mathrm{d}x.$

745. $\displaystyle\int \frac{x}{6 + 5x^4}\, \mathrm{d}x.$

746. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\, \mathrm{d}x.$

747. $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\, \mathrm{d}x.$

748. $\displaystyle\int \sqrt{7-3x}\, \mathrm{d}x.$

749. $\displaystyle\int \sqrt[8]{2x+5}\, \mathrm{d}x.$

750. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+2}\, \mathrm{d}x.$

751. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x.$

752. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(2x+3)^5}}\, \mathrm{d}x.$

753. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\, \mathrm{d}x.$

Substituční metodou řešte následující integrály:

754. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-5x^2}}\,\mathrm{d}x.$

755. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

756. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}\,\mathrm{d}x.$

757. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,\mathrm{d}x.$

758. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-4}}\,\mathrm{d}x.$

759. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{8-x^6}}\,\mathrm{d}x.$

760. $\displaystyle\int \frac{1}{3^x+1}\,\mathrm{d}x.$

761. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sqrt{2-3\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$

762. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2^x+1}}\,\mathrm{d}x.$

763. $\displaystyle\int x\ln(x^2+2)\,\mathrm{d}x.$

764. $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x}\,\mathrm{d}x.$

765. $\displaystyle\int \frac{\ln x-2}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x.$

766. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

767. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}\,(2x+1)\,\mathrm{d}x.$

768. $\displaystyle\int \sin(8x-3)\,\mathrm{d}x.$

769. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\operatorname{cotg}\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$

770. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

771. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}\,x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

772. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}\,\mathrm{d}x.$

773. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

774. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x.$

775. $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\cos^2(x^3+1)}\,\mathrm{d}x.$

776. $\displaystyle\int x\sin(x^2+4)\,\mathrm{d}x.$

777. $\displaystyle\int x\operatorname{tg}(1-x^2)\,\mathrm{d}x.$

778. $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x.$

779. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}\,\mathrm{d}x.$

780. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x.$

781. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}\,x-1}}.$

782. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+3}\,\mathrm{d}x.$

783. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$

784. $\displaystyle\int cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

785. $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

786. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$

787. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$

788. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sin x^3}\,\mathrm{d}x.$

789. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg}\,x\cdot\ln^2\sin x}.$

790. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}\,x}\,\mathrm{d}x.$

791. $\displaystyle\int \frac{x-\operatorname{arctg}\,x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

792. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

793. $\displaystyle\int \frac{\arccos x-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Řešte metodou per partes:

794. $\int x \sin x \, dx.$

795. $\int x \ln x \, dx.$

796. $\int x \ln^2 x \, dx.$

797. $\int x \ln(x^2+3) \, dx.$

798. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$

799. $\int x (\operatorname{arccotg} x)^2 \, dx.$

800. $\int x^2 \sin 2x \, dx.$

801. $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx.$

802. $\int (x^2+6x+3) \cos 2x \, dx.$

803. $\int \arcsin x \, dx.$

804. $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \, dx.$

805. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx.$

806. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx.$

807. $\int e^{\arcsin x} \, dx.$

808. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} \, dx.$

809. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx.$

810. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx.$

811. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

812. $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \, dx.$

813. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx.$

814. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} \, dx.$

815. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \, dx.$

Určete integrály z racionálně lomené funkce:

816. $\int \frac{dx}{2x^2+5x-12}.$

817. $\int \frac{11x-12}{3x^2-11x+6} \, dx.$

818. $\int \frac{5x^3-15x^2+15x-3}{x^3-8x^2+17x-10} \, dx.$

819. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} \, dx.$

820. $\int \frac{9x^4+3x^3-23x^2+x}{9x^3-6x^2-5x+2} \, dx.$

821. $\int \frac{9x-14}{9x^2-24x+16} \, dx.$

822. $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}.$

823. $\int \frac{x^4}{x^2+3} \, dx.$

824. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2} \, dx.$

825. $\int \frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)} \, dx.$

826. $\int \frac{1}{x^3+1} \, dx.$

827. $\int \frac{1}{x^4+1} \, dx.$

828. $\int \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2} \, dx.$

829. $\int \frac{x}{(x^2+3x+3)^2} \, dx.$

Řešte následující iracionální, trigonometrické a transcendentní integrály:

830. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

831. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

832. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

833. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

834. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\,\mathrm{d}x$.

835. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-5x+8}}$.

836. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x-5x^2}}$.

837. $\displaystyle\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,\mathrm{d}x$.

838. $\displaystyle\int \sqrt{3+4x+x^2}\,\mathrm{d}x$.

839. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

840. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-8}\,\mathrm{d}x$.

841. $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x$.

842. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$.

843. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4-5\sin x}$.

844. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x-\cos x}$.

845. $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$.

846. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4-3\sin^2 x}$.

847. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

848. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$.

849. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

850. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}\,\mathrm{d}x$.

851. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x$.

852. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{cotg}^8 x}$.

853. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^{2x}+4}\,\mathrm{d}x$.

854. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$.

855. $\displaystyle\int \sqrt{\mathrm{e}^{-2x}+4\mathrm{e}^{-x}-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešte následující integrály:

856. $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^8-1}$.

857. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}\,\mathrm{d}x$.

858. $\displaystyle\int x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x$.

859. $\displaystyle\int x^2\ln\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

860. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$.

861. $\displaystyle\int 2\mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

862. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

863. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

864. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

865. $\displaystyle\int x(x^2+1)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

2. RIEMANNŮV URČITÝ INTEGRÁL

Následující kapitola obsahuje příklady na výpočet Riemannova určitého integrálu a jeho aplikací. Nejdůležitějším a nejčastěji využívaným vzorcem při výpočtech je tzv. Newton-Leibnizova formule, která převádí výpočet Riemannova určitého integrálu na výpočet primitivní funkce a její funkční hodnoty v krajních bodech intervalu. Uveďme nyní tvar této důležité formule. Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

866. Pomocí Newton-Leibnizovy formule řešte integrál

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 5x + 2)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Nejprve nalezneme primitivní funkci k funkci $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Nalezenou primitivní funkci zapíšeme do tzv. Newton-Leibnizovy závorky a závorku spočteme.

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 5x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{5}{2} - 2\right) = \frac{3}{2}.$$

867. Pomocí Newton-Leibnizovy formule řešte integrál

$$\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Zadaný interval $\langle -1, 1\rangle$ rozdělíme na dva intervaly a využijeme věty, že

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pro $a \leq b \leq c$. Pak nalezneme primitivní funkci k funkci $f(x) = |x|$ na obou intervalech a postupujeme podobně jako v předchozím příkladu.

$$\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |x|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = (0 - (-\frac{1}{2})) + (\frac{1}{2} - 0) = 1.$$

868. Pomocí Newton-Leibnizovy formule řešte integrál

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}.$$

Řešení: Provedeme rozklad na parciální zlomky. Platí

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Koeficienty v posledním integrálu jsme získali obvyklým výpočtem z rovnice

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1},$$

$$1 = A(x+1) + Bx,$$

odkud již plyne $A = 1, B = -1$. Nyní poslední integrál rozdělíme. Platí

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = [\ln x]_1^3 - [\ln(x+1)]_1^3 = (\ln 3 - \ln 1) - (\ln 4 - \ln 2) = \ln\frac{3}{2} \approx 0,405...$$

869. Substituční metodou řešte Riemannův integrál

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Při zavádění substituce postupujeme analogicky jako u výpočtu primitivní funkce. V případě Riemannova určitého integrálu je však ještě zapotřebí přepočítat meze integrálu. Změna mezí se provede dosazením do substituční rovnice.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} t = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}x \\ 0 \to 1 \\ 1 \to \mathrm{e} \end{array}\right| = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{t+1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t = [t - \ln|t+1|]_1^{\mathrm{e}} = (\mathrm{e} - \ln(\mathrm{e}+1)) - (1 - \ln 2) \approx 1,098...$$

870. Substituční metodou řešte Riemannův integrál

$$\int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-2}}.$$

Řešení:

$$\int_{-4}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-2}} = \left|\begin{array}{c} t = \frac{1}{x+1} \\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \\ -4 \to -\frac{1}{3} \\ -3 \to -\frac{1}{2} \end{array}\right| = -\int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2-2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{t}}{\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 1}} \, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{t\sqrt{\frac{1-2t-t^2}{t^2}}} \, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-2t-t^2}} \, dt =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (t+1)^2}} \, dt = \left| \begin{array}{c} u = t+1 \\ du = dt \\ -\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \to \frac{2}{3} \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - u^2}} \, du =$$

$$= \left[\arcsin \frac{u}{\sqrt{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,129...$$

V průběhu výpočtu nastala situace, kdy po substituci byla dolní mez integrálu větší než horní. V této situaci je obvyklé provádět změnu mezí podle vztahu

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$$

871. Metodou per partes řešte Riemannův integrál

$$\int_0^1 x \cdot 2^x \, dx.$$

Řešení: Při výpočtu Riemannova určitého integrálu metodou per partes postupujeme podobně jako při výpočtu primitivní funkce. Funkci, kterou získáme jako mezivýsledek při integraci zapisujeme do Newton-Leibnizovy závorky.

$$\int_0^1 x \cdot 2^x \, dx = \left| \begin{array}{cc} f = x & f' = 1 \\ g' = 2^x & g = \frac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right| = \left[\frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2^x}{\ln 2} \, dx =$$

$$= (\frac{2}{\ln 2} - 0) - \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2} \approx 0,804...$$

872. Metodou per partes řešte Riemannův integrál

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Řešení:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{cc} f = \operatorname{arctg} x & f' = \frac{1}{1+x^2} \\ g' = x & g = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 \, dx}{2(1+x^2)}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,228...$$

873. Kombinací substituční metody a metody per partes řešte Riemannův integrál

$$\int_0^1 \arcsin x\ \mathrm{d}x.$$

Řešení:

$$\int_0^1 \arcsin x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} f = \arcsin x & f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g' = 1 & g = x \end{array} \right| = \left[x\cdot\arcsin x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t^2 = 1 - x^2 \\ x\mathrm{d}x = -t\mathrm{d}t \\ 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{array} \right| = \arcsin 1 - \int_1^0 \frac{-t\mathrm{d}t}{t} = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + [t]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,570...$$

874. Určete velikost obsahu části roviny Ω omezené křivkami $y = \dfrac{x^2}{4}$ a $y = \dfrac{x}{2} + 2$.

Řešení: Postup je následující. Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce definované na intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) \le g(x)$, pak velikost obsahu plochy $P(\Omega)$ omezené křivkami $f(x)$ a $g(x)$ je rovna Riemannovu integrálu

$$P(\Omega) = \int_a^b (g(x) - f(x))\ \mathrm{d}x.$$

V našem příkladě musíme nejprve určit meze integrálu. Meze určíme tak, že nalezneme průsečíky grafů funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Řešíme rovnici

$$\frac{x^2}{4} = \frac{x}{2} + 2.$$

Odtud

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4) = 0.$$

Zřejmě $x = -2$ a $x = 4$. Dolní mez integrálu je tedy rovna -2, horní 4 a platí

$$P(\Omega) = \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^4 = \left(\frac{16}{4} + 8 - \frac{64}{12}\right) - \left(\frac{4}{4} - 4 + \frac{8}{12}\right) = 9.$$

875. Vypočtěte objem tělesa Ω vytvořeného rotací grafu funkce $y = \sin x$ kolem osy x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení: Objem tělesa $V(\Omega)$ vzniklého rotací grafu funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x je roven Riemannovu integrálu

$$V(\Omega) = \pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

V našem případě jsou meze integrálu rovny $a = 0$ a $b = \pi$. Z uvedeného vzorce plyne

$$V(\Omega) = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}934\ldots$$

876. Určete délku oblouku křivky $y = \ln x$ na intervalu $\frac{3}{4} \le x \le \frac{12}{5}$.

Řešení: Délku křivky Ω, která je grafem funkce $f(x)$ definované na intervalu $\langle a, b \rangle$ lze určit pomocí Riemannovu integrálu

$$l(\Omega) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Protože $f(x) = \ln x$, platí $f'(x) = \frac{1}{x}$ a $f'^2(x) = \frac{1}{x^2}$. Odtud plyne

$$l(\Omega) = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = t^2 - 1 \\ t\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{t\mathrm{d}t}{t^2 - 1} \\ \frac{3}{4} \to \frac{5}{4} \\ \frac{12}{5} \to \frac{13}{5} \end{array} \right| = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{t^2}{t^2 - 1} \, \mathrm{d}t = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{t^2 - 1}{t^2 - 1} \, \mathrm{d}t + \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{1}{t^2 - 1} \, \mathrm{d}t = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{\mathrm{d}t}{t - 1} \, \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} \frac{\mathrm{d}t}{t + 1} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \left[t + \frac{1}{2} \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \ln(t + 1) \right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} = \left[t + \frac{1}{2} \ln \frac{t - 1}{t + 1} \right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}} =$$

$$= \frac{13}{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{8}{5}}{\frac{18}{5}} - \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} \right) = \frac{27}{20} + \ln 2 \approx 2{,}043.$$

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Spočtěte následující Riemannovy určité integrály:

877. $\displaystyle\int_3^5 \sqrt{x-3}\,\mathrm{d}x.$

878. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}\,\mathrm{d}x.$

879. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

880. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x.$

881. $\displaystyle\int_4^{20} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\,\mathrm{d}x.$

882. $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^x+1)^3\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$

883. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

884. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,\mathrm{d}x.$

885. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x.$

886. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x.$

887. $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

888. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}.$

889. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x.$

890. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

891. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

892. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}}\,\mathrm{d}x.$

893. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

894. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$

895. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

896. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$

897. $\displaystyle\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x.$

898. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3}\,\mathrm{d}x.$

899. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3+2\sin x}.$

900. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{6-5\cos x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

901. $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

902. $\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$

903. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x.$

904. $\displaystyle\int_{-1}^1 \arccos x\,\mathrm{d}x.$

905. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$

906. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$

907. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}.$

908. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}.$

909. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x+1}}.$

910. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

Spočtěte následující Riemannovy určité integrály:

911. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}.$

912. $\displaystyle\int_{0}^{16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}.$

913. $\displaystyle\int_{0}^{1} (\mathrm{e}^x-1)^4\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$

914. $\displaystyle\int_{1}^{2} x\cdot\log_2 x \,\mathrm{d}x.$

915. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{11} x \,\mathrm{d}x.$

916. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}} \,\mathrm{d}x.$

917. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x \,\mathrm{d}x.$

918. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{x^2-1}}.$

919. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{(1-x^2)^3} \,\mathrm{d}x.$

920. $\displaystyle\int_{\frac{5}{2}}^{5} \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4} \,\mathrm{d}x.$

921. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-3x+2} \,\mathrm{d}x.$

922. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{2x+x^2} \,\mathrm{d}x.$

923. $\displaystyle\int_{1}^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1} \,\mathrm{d}x.$

924. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x.$

925. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1} \,\mathrm{d}x.$

926. $\displaystyle\int_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} \,\mathrm{d}x.$

927. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

928. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (x\cdot\sin x)^2 \,\mathrm{d}x.$

929. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^x\cos^2 x \,\mathrm{d}x.$

930. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^{15}\cdot\sqrt{1+3x^8} \,\mathrm{d}x.$

931. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3} \,\mathrm{d}x.$

932. $\displaystyle\int_{0}^{1} (\arcsin x)^4 \,\mathrm{d}x.$

933. Určete střední hodnotu funkce $f(x)=\dfrac{2}{x}$ na intervalu $\langle 4,13\rangle$.

934. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného dvěma parabolami určenými rovnicemi $y=x^2-4x+2$ a $y=-x^2+6x-6$.

935. Určete obsah obrazce ohraničeného parabolou $y=-x^2+4x-3$ a jejími tečnami v bodech $T_1=[0,-3], T_2=[3,0]$.

936. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y=-x, y=x+2, x=0, x=3$ a objem tělesa vzniklého rotací obrazce kolem osy x.

937. Spočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y(1+x^2)=1, 2y=x^2$.

938. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného uzavřenou křivkou $y^2=x^2-x^4$.

939. Určete obsah obrazce ohraničeného kružnicí $x^2+y^2=8$ a parabolou $2y=x^2$.

940. Spočtěte obsah smyčky křivky $x(t)=t^2-1, y(t)=t^3-t$.

941. Určete obsah rovinného obrazce omezeného smyčkou křivky $y^2=x^3+x^2$.

942. Určete obsah obrazce ohraničeného asteroidou $x(t)=a\cos^3 t, y(t)=a\sin^3 t$.

943. Spočtěte délku grafu funkce $f(x) = \dfrac{8x^2}{x^6+2}$ na intervalu $\langle 1, 2\rangle$.

944. Spočtěte délku oblouku paraboly $y = x^2$ pro $0 \leq x \leq 3$.

945. Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = 1 - \ln \cos x$ na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$.

946. Stanovte délku oblouku křivky $y^2 = (x+1)^3$ ležící v levé polorovině vyťaté přímkou o rovnici $x = 4$.

947. Spočtěte objem tělesa vytvořeného rotací obrazce omezeného křivkami $y = 2^x$ a $3x - 4y + 5 = 0$ kolem osy x.

948. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce určeného parabolami $y = x^2$ a $y^2 = x$ kolem osy x.

949. Spočtěte objem tělesa vytvořeného rotací obrazce omezeného křivkami $y = 2$, $y = -2$, $x^2 - y^2 = 4$ kolem osy y.

950. Vypočtěte objem tělesa vytvořeného rotací obrazce omezeného čarami $y = x^3$, $x = 0$ a $y = 8$ kolem osy y.

951. Pravidelný šestiúhelník o straně a se otáčí kolem své jedné strany. Najděte pomocí Guldinovy věty objem tělesa tak vzniklého.

952. Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu a objemu kužele.

953. Spočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací obrazce omezeného parabolou $y^2 = 2x$ a přímkou $2x = 3$ okolo osy x.

954. Spočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = x^3$ kolem osy x na $\langle -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\rangle$.

955. Spočtěte obsah rotační plochy vzniklé rotací křivky dané parametrickými rovnicemi $x(t) = (\cos t + \frac{1}{2})^2, y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\sin 2t$ pro $t \in \langle 0, \pi\rangle$ kolem osy x.

956. Určete obsah pláště tělesa vzniklého rotací křivky $y = \mathrm{e}^{-x}$ okolo osy $x > 0$.

957. Spočtěte obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací jednoho oblouku sinusoidy $y = \sin x$ okolo osy x pro $0 \leq x \leq \pi$.

958. Určete povrch tělesa vytvořeného rotací kardioidy $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$ okolo polární osy.

959. Určete těžiště T homogenní oblasti s jednotkovou plošnou hmotností, která je ohraničena parabolou $y = 2x - x^2$ a osou x.

960. Určete těžiště T homogenní oblasti s jednotkovou plošnou hmotností, která je ohraničena křivkou $x(t) = t^2 - t, y(t) = t^3 + t^2$ a osou x.

3. NEVLASTNÍ INTEGRÁL

Závěrečná kapitola je věnována úlohám s tematikou nevlastních integrálů. Nevlastní integrál je přirozeným zobecněním Riemannova určitého integrálu. Zobecnění se týká odstranění základního předpokladu, že integrujeme přes interval konečné délky, tzv. nevlastní integrál vlivem meze, nebo předpokladu ohraničenosti funkce, kterou integrujeme, tzv. nevlastní integrál vlivem funkce. Při výpočtu postupujeme tak, že funkci nejprve zintegrujeme a pak provedeme limitní přechod. V dalším typu úloh stačí pouze zjistit, zda daný integrál konverguje. To provádíme pomocí některého z konvergenčních kritérií.

ČÁST A: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

961. Spočtěte nevlastní integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Jedná se o nevlastní integrál vlivem meze. Nevlastní integrál rozepíšeme podle definice, určíme primitivní funkci, dosadíme do Newton-Leibnizovy závorky a provedeme limitní přechod.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}-(-1)\right) = \lim_{t\to\infty} 1-\frac{1}{t} = 1.$$

962. Spočtěte nevlastní integrál

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Jedná se opět o nevlastní integrál vlivem meze. Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu.

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} f=\operatorname{arctg} x & f'=\frac{1}{x^2+1} \\ g'=\frac{1}{x^2} & g=-\frac{1}{x}\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x\right]_1^t - \int_1^t (-\frac{1}{x})\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg}1\right) + \lim_{t\to\infty}\left(\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^t \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{t\to\infty}\left([\ln x]_1^t - \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_1^t\right) = \frac{\pi}{4} + \lim_{t\to\infty}\left(\ln t - \frac{1}{2}\left(\ln(t^2+1) - \ln 2\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} + \lim_{t\to\infty} \ln\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} + \lim_{t\to\infty}\ln\sqrt{1+\frac{1}{t^2+1}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} + \lim_{t\to\infty}\ln\sqrt{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

963. Spočtěte nevlastní integrál

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Řešení: Jedná se o nevlastní integrál vlivem funkce. Daná funkce není na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ ohraničená. Singularita se nachází v bodě $x = 0$. Proto integrál rozdělíme na dvě části. Platí

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{t\to 0^-}[3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+}[3\sqrt[3]{x}]_{t}^{1} =$$

$$= \lim_{t\to 0^-}(3\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{-1}) + \lim_{t\to 0^+}(3\sqrt[3]{1} - 3\sqrt[3]{t}) = 3 + 3 = 6.$$

964. Vypočtěte nevlastní integrál

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x.$$

Řešení: Jedná se o nevlastní integrál vlivem funkce. Singularita je v bodě $x = 1$. Podle definice platí

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x.$$

Nejprve nalezneme primitivní funkci. Vhodnou substitucí provedeme racionalizaci integrálu.

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u^2 = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{u^2-1}{u^2+1} \\ \mathrm{d}x = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \end{array} \right| = \int u \cdot \frac{4u}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u = \int \frac{4u^2}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u.$$

Nyní provedeme rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky. Platí

$$\frac{4u^2}{(u^2+1)^2} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{Cu+D}{(u^2+1)^2}.$$

Odtud plyne

$$4u^2 = (Au + B)(u^2 + 1) + Cu + D,$$

$$4u^2 = Au^3 + Au + Bu^2 + B + Cu + D.$$

Sestavíme systém rovnic a nalezneme neznámé koeficienty. Platí

$$A = 0, B = 4, C = 0, D = -4.$$

Rozkladem na parciální zlomky upravíme poslední integrál na tvar

$$\int \left(\frac{4}{u^2+1} + \frac{-4}{(u^2+1)^2}\right) \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} - 4\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2} =$$

$$= 4 \cdot \operatorname{arctg} u - 4\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2}.$$

Pro výpočet posledního integrálu použijeme následujícího obratu

$$\operatorname{arctg} u = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \left| \begin{matrix} f = \frac{1}{u^2+1} & f' = \frac{-2u}{(u^2+1)^2} \\ g' = 1 & g = u \end{matrix} \right| = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{u^2+1}{(u^2+1)^2} - \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{u}{u^2+1} + 2 \cdot \operatorname{arctg} u - 2\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2}.$$

Odtud plyne

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} u + \frac{u}{u^2+1}\right).$$

Tedy

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = 4 \cdot \operatorname{arctg} u - 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} u + \frac{u}{u^2+1}\right).$$

Po dosazení ze substituční rovnice a úpravě celkem dostáváme

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = 2 \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Odtud plyne

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-}\left[2 \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left(2 \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} + (t-1)\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - (2\operatorname{arctg}1 + (-1)\cdot 1)\right) =$$

$$= 2\lim_{t\to1^-}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} + \lim_{t\to1^-}(t-1)\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} + 1 - \frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} + 0 + 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi+2}{2}.$$

965. Zjistěte, zda konverguje integrál

$$\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme srovnávací kritérium. Nejprve dokážeme, že na intervalu $\langle 1,\infty)$ platí

$$x^2 < \mathrm{e}^x.$$

Uvažujme funkci $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x$ a ukažme, že $f(x) > 0$ na intervalu $\langle 1,\infty)$. Zřejmě $f(1) = e - 2 > 0$. Dále platí, že $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2 > 0$, neboť funkce e^x je rostoucí. Tedy $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x > 0$ na $\langle 1,\infty)$. Odtud dále plyne, že funkce $g(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ je rostoucí na $\langle 1,\infty)$. Tato skutečnost spolu s faktem $g(1) = e - 1 > 0$ dává, že $g(x) > 0$ na $\langle 1,\infty)$. To však znamená, že na intervalu $\langle 1,\infty)$ platí $\mathrm{e}^x - x^2 > 0$, tj. $x^2 < \mathrm{e}^x$. Tím je nerovnost dokázána. Nyní je zřejmé, že na intervalu $\langle 1,\infty)$ platí

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} < \frac{1}{x^2}.$$

Protože integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria také integrál $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Proveďme ještě přímý výpočet.

$$\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}[-\mathrm{e}^{-x}]_1^t = \lim_{t\to\infty}(\frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-t}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

966. Zjistěte, zda konverguje integrál

$$\int_1^\infty \frac{\cos\mathrm{e}^x}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme srovnávací kritérium. Na intervalu $\langle 1,\infty)$ platí

$$x^2+1 \ge x^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+1} \ge x \;\Rightarrow\; x\sqrt{x^2+1} \ge x^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \le \frac{1}{x^2}.$$

Dále zřejmě platí

$$|\cos\mathrm{e}^x| \le 1.$$

Na intervalu $\langle 1,\infty)$ lze tedy provést následující odhad

$$\left|\frac{\cos\mathrm{e}^x}{x\sqrt{x^2+1}}\right| = \frac{|\cos\mathrm{e}^x|}{x\sqrt{x^2+1}} \le \frac{1}{x^2}.$$

Protože integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria také zadaný integrál.

ČÁST B: NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Vypočtěte následující nevlastní integrály:

967. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

968. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^3}}.$

969. $\displaystyle\int_2^{\infty} \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x.$

970. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}.$

971. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}.$

972. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}.$

973. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}.$

974. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$

975. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

976. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}.$

977. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.$

978. $\displaystyle\int_2^{6} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$

979. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

980. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$

981. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

982. $\displaystyle\int_0^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x.$

983. $\displaystyle\int_0^{\infty} x\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

984. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

985. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$

986. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}.$

Rozhodněte, zda konvergují nevlastní integrály:

987. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

988. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}.$

989. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^x-2}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x.$

990. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}.$

991. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

992. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

993. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

994. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$

995. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}.$

996. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

997. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\cdot\sin 2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$

998. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

999. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln\ln x}.$

1000. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\sin 2x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

IV. VÝSLEDKY NEŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ

I. Úvod do studia matematiky

1. Logika, množiny, důkazy

26. 0, 1. **27.** Pravdivý. **29.** Tautologie, kontradikce, tautologie, tautologie, tautologie. **30.** $A' = A|A, A \wedge B = (A|B)|(A|B), A \vee B = (A|A)|(B|B), A \Rightarrow B = A|(A|B) = A|(B|B), A \Leftrightarrow B = (A|A)|(B|B)|(A|B)$. **31.** A. **32.** A. **33.** Správný, nesprávný, správný, nesprávný. **34.** Ředitel režisérovi nerozuměl a režisér řekl v obou případech totéž. **35.** Nikdy. **37.** 1. **38.** $B \subseteq A$. **39.** $\frac{343}{198}, \frac{431}{225}$. **41.** 3. **42.** $A \cap B, \emptyset$. **43.** 1. **44.** $A \cap B = A, A \cup B = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}, A - B = \emptyset, B - A = \{0\}$. **45.** $\inf M = 1, \sup M = 2$. **46.** $\inf M = 0, \sup M = 3$. **47.** 2^{100}. **50.** $|A| = 9, |B| = 1$. **51.** Ne. Platí pouze vztah $\subseteq$. **56.** $DS = HS = \langle -\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \rangle$. **57.** $S^{-1} = \{[-1, -2], [0, 0], [1, 2]\}$. **58.** $2^{24}, 1, 2^9, 2^{81}$. **59.** $T \circ S = \{[x, y]; y = -3x^2 - 1 \vee y = 9x^4 + 6x^2 - 2, \forall x \in Z\}, S \circ T = \{[x, y]; y = 3x^2 + 1 \vee y = 3x^4 - 18x^2 + 28, \forall x \in N\}$. **60.** $S = \{[2, 2], [3, 1], [4, 1]\}, DS = \{2, 3, 4\}, HS = \{1, 2\}, S$ je zobrazení, které není injektivní, $S^{-1} = \{[2, 2], [1, 3], [1, 4]\}$ není zobrazení. **61.** 72. **63.** 1. Není injektivní, není surjektivní. 2. Je injektivní, není surjektivní. 3. Není injektivní, není surjektivní. **64.** 1. Je bijektivní. 2. Není injektivní, není surjektivní. 3. Není injektivní, je surjektivní. **65.** 60, 0. **66.** Ano. **67.** Ano. **69.** Ano. **80.** Úsudek ztroskotává na tom, že množina $K - \{a, b\}$ může být prázdná. Tento případ nastane, má-li K dva prvky.

II. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

1. Základní vlastnosti funkcí

100. $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{3}\rangle$. **101.** $\langle -1, 2\rangle$. **102.** $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. **103.** $(1, \infty)$. **104.** $(-\infty, 0\rangle$. **105.** $\langle 2, \infty)$. **106.** $\{x \in R; x \neq \frac{1}{4}(k\pi + 3), k \in Z\}$. **107.** $(0, 1\rangle$. **108.** $(4, 5) \cup (5, \infty)$. **109.** $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. **110.** R. **111.** $\langle 2, 3\rangle$. **112.** $\langle 0, \infty)$. **113.** $\langle \frac{1}{3}, 1\rangle$. **114.** $R - \{-2, 1, 3\}$. **115.** $R - \{2\}$. **116.** $R - \{2\}$. **117.** $R - \{1, 2\}$. **118.** $\{x \in R; x \neq (2k + \frac{2}{3})\pi, x \neq (2k + \frac{4}{3})\pi, k \in Z\}$. **119.** $\{x \in R; x \neq (k + \frac{4}{3})\pi, k \in Z\}$. **120.** $\langle -1, 1\rangle$. **121.** $(-2, \frac{4}{3})$. **122.** $(\frac{\log 5}{\log 3}, \infty)$. **123.** $\langle -\frac{1}{2}, \infty)$. **124.** $(\frac{1}{3}, \infty)$. **125.** $(\frac{1}{3}, \infty)$. **126.** $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$. **127.** $(-3, 1)$. **128.** $(-5, -4) \cup (-4, 2\rangle$.**129.** $(-5, 2) \cup (3, \infty)$. **130.** $\{x \in R; (k - \frac{1}{6})\pi \leq x \leq (k + \frac{1}{6})\pi, k \in Z\}$. **131.** $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$. **132.** $\emptyset$. **133.** $\langle -4, 0\rangle$. **134.** $(-1, 1) \cup (3, \infty)$. **135.** $\{x \in R; e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \leq x \leq e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in Z\}$. **136.** Ne. **137.** Ano. **138.** Ano. **139.** Ne. **140.** Ano. **141.** Ano. **142.** Ano. **143.** Ano. **176.** Sudá. **177.** Lichá. **178.** Lichá. **179.** Lichá. **180.** Sudá. **181.** Sudá. **182.** Sudá. **183.** Lichá. **184.** $\frac{\pi}{2}$. **185.** 2π. **186.** 12π. **187.** $\frac{4}{35}\pi$. **188.** 3π. **189.** $\frac{\pi}{2}$. **190.** 2π.**191.** 2π. **192.** Rostoucí na $\langle 0, \infty)$, konstantní na $(-\infty, 0\rangle$. **193.** Rostoucí na $\langle 2, \infty)$, klesající na $(-\infty, -3\rangle$, konstantní na $\langle -3, 2\rangle$. **194.** Rostoucí na $\langle \frac{3}{2}, \infty)$, klesající na $(-\infty, \frac{3}{2}\rangle$. **195.** Klesající na $Df = R - \{2\}$. **196.** Rostoucí na $(-\infty, 0)$, klesající na $(0, \infty)$. **197.** Rostoucí na $(0, \infty)$, klesající na $(-\infty, 0)$. **198.** $F(x) = \sin^3 x + \ln \sin x, G(x) = \sin(x^3 + \ln x)$. **199.** $F(x) = 10, G(x) = 1$. **200.** $F(x) = ||x - 3| + 1|, G(x) = ||x + 1| - 3|$. **201.** $F(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}, G(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. **202.**

$F(x) = 3(x^2-3)+2, G(x) = (3x+2)^2-3$. **203.** $F(x) = -\frac{x+3}{2x+5}, G(x) = \frac{x-2}{3x-5}$. **202.** $F(x) = 3(x^2-3)+2, G(x) = (3x+2)^2-3$. **203.** $F(x) = -\frac{x+3}{2x+5}, G(x) = \frac{x-2}{3x-5}$. **204.** $f^{-1}(x) = \ln(2-x)-3$. **205.** $f^{-1}(x) = \log_5 \frac{5x}{3}$. **206.** $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x+1}$. **207.** $f^{-1}(x) = \arcsin \log_4 x, \langle \frac{1}{4}, 4\rangle$. **208.** $f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x}{\log_3 x-1}$. **209.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}\cos(x-3)), \langle 3, 3+4\pi\rangle$. **210.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(2-\mathrm{e}^x)$. **211.** $f^{-1}(x) = 2+\mathrm{e}^{2\log_2 \frac{x}{2}}$. **212.** $f^{-1}(x) = \operatorname{tg} \log_2 \frac{x}{8}, (2^{3-\frac{\pi}{2}}, 2^{3+\frac{\pi}{2}})$. **213.** $f^{-1}(x) = \ln\sqrt{x^2-2x-2}$. **214.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(2^x-2^{-x})$. **215.** $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{4x-1}{x+1}, (-\infty,-1)\cup(\frac{1}{4},\infty)$. **216.** $f^{-1}(x) = \frac{x}{(1-2x)^3}$. **217.** $f^{-1}(x) = 2^{\frac{1}{x}}, (0,\infty)$. **220.** $\frac{p}{a}$. **222.** Ano. **223.** $f(x) = x, g(x) = \frac{-x}{2}$. **224.** $f(x) = x^3, g(x) = -x$.

2. Posloupnosti

236. Je ohraničená. $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{n}{n+2}a_n$. **237.** Je zdola ohraničená. $a_1 = \log 2, a_{n+1} = a_n + \log 2$. **239.** $a_n = 1+2(-1)^{n+1}$. **240.** $a_n = \frac{n+1}{n}$. **241.** $a_n = \frac{1}{n^2}$. Od 32. členu. **244.** $\frac{6}{7}$. **245.** $-\frac{7}{2}$. **246.** ∞. **247.** 0. **248.** ∞. **249.** 2. **250.** $\frac{2}{3}$. **251.** $\frac{1}{16}$. **252.** 1. **253.** 1. **254.** 0. **255.** 0. **256.** 0. **257.** $-\frac{1}{2}$. **258.** 0. **259.** 1. **260.** $\sqrt{\mathrm{e}}$. **261.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **262.** e^{-6}. **263.** e^{-5}. **264.** $-\frac{1}{2}$. **265.** -1. **266.** $\frac{1}{3}$. **267.** $\frac{a+b}{2}$. **268.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **269.** $a^2\sqrt{3}$. **270.** $2\pi r^2$, $4r^2$.

3. Limita funkce a spojitost

294. -12. **295.** $\frac{1}{4}$. **296.** -1. **297.** $-\frac{2}{3}$. **298.** $\frac{5}{3}$. **299.** 2. **300.** $\frac{7}{3}$. **301.** 2. **302.** -2. **303.** 1. **304.** $\sqrt{2}$. **305.** $6\sqrt{2}$. **306.** 3. **307.** $\frac{1}{2}$. **308.** $\frac{1}{2}$. **309.** $\frac{1}{2}$. **310.** 2. **311.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **312.** 8. **313.** $\frac{1}{12}$. **314.** 0. **315.** 1. **316.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **317.** $\ln 7$. **318.** e^5. **319.** $\frac{1}{\ln 9}$. **320.** $8\ln 2$. **321.** e^2. **322.** $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. **323.** 0. **324.** $1, -1$. **325.** Neexistuje. Neexistuje. **326.** $\infty, -\infty$. **327.** $\infty, -\infty$. **328.** $\infty, -\infty$. **329.** 1,-1. **330.** $-2, 2$. **231.** $0, 1$. **332.** $\infty, 0$. **333.** $0, \frac{3}{2}$. **334.** ∞. **335.** Neexistuje. **336.** Neexistuje. **337.** ∞. **338.** Neexistuje. **339.** Neexistuje. **340.** $\frac{2}{3}$. **341.** Neexistuje. **342.** Neexistuje. **343.** Neexistuje. **344.** $f(-3) = -6$. **345.** $f(-1) = 2$. **346.** $f(0) = 0$. **347.** $f(0) = 10$. **348.** $f(1) = 7\ln 7$. **349.** $f(1) = -1$. **348.** $f(1) = 0$. **349.** $f(1) = -1$. **350.** $f(1) = 0$. **351.** $f(1) = -5$. **352.** $f(0) = -2$. **353.** $f(0) = \frac{1}{2}$.

4. Derivace funkce

388. Ne. **391.** $12x^2(2x^3+3)$. **392.** $12x(x^2-3)(x^4-6x^2+7)^2$. **393.** $2(3-4x-12x^2)$. **394.** $\frac{2(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$. **395.** $\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$. **396.** $1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$. **397.** $\frac{1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}$. **398.** $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$. **399.** $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$. **400.** $\frac{1}{24\sqrt{x}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}$. **401.** $\frac{-(x^6+4x^5-4x^3-6x^2-8x)}{(x^4+2)^2}$. **402.** $\frac{-1}{2(1+\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}}$. **403.** $\frac{2}{(x+\sqrt{1+x^2})^2\sqrt{1+x^2}}$. **404.** $\frac{-3x^2}{2\sqrt[4]{(1-x^6)^3(1+x^3)^2}}$. **405.** $3x^2\sin 2x^3$. **406.** $\operatorname{tg}^2 x$. **407.** $\frac{1}{\cos^4 x}$. **408.** $\operatorname{tg}^3 x$. **409.** $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2\sin 2x}}$. **410.** $\frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}$. **411.** $\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$. **412.** $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$. **413.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **414.** $\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$. **415.** $\frac{1}{x\ln x\cdot ln(\ln x)}$. **416.** $\frac{-\operatorname{tg}x}{3\sqrt[3]{(\ln\cos x)^2}}$. **417.** $\frac{8\ln^3(\operatorname{tg}\ x)}{\sin 2x}$. **418.** $\frac{-\mathrm{e}^x\operatorname{tg}\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$. **419.** $\frac{-1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **420.** $\frac{2}{1+x^2}$. **421.** $\frac{7}{49-x^2}$. **422.** $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. **423.** $-\frac{x^2+2x(1+x^2)\operatorname{arccotg}\ x}{x^4(1+x^2)}$. **424.** $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}((\arcsin x)^2-1)}$.

425. $\frac{\ln x-2}{x^2}\cdot\sin\left(\frac{2(1-\ln x)}{x}\right)$. **426.** $\frac{2}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. **427.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **428.** $\frac{-1}{2\sqrt{(2-x)(x-3)}}$. **429.** $10^{3x}\cdot 3\ln 10$. **430.** $2^{3^x}\cdot 3^x\cdot\ln 2\cdot\ln 3$. **431.** $\frac{5^{\sqrt{x}}\ln 5}{2\sqrt{x}}$. **432.** $\frac{3^{\operatorname{tg} x}\ln 3}{\cos^2 x}$. **433.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^{\sin x}}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})$. **434.** $x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{(\ln x+2)\sqrt{x}}{2x}$. **435.** $\frac{x^x}{\cos^2 x^x}(\ln x+1)$. **436.** $(\ln x)^x(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x})$. **437.** $(\operatorname{arctg} x)^x(\ln\operatorname{arctg} x+\frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x})$. **438.** $\mathrm{e}^x x^{\mathrm{e}x}(\ln x+\frac{1}{x})$. **439.** $(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}$. **440.** $2^n\mathrm{e}^{2x+3}$. **441.** $(n+x)\mathrm{e}^x$. **442.** $(-1)^n(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}}$, $n\geq 2$. **443.** $(-1)^n n!((x-2)^{-(n+1)}+(x-1)^{-(n+1)})$. **444.** $\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. **445.** $(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{\ln a\cdot x^n}$. **446.** $2^n x\cos(2x+\frac{n\pi}{2})+n2^{n-1}\sin(2x+\frac{n\pi}{2})$. **447.** $\frac{(-1)^{n-1}5n!}{(x+2)^{n+1}}$. **448.** $\frac{(-1)^n n!7^n}{(7x+2)^{n+1}}$. **449.** $\frac{(-1)^n(2n-1)!!2^n}{2^n(2x-5)^n\sqrt{2x-5}}$. **450.** $\frac{(n-1)!}{x}$. **451.** $32\mathrm{e}^{2x}(2x^4+24x^3+90x^2+120x+45)$. **452.** $\frac{6}{x}$. **453.** $-\mathrm{e}^{4x}(3116\sin 3x+237\cos 3x)$. **454.** $4\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)$. **455.** $y=2x\pm 1$. **456.** $y=x-3\mathrm{e}^{-2}$. **457.** $[-2,-4]$. **458.** $[1,\frac{1}{2}],[-3,\frac{3}{2}]$. **459.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

5. Diferenciál a Taylorův polynom

471. $\frac{6x^2\sin x-2x^3\cos x}{\sin^2 x}dx$. **472.** $\frac{3dx}{1+9x^2}$. **473.** $7^x(2x+x^2\ln 7)dx$. **474.** $\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. **475.** $\frac{dx}{2x\sqrt{4x-1}}$. **476.** $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **477.** $\frac{dx}{\cos x}$. **478.** $\frac{\ln 5\cdot 5^{\ln\operatorname{tg} x}}{\sin x\cos x}dx$. **479.** $-0,15$. **480.** $-0,01\overline{3}$. **481.** $1,007$. **482.** $1,043$. **483.** $0,2$. **484.** $1,035906$. **485.** $0,835398$. **486.** $\mathrm{e}^x(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4})h^4$. **487.** $-4\sin 2x\cdot h^3$. **488.** $(10\cos x-x\sin x)h^{10}$. **489.** $-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)h^{10}$. **490.** $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}$. **491.** $x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}$. **492.** $x-\frac{x^3}{3}$. **493.** $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}$. **494.** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$. **495.** $\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}$. **496.** $1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{4}{81}(x-1)^3$. **497.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\frac{1}{32}(x-2)^4$. **498.** $(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3$. **499.** $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$. **500.** $999805+29998(x-100)+300(x-100)^2+(x-100)^3$. **501.** $5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$. **502.** $\frac{-1}{12}$. **503.** $\frac{1}{3}$. **504.** $\frac{19}{90}$. **505.** $\frac{1}{2}$.

6. L'Hospitalovo pravidlo

527. $\frac{1}{2}$. **528.** 0. **529.** $\frac{3}{70}$. **530.** $\ln\frac{2}{3}$. **531.** $\frac{1}{3}$. **532.** -2. **533.** 2. **534.** -2. **535.** $\frac{1}{2}$. **536.** -1. **537.** 4. **538.** 2. **539.** 0. **540.** $\frac{1}{12}$. **541.** 0. **542.** ∞. **543.** 0. **544.** 0. **545.** 1. **546.** 1. **547.** $\frac{3}{5}$. **548.** 1. **549.** 0. **550.** $\frac{2}{\pi}$. **551.** 0. **552.** 1. **553.** 0. **554.** 1. **555.** $\frac{1}{2}$. **556.** $\frac{1}{3}$. **557.** 0. **558.** $\frac{1}{6}$. **559.** $\frac{1}{5}$. **560.** $-\frac{1}{2}$. **561.** $-\frac{1}{2}$. **562.** 0. **563.** $\frac{1}{2}$. **564.** $\frac{1}{6}$. **565.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **566.** 1. **567.** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$. **568.** 0. **569.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **570.** e^6. **571.** $\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$. **572.** e^2. **573.** 1. **574.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **575.** e^3. **576.** 1. **577.** Ne. 1. **578.** Ne. 0. **579.** Ne. 1. **580.** Ne. Neexistuje. **581.** -1. **582.** $-\frac{1}{2}$. **583.** 1.

7. Průběh funkce

600. Minimum v bodě $x=2$, maximum v bodě $x=-\frac{3}{2}$. **601.** Neexistují. **602.** Maximum v bodě $x=1$. **603.** Minimum v bodě $x=\frac{7}{5}$. **604.** Minimum v bodě $x=\sqrt[5]{24}$. **605.** Minimum v bodě $x=e$. **606.** Minimum v bodech $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, maximum v bodech $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$. **607.** Minimum v bodech $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$, maximum v bodech $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$. **608.** Maximum v bodě $x=3$. **609.** Minimum v bodě $x=2$, maximum v bodě $x=-3$. **610.** Maximum v bodě $x=\frac{1}{8}$. **611.** Maximum v bodě $x=1$. **612.** Funkce klesá na intervalech $(-\infty,0),(\frac{2}{\ln 2},\infty)$ a roste na intervalu

$(0, \frac{2}{\ln 2})$. **613.** Funkce klesá na intervalech $(-\infty, -1), (1, \infty)$ a roste na intervalu $(-1, 1)$. **614.** Funkce je neklesající na R. **615.** Funkce klesá na intervalu $(-\infty, 0)$ a roste na intervalu $(0, \infty)$. **616.** Funkce klesá na intervalu $(0, \frac{1}{2})$ a roste na intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$. **617.** Funkce klesá na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a roste na intervalu $(-\frac{1}{3}, \infty)$. **618.** Funkce klesá na intervalech $(-\infty, 0), (0, \frac{2}{3}), (2, \infty)$ a roste na intervalech $(\frac{2}{3}, 1), (1, 2)$. **619.** Funkce klesá na intervalech $(-\sqrt{3}, -1), (-1, 1), (1, \sqrt{3})$ a roste na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$. **620.** Absolutní minimum $f(0) = f(1) = 0$. Absolutní maximum neexistuje. **621.** Absolutní minimum $f(2) = 2 - 2\ln 2$. Absolutní maximum $f(1) = 1$. **622.** Absolutní minimum $f(e^{-1}) \approx 0,7$. Absolutní maximum neexistuje. **623.** Absolutní minimum $f(-2) = -151$. Absolutní maximum $f(1) = 2$. **624.** Absolutní minimum $f(2) = -15$. Absolutní maximum $f(-1) = 12$. **625.** Absolutní minimum $f(0) = 4 - e$. Absolutní maximum $f(1 - \ln 2) = \ln 4$. **626.** Absolutní minimum $f(1) = 0$. Absolutní maximum $f(0) = \frac{\pi}{4}$. **627.** Absolutní minimum $f(-\frac{7}{2}) = -\frac{7}{2} + \ln 15$. Absolutní maximum $f(3) = 3 + \ln 2$. **628.** Funkce je konvexní na $(-\infty, -1), (1, \infty)$, konkávní na $(-1, 1)$ a má inflexní body $x = -1, x = 1$. **629.** Funkce je konvexní na $(1, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 0), (0, 1)$ a má inflexní bod $x = 1$. **630.** Funkce je konvexní na $(0, 1)$, konkávní na $(-\infty, 0), (1, \infty)$ a má inflexní bod $x = 1$. **631.** Funkce je konvexní na $(-\infty, -6), (0, 6)$, konkávní na $(-6, 0), (6, \infty)$ a má inflexní body $x = -6, x = 0, x = 6$. **632.** Funkce je konvexní na $(7, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 7)$ a má inflexní bod $x = 7$. **633.** Funkce je konvexní na $(-\infty, \frac{1}{2})$, konkávní na $(\frac{1}{2}, \infty)$ a má inflexní bod $x = \frac{1}{2}$. **634.** Funkce má inflexní body $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **635.** Funkce má inflexní body $x = -9, x = 0, x = 9$. **636.** Funkce má inflexní bod $x = -2 + e^{\frac{8}{3}}$. **637.** Funkce má inflexní bod $x = -4$. **638.** Asymptoty bez směrnice nemá, asymptoty se směrnicí jsou $y = x$ v ∞ a $y = x + 2\pi$ v $-\infty$. **639.** Asymptota bez směrnice $x = 0$, asymptota se směrnicí $y = x$ v ∞. **640.** Asymptota bez směrnice $x = -\frac{1}{e}$, asymptota se směrnicí $y = x + \frac{1}{e}$ v ∞. **641.** Asymptoty bez směrnice nemá, asymptoty se směrnicí jsou $y = 5x + \frac{\pi}{2}$ v ∞ a $y = 5x - \frac{\pi}{2}$ v $-\infty$. **642.** Asymptota bez směrnice $x = 2$, asymptoty se směrnicí jsou $y = 3x$ v ∞ i $-\infty$. **643.** Asymptoty bez směrnice jsou $x = -2, x = 2$, asymptoty se směrnicí jsou $y = x$ v ∞ i $-\infty$. **644.** Asymptota bez směrnice $x = 0$, asymptoty se směrnicí $y = 2x$ v ∞ i $-\infty$. **645.** Asymptoty bez směrnice nemá, asymptoty se směrnicí $y = 0$ v ∞ i $-\infty$. **646.** Asymptoty bez směrnice nemá, asymptoty se směrnicí jsou $y = x + \frac{4}{3}$ v ∞ i $-\infty$. **647.** Asymptoty bez směrnice $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, asymptoty se směrnicí jsou $y = \frac{1}{2}$ v ∞ i $-\infty$. **648.** Funkce je lichá, nulové body $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$, minimum v bodě $x = -1$, maximum v bodě $x = 1$, klesající na $(-\infty, -1), (1, \infty)$, rostoucí na $(-1, 1)$, v $x = 0$ inflexní bod, konvexní na $(-\infty, 0)$, konkávní na $(0, \infty)$. Asymptoty nemá. **649.** Funkce má nulové body $0, 1$, maximum v bodě $x = \frac{1}{4}$, klesající na $(-\infty, \frac{1}{4})$, rostoucí na $(\frac{1}{4}, \infty)$, v $x = 1, x = -\frac{1}{4}$ inflexní body, konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{4}), (1, \infty)$, konkávní na $(-\frac{1}{4}, 1)$. Asymptoty nemá. **650.** Funkce je sudá, nemá nulové body, maximum v bodě $x = 0$, klesající na $(0, 1), (1, \infty)$, rostoucí na $(-\infty, -1), (-1, 0)$, inflexní body nemá, konvexní na $(-\infty, -1), (1, \infty)$, konkávní na $(-1, 1)$. Asymptoty $x = -1, x = 1, y = 0$. **651.** Funkce je lichá, nulový bod $x = 0$, maximum v bodě $x = 1$, minimum v bodě

$x = -1$, klesající na $(-\infty,-1),(1,\infty)$, rostoucí na $(-1,1)$, inflexní body $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$, konvexní na $(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},\infty)$, konkávní na $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(0,\sqrt{3})$. Asymptota $y = 0$. **652.** Funkce je sudá, nezáporná, nulový bod $x = 0$, minimum v bodě $x = 0$, klesající na $(-\infty,0)$, rostoucí na $(0,\infty)$, inflexní body $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$, $x = 0, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, konvexní na $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$, konkávní na $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty)$. Asymptota $y = 1$. **653.** Funkce má definiční obor $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, je lichá, v nule nespojitá, nulové body nemá, minimum v bodě $x = 1$, maximum v bodě $x = -1$, klesající na $(-1,0),(0,1)$, rostoucí na $(-\infty,-1),(1,\infty)$, inflexní body nemá, konvexní na $(0,\infty)$, konkávní na $(-\infty,0)$. Asymptoty $x = 0, y = x$. **654.** Funkce má definiční obor $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, není ani sudá, ani lichá, v nule nespojitá, nulový bod $x = 1$, minimum v bodě $x = -\sqrt[3]{2}$, klesající na $(-\infty,-\sqrt[3]{2}),(0,\infty)$, rostoucí na $(-\sqrt[3]{2},0)$, inflexní body nemá, konvexní na Df. Asymptoty $x = 0, y = -x$. **655.** Funkce má definiční obor $R - \{-1,1\}$, je lichá, v bodech $x = -1, x = 1$ nespojitá, nulový bod $x = 0$, minimum v bodě $x = \sqrt{2+\sqrt{5}}$, maximum v bodě $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$, klesající na intervalech $(-\sqrt{2+\sqrt{5}},-1),(-1,1)$, $(1,\sqrt{2+\sqrt{5}})$, rostoucí na $(-\infty,-\sqrt{2+\sqrt{5}}),(\sqrt{2+\sqrt{5}},\infty)$, inflexní bod $x = 0$, konvexní na $(-1,0),(1,\infty)$, konkávní na $(-\infty,-1),(0,1)$. Asymptoty $x = -1, x = 1, y = x$. **656.** Funkce má definiční obor R, není ani sudá, ani lichá, nulový bod $x = 1$, extrémy nemá, klesající na R, inflexní bod $x = 0$, Asymptota $y = -x$. **657.** Funkce má definiční obor R, není ani sudá, ani lichá, nulové body $x = -1, x = 0$, minimum v bodě $x = 0$, maximum v bodě $x = -\frac{2}{3}$, klesající na $(-\frac{2}{3},0)$, rostoucí na $(-\infty,-\frac{2}{3}),(0,\infty)$, inflexní bod $x = -1$, konvexní na $(-\infty,-1)$, konkávní na $(-1,0),(0,\infty)$. Asymptota $y = x + \frac{1}{3}$. **658.** Funkce má definiční obor $(0,\infty)$, není ani sudá, ani lichá, nulový bod $x = 1$, maximum v bodě $x = \mathrm{e}^2$, klesající na (e^2,∞), rostoucí na $(0,\mathrm{e}^2)$, inflexní bod $x = \mathrm{e}^{\frac{8}{3}}$, konvexní na $(\mathrm{e}^{\frac{8}{3}},\infty)$, konkávní na $(0,\mathrm{e}^{\frac{8}{3}})$. Asymptoty $x = 0, y = 0$. **659.** Funkce má definiční obor $(-1,1)$, je lichá, nulový bod $x = 0$, extrémy nemá, rostoucí na $(-1,1)$, inflexní bod $x = 0$, konvexní na $(0,1)$, konkávní na $(-1,0)$. Asymptoty $x = -1, x = 1$. **660.** Funkce má definiční obor R, je lichá, nulový bod $x = 0$, maximum v bodě $x = 1$, minimum v $x = -1$, v bodech $x = -1, x = 1$ neexistuje derivace, klesající na $(-\infty,-1),(-1,\infty)$, rostoucí na $(-1,1)$, inflexní bod $x = 0$, konvexní na $(0,1),(1,\infty)$, konkávní na $(-\infty,-1),(-1,0)$. Asymptota $y = 0$. **661.** Funkce má definiční obor R, není ani sudá, ani lichá, nulové body $x = -1, x = \frac{19}{8}$, maximum v bodě $x = -1$, minimum v $x = 0$, klesající na $(-1,0)$, rostoucí na $(-\infty,-1),(0,\infty)$, inflexní bod $x = 0$, konvexní na R. Asymptoty nemá. **662.** Funkce má definiční obor R, je sudá a nezáporná, nulový bod $x = 0$, minimum v bodě $x = 0$, klesající na $(-\infty,0)$, rostoucí na $(0,\infty)$, konvexní na R. Asymptoty $y = -\frac{1}{2}\pi x - 1, y = \frac{1}{2}\pi x - 1$. **663.** Funkce má definiční obor $(-\infty,1\rangle\cup(2,\infty)$, není ani sudá, ani lichá, nulový bod $x = 0$, maximum v bodě $x = \frac{7-\sqrt{17}}{4}$, minimum v bodě $x = \frac{7+\sqrt{17}}{4}$, klesající na $(\frac{7-\sqrt{17}}{4},1),(2,\frac{7+\sqrt{17}}{4})$, rostoucí na $(-\infty,\frac{7-\sqrt{17}}{4}),(\frac{7+\sqrt{17}}{4},\infty)$, konvexní na $(2,\infty)$, konkávní na $(-\infty,1)$. Asymptota $y = x + \frac{1}{2}$.. **664.** $M = [\frac{3}{2},0]$. **665.** $4 \times 4 \times 2\ m$. **666.** $(4^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. **667.** 12×15. **668.** 10,29 km, 57,77 km/h.

8. Křivky a funkce dané parametricky

677. $y' = -1, t \neq 1$. **678.** $y' = \frac{3t^2+t}{2t+4}$. **679.** $y' = -\mathrm{tg}\ t, t \neq \frac{\pi}{2}$. **680.** $y' = \frac{\mathrm{tg}\ t(\sin t+\cos t)}{\cos t-\sin t}, t \neq \frac{\pi}{4}$. **681.** $y' = 2t\cos 2t, y'' = 2t(\cos 2t - 2t\sin 2t), y''' = 2t((1-4t^2)\cos 2t - 6t\sin 2t), t > 0$. **682.** $y' = \frac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}, y'' = \frac{-2\mathrm{e}^t}{(\sin t+\cos t)^3}, y''' = \frac{4\mathrm{e}^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}, t \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$. **683.** $x - 2y - 1 = 0, 2x + y - 2 = 0$. **684.** $x + y - \frac{a}{2}(3\pi+4) = 0, x + y - \frac{3\pi a}{2} = 0$. **685.** $A = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}]$. **686.** $A = [-4, 1], B = [4, 1]$. **687.** $a = 3, b = 1$. **688.** $y = 2x - 2e$. **689.** $x + y + a = 0$. **690.** Funkce je definovaná a spojitá na $(-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)$. Graf je symetrický podle bodu $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Funkce je všude klesající, na $(-\infty, -1)$ je konkávní a na $\langle 0, \infty)$ konvexní. Asymptota $y = \frac{1}{2}$. **691.** Pro $t \in (-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ je funkce definovaná a spojitá na $(-\infty, \sqrt[3]{4})$. Nulový bod $[0, 0]$. Funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a roste na $(0, \sqrt[3]{4})$, minimum $y = 0$ pro $x = 0$. Funkce je konvexní. Asymptota $x + y + 1 = 0$. Pro $t \in (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty)$ je funkce definovaná a spojitá na $(0, \sqrt[3]{4})$. Funkce klesá na $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ a roste na $(0, \sqrt[3]{2})$, maximum $y = \sqrt[3]{4}$ pro $x = \sqrt[3]{2}$. Funkce je konkávní. Pro $t \in (-\infty, -1)$ je funkce definovaná a spojitá na $(0, \infty)$. Funkce je klesající a konvexní. Asymptota $x + y + 1 = 0$. Křivka je symetrická podle přímky $y = x$. (Descartův list.) **692.** Pro $t \in (0, \mathrm{e})$ je funkce definovaná a spojitá na $(-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}})$. Nulový bod $[0, 0]$. Funkce klesá na $(-\infty, -e)$ a roste na $(-\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}})$. Funkce je konvexní na $(-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}, \frac{1}{\mathrm{e}})$, konkávní na $(-\infty, -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}})$, inflexní bod $[-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}]$. Asymptota $y = 0$. Pro $t \in (e, \infty)$ je funkce definovaná na $(0, \frac{1}{\mathrm{e}})$. Je spojitá a klesající. Na $(0, \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}})$ je konvexní, na $(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, \frac{1}{\mathrm{e}})$ konkávní. Inflexní bod $[\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, \sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}]$. Asymptota $x = 0$. Křivka je symetrická podle přímky $y = -x$. **693.** Pro $t \in (-\infty, -1)$ je funkce definovaná a spojitá na $(-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0)$. Je spojitá a klesající. Konvexní na $(-\frac{1}{\mathrm{e}}, -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}})$, konkávní na $(-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, 0)$, inflexní bod $[-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}]$. Asymptota $x = 0$. Pro $t \in \langle -1, \infty)$ je funkce definovaná a spojitá na $\langle -\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$. Na $(-\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$ rostoucí, na (e, ∞) klesající. Maximum $y = \frac{1}{\mathrm{e}}$ pro $x = \mathrm{e}$. Na $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}})$ je konkávní, na $(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}, \infty)$ konvexní. Inflexní bod $[\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}]$. Asymptota $y = 0$. Křivka je symetrická podle přímky $y = -x$. **694.** Křivka je grafem jediné funkce definované na $\langle 0, 1\rangle$. Graf je symetrický podle $y = x$. Je spojitá a klesající a konvexní. Nulový bod $[1, 0]$. **695.** Pro $t \in (-\infty, 1)$ je funkce definovaná a spojitá na $(-\infty, 1)$. Nulové body $A = [-3 - 2\sqrt{3}, 0], B = [0, 0]$. Je klesající na $(-\infty, -3)$, rostoucí na $(-3, 1)$, minimum $y = -2$ pro $x = -3$. Je konvexní. Pro $t \in (1, \infty)$ je funkce definovaná a spojitá na $(-\infty, 1)$. Nulový bod $C = [-3 + 3\sqrt{3}, 0]$. Je rostoucí a konvexní. V bodě $[1, 2]$ nemá tečnu.

III. Integrální počet funkcí jedné proměnné

1. Neurčitý integrál

720. $-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{\sqrt[4]{x}} + x + \frac{2}{x} + c$. **721.** $\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + c$. **722.** $\frac{12}{25}\sqrt[12]{x^{25}} - \frac{4}{21}\sqrt[4]{x^{21}} + c$. **723.** $\arcsin x + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c$. **724.** $3\sqrt[3]{x}(\frac{x}{4} - 1) + c$. **725.** $3\mathrm{tg}x + 2\mathrm{cotg}x + c$. **726.** $\frac{1}{2}\mathrm{tg}x + c$. **727.** $-\frac{1}{6}\ln|3\mathrm{e}^{2x} - 1| + c$. **728.** $-\frac{1}{3}\ln|1 + 3\cos x| + c$. **729.** $\frac{2^x 3^{-x} - 3^x 2^{-x}}{\ln 2 - ln 3} - 2x + c$. **730.** $\mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}\ x + c$. **731.** $\ln|\arcsin x| + c$. **732.** $\frac{1}{30}(3x - 11)^{10} + c$. **733.**

$\frac{1}{4}(x^2+2)^4+c$. **734.** $-\frac{1}{21}(1-x)^{21}+\frac{3}{22}(1-x)^{22}-\frac{3}{23}(1-x)^{23}+\frac{1}{24}(1-x)^{24}+c$. **735.** $-\frac{1}{6}(2x+3)^3+c$. **736.** $\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{3x}{2}+c$. **737.** $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$. **738.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+c$. **739.** $\frac{2}{\sqrt{19}}\mathrm{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{19}}+c$. **740.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x-2}{2\sqrt{2}}+c$. **741.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$. **742.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+c$. **743.** $\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arctg}\,x+c$. **744.** $-\frac{1}{10}(x^2+4)^5+c$. **745.** $\frac{1}{2\sqrt{30}}\mathrm{arctg}\left(x^2\sqrt{\frac{5}{6}}\right)+c$. **746.** $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,x^3+c$. **747.** $-\frac{1}{4}(1+x^2)^2+c$. **748.** $-\frac{2}{9}\sqrt{(7-3x)^3}+c$. **749.** $\frac{4}{9}\sqrt[8]{(2x+5)^9}+c$. **750.** $\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}+c$. **751.** $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+c$. **752.** $-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{(2x+3)^3}}+c$. **753.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+c$. **754.** $-\frac{1}{5}\sqrt{4-5x^2}+c$. **755.** $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+c$. **756.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{3}+c$. **757.** $\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+c$. **758.** $\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6-4}|+c$. **759.** $-\frac{1}{3}\sqrt{8-x^6}+c$. **760.** $x-\log_3(3^x+1)+c$. **761.** $-\frac{2}{9}\sqrt{(2-3e^x)^3}+c$. **762.** $-\frac{2}{\ln 2}\ln(2^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{1+2^{-x}})+c$. **763.** $\frac{1}{2}(x^2+2)(\ln(x^2+2)-1)+c$. **764.** $\frac{1}{5}\ln^5 x+c$. **765.** $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}-4\sqrt{\ln x}+c$. **766.** $\sin(\ln x)+c$. **767.** $\ln\sqrt{|\sin(2x+1)|}+c$. **768.** $-\frac{1}{8}\cos(8x-3)+c$. **769.** $\ln|\sin e^x|+c$. **770.** $2\ln|\sin\sqrt{x}|+c$. **771.** $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2x+c$. **772.** $\frac{1}{6}\ln|2+3\sin 2x|+c$. **773.** $\frac{-1}{\sin x}+c$. **774.** $-2\sqrt{2+\cos x}+c$. **775.** $\frac{2}{3}\mathrm{tg}(x^3+1)+c$. **776.** $-\frac{1}{2}\cos(x^2+4)+c$. **777.** $\frac{1}{2}\ln|\cos(1-x^2)|+c$. **778.** $\frac{\sin^4 x}{4}+c$. **779.** $\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c$. **780.** $3\sqrt[3]{\sin x}+c$. **781.** $2\sqrt{\mathrm{tg}\,x-1}+c$. **782.** $\ln(\sin^2 x+3)+c$. **783.** $\mathrm{tg}\frac{x}{2}+c$. **784.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c$. **785.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+c$. **786.** $\ln|\mathrm{tg}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi)|+c$. **787.** $\ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}|+c$. **788.** $\frac{1}{3}\ln|\mathrm{tg}\frac{x^3}{2}|+c$. **789.** $\frac{-1}{\ln\sin x}+c$. **790.** $\ln|\mathrm{arctg}x|+c$. **791.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2x+c$. **792.** $-\frac{2}{3}\sqrt{\arccos^3 x}+c$. **793.** $\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arccos^2 x+c$. **794.** $\sin x-x\cos x+c$. **795.** $\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)+c$. **796.** $\frac{1}{2}x^2(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2})+c$. **797.** $\frac{1}{2}(x^2+3)(\ln(x^2+3)-1)+c$. **798.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{arctg}x-\frac{x}{2}+c$. **799.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{arccotg}^2x+x\mathrm{arccotg}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$. **800.** $-\frac{1}{4}(2x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+c$. **801.** $\frac{1}{3}x^3\mathrm{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+c$. **802.** $(x^2+6x+\frac{5}{2})\frac{\sin 2x}{2}+(x+3)\frac{\cos 2x}{2}+c$. **803.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$. **804.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+c$. **805.** $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$. **806.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$. **807.** $\frac{1}{2}(x+\sqrt{1-x^2})e^{\arcsin x}+c$. **808.** $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+c$. **809.** $2\sqrt{x}(\ln x-2)+c$. **810.** $(\ln x)(\ln\ln x-1)+c$. **811.** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+c$. **812.** $\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\mathrm{tg}x+c$. **813.** $x\mathrm{tg}x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+c$. **814.** $x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-e^{-x}\mathrm{arctg}e^x+c$. **815.** $\frac{(x+1)e^{\mathrm{arctg}x}}{2\sqrt{x^2+1}}+c$. **816.** $\frac{1}{11}\ln\left|\frac{2x-3}{x+4}\right|+c$. **817.** $\frac{2}{3}\ln|3x-2|+3\ln|x-3|+c$. **818.** $5x+\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}\sqrt[6]{(x-5)^{161}}}{\sqrt[3]{(x-2)^7}}\right|+c$. **819.** $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+c$. **820.** $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{2}{3}\ln|3x+2|+\frac{1}{3}\ln|3x-1|-\ln|x-1|+c$. **821.** $\frac{2}{9x-12}+\ln|3x-4|+c$. **822.** $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+c$. **823.** $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c$. **824.** $x+\ln|x^2+x+2|-\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+c$. **825.** $x+\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}+c$. **826.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$. **827.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+c$. **828.** $\frac{x-4}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$. **829.** $-\frac{x+2}{x^2+3x+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+c$. **830.** $3(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-\sqrt[3]{x}+\ln|1+\sqrt[3]{x}|)+c$. **831.** $6(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x}+\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x})+c$. **832.** $2\sqrt{1-x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x-1}}\right|+c$. **833.** $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+c$. **834.** $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x-4}}{2}+c$. **835.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{6}+\sqrt{3x^2-5x+8}|+c$. **836.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x+1}{4}+c$. **837.**

$3\sqrt{x^2-2x+2}+c$. **838.** $\frac{x+2}{2}\sqrt{3+4x+x^2}-\frac{1}{2}\ln|x+2+\sqrt{3+4x+x^2}|+c$. **839.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+c$. **840.** $\sqrt{(2x-8)^3}(\frac{x-4}{5}+\frac{4}{3})+c$.

841. $\frac{3t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+c, t=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$. **842.** $\mathrm{tg}x+\frac{1}{\cos x}+c$. **843.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+c$. **844.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\mathrm{tg}(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2})|+c$. **845.** $\ln|\sin x+\cos x|+c$. **846.** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\frac{\mathrm{tg}x}{2})+c$. **847.** $\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+c$. **848.** $\frac{1}{2}(1+\cos x)^2+c$. **849.** $\ln|\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})|+c$. **850.** $-\frac{1}{6}\sin^6 x+c$. **851.** $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c$. **852.** $x+\frac{1}{7}\mathrm{tg}^7x-\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3x-\mathrm{tg}x+c$. **853.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln(\mathrm{e}^{2x}+4)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{e}^x}{2}+c$. **854.** $-\ln(\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1})-\arcsin\mathrm{e}^x+c$. **855.** $-\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}+4\mathrm{e}^{-x}-1}-2\ln(2+\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}+4\mathrm{e}^{-x}}-1)+\arcsin\frac{2-\mathrm{e}^x}{\sqrt{5}}+c$. **856.** $-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)+\frac{1}{8}\ln|x^2-1|+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}x^2+c$. **857.** $2\sqrt{x+1}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right|+c$. **858.** x^x+c. **859.** $\frac{1}{3}x^3\ln\sqrt{1-x}-\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{92}-\frac{x}{6}+c$. **860.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5+4\mathrm{e}^x}-\sqrt{5}}{\sqrt{5+4\mathrm{e}^x}+\sqrt{5}}+c$. **861.** $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\mathrm{e}^x)^3}+c$. **862.** $\mathrm{e}^x\mathrm{tg}\frac{x}{2}+c$. **863.** $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{\arcsin x}{x}+c$. **864.** $-\frac{1}{3x^3}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+\frac{1}{6}\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{6x^2}+c$. **865.** $-\frac{x^3}{12}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}(x^2+1)^2\mathrm{arctg}x+c$.

2. Riemannův určitý integrál

877. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **878.** $\frac{35}{15}-32\ln 3$. **879.** $\frac{1}{4}$. **880.** $\ln\frac{32}{27}$. **881.** 12. **882.** $\frac{\mathrm{e}^5}{5}+\frac{3\mathrm{e}^4}{4}+\mathrm{e}^3+\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{49}{20}$. **883.** $\frac{3}{2}$. **884.** $\frac{\pi}{6}$. **885.** $\frac{4}{3}$. **886.** $\frac{4}{3}$. **887.** $\ln 3$. **888.** $\mathrm{arctg}\frac{2}{9}$. **889.** $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. **890.** $\frac{\pi}{6}$. **891.** $2\ln 2-1$. **892.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **893.** $2(2-\mathrm{arctg}2)$. **894.** $\frac{\pi}{2}+1$. **895.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. **896.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **897.** $\frac{1412}{5}$. **898.** $4-\pi$. **899.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **900.** $\ln\frac{4}{3}$. **901.** $1-\frac{2}{\mathrm{e}}$. **902.** $\frac{\mathrm{e}^2+3}{8}$. **903.** $\frac{(2\mathrm{e}^\pi+1)}{5}$. **904.** π. **905.** $\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$. **906.** $\ln\frac{4}{e}$. **907.** 1. **908.** $\frac{\pi}{6}$. **909.** $2-\ln 2$. **910.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. **911.** $\frac{7}{72}$. **912.** 12. **913.** $\frac{(e-1)^5}{5}$. **914.** $2-\frac{3}{4\ln 2}$. **915.** $\frac{256}{693}$. **916.** $\ln\frac{\mathrm{e}+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}{1+\sqrt{2}}$. **917.** $\frac{8}{35}$. **918.** $-\frac{1}{8}(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{8})$. **919.** $\frac{3}{16}\pi$. **920.** $-\frac{\pi}{3}$. **921.** $8\ln 3-15\ln 2$. **922.** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. **923.** $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$. **924.** $\frac{\pi}{16}$. **925.** $\frac{848}{105}$. **926.** $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$. **927.** $2\pi\sqrt{2}$. **928.** $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$. **929.** $\frac{3}{5}(\mathrm{e}^\pi-1)$. **930.** $\frac{29}{270}$. **931.** $4-\pi$. **932.** $\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$. **933.** $\frac{2}{9}\ln\frac{13}{4}$. **934.** 9. **935.** $\frac{9}{4}$. **936.** $15, \frac{125}{3}\pi$. **937.** $\frac{3\pi-2}{6}$. **938.** $\frac{4}{3}$. **939.** $2\pi+\frac{4}{3}$. **940.** $\frac{8}{15}$. **941.** $\frac{8}{15}$. **942.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **943.** $\frac{33}{16}$. **944.** $\frac{3\sqrt{37}}{2}+\frac{1}{4}\ln(6+\sqrt{37})$. **945.** $\ln\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}$. **946.** $\frac{670}{27}$. **947.** $(7-\frac{15}{4}\ln 2)\frac{\pi}{2}$. **948.** $\frac{3\pi}{10}$. **949.** $\frac{64\pi}{3}$. **950.** $\frac{96\pi}{5}$. **951.** $\frac{9}{2}\pi a^3$. **952.** $S=\pi r\sqrt{r^2+v^2}, V=\frac{1}{3}\pi r^2 v$. **953.** $\frac{14\pi}{3}$. **954.** $\frac{196\pi}{27^2}$. **955.** $\frac{32\pi}{5}$. **956.** $\pi\sqrt{2}+\pi\ln(\sqrt{2}+1)$. **957.** $2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. **958.** $\frac{128\pi a^2}{5}$. **959.** $T=[1,\frac{2}{5}]$. **960.** $T=[\frac{83}{77},\frac{9}{154}]$.

3. Nevlastní integrál

967. 1. **968.** $\frac{5}{2}$. **969.** $\frac{37}{6}$. **970.** $\frac{\pi}{8}$. **971.** 1. **972.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **973.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **974.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **975.** $\frac{\pi^3}{12}$. **976.** π. **977.** $\frac{\pi}{2}$. **978.** $6\sqrt[3]{2}$. **979.** $\frac{1}{2}$. **980.** $\frac{8}{3}$. **981.** e^{-1}. **982.** $-\frac{1}{4}$. **983.** $\frac{1}{2}$. **984.** 0. **985.** $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}$. **986.** $\ln 3$. **987.** Ano. **988.** Ano. **989.** Ne. **990.** Ne. **991.** Ano. **992.** Ne. **993.** Ano. **994.** Ne. **995.** Ano. **996.** Ne. **997.** Ano. **998.** Ano. **999.** Ne. **1000.** Ano.