DRUHÁ MOCNINA A ODMOCNINA

Irena Sytařová

Vzdělávací oblast Rámcového vzdělávacího programu Matematika a její aplikace je rozdělena na čtyři tématické okruhy. V tématickém kruhu Číslo a proměnná si žák osvojí aritmetické operace ve třech složkách: dovednost provádět operace, algoritmické porozumění a významové porozumění. Jde tedy o rozvíjení schopnosti pracovat s čísly, pochopení, proč se operace provádí právě tímto způsobem a zejména pak o schopnost využívat operace při řešení aplikačních úloh z reálného života. Učivo týkající se druhé mocniny a druhé odmocniny je z tohoto hlediska velmi důležité a je uvedeno v očekávaných výstupech této vzdělávací oblasti.

Avšak i ostatní vzdělávací oblasti toto učivo potřebují, neboť např. závislost vyjadřující změnu obsahu čtverce na změně délky jeho strany lze zařadit do vzdělávací oblasti Závislosti, vztahy a práce s daty. Výpočty obsahů čtverců a kruhů, povrchů a objemů těles se studují ve vzdělávací oblasti Geometrie v rovině a v prostoru.

Jaké kompetence téma rozvíjí:

Kompetence k učení:

Žák: - využívání vhodných postupů k výpočtům druhých mocnin a odmocnin,
- operuje se znaky a symboly,
- samostatně pozoruje a experimentuje – k vyvození učiva využívá induktivní metody,
- poznává smysl a význam učiva o mocninách a odmocninách.

Kompetence k řešení problémů:

Žák: – vnímá problémové situace, ve kterých se vyskytují mocniny a odmocniny,
- dokáže plánovat řešení, vyhledávat vhodné postupy řešení a řešit problémové situace, ve kterých využívá mocnin a odmocnin,
- ověřuje správnost svých postupů a svého řešení.

Kompetence komunikativní:

Žák: - rozumí symbolům a různým typům záznamů dokáže je používat,
- správně chápe základní pojmy,
- dokáže rozlišovat a správně používat výrazy s mocninami a odmocninami.

Komunikace pracovní:

Žák: - využívá efektivně různých vhodných pomůcek k určení mocnina odmocnin,
- pracuje s tabulkami,
- využívá funkčně kalkulátor,
- pracuje odhady, s čísly zaokrouhlenými.

Druhá mocnina

Pojem druhé mocniny vyvozujeme metodou induktivní, kdy na základě uvedení mnoha příkladů součinu dvou sobě rovných činitelů uvedeme definici:

Druhá mocnina celého (racionálního, reálného) čísla je součin dvou sobě rovných činitelů. Seznámíme žáky se základními pojmy: základ mocniny, mocnitel (exponent).

Dále se postupně uvádí výpočet druhé mocniny součinu čísel a podílu čísel, druhá mocnina čísla záporného a druhé mocniny čísel 10^k, kde k je celé číslo.

Aktivní pochopení učiva můžeme ověřovat pomocí následujících tvrzení:

Ověřte, zda platí následující tvrzení. Pokud neplatí, uveďte tvrzení správná.

1. Druhá mocnina sudého čísla je číslo sudé.
2. Druhá mocnina lichého čísla je číslo liché.
3. Druhá mocnina prvočísla je někdy prvočíslo, někdy číslo složené.
4. Druhá mocnina celého čísla je někdy číslo kladné, někdy číslo záporné.
5. Druhá mocnina opačného čísla k danému číslu je rovna druhé mocnině daného čísla.
6. Jestliže dané číslo zvětšíme desetkrát, zvětší se jeho druhá mocnina stokrát.
7. Druhá mocnina čísla většího než 0 a menšího než 1 je někdy menší než dané číslo, někdy je větší než dané číslo.
8. Pro každé přirození číslo platí, že jeho druhá mocnina je větší než jeho dvojnásobek.

Uveďme některé zajímavé algoritmy k výpočtu druhé mocniny.

1. Algoritmus k výpočtu druhé mocniny dvojciferných čísel se opírá o využití vztahu pro druhou mocninu dvojčlenu:

$(10\,a + b)^2 = 10^2\,a^2 + 2.10.ab + b^2.$

Tato tři čísla tvoří stovky, desítky a jednotky v uváděném algoritmu.

Např. $56^2 = (50 + 6)^2 = 2\,500 + 600 + 36 = 3\,136$, což lze jednoduše zapsat pomocí schématu:

56^2 = 2 5 . .
106 . 6   636
3 136

Postup: Umocníme číslo zapsané na místě desítek: $5^2 = 25$. Do dalšího řádku zapíšeme dvojnásobek desítek 2 . 5 = 10, k tomuto číslu připíšeme jednotky – 106 a jednotkami násobíme: 106 . 6. Součin píšeme o dvě místa doprava pod první řádek. Čísla v obou řádcích sečteme.

Tento algoritmus lze použít i pro víceciferná čísla, např.:

172^2 = 1 . .
27 . 7   189 . .
342 . 2   684   (zapíšeme dvojnásobek prvního dvojčíslí)
29584

2. Výpočet druhé mocniny čísla, které má na místě jednotek 5.

Např. $65^2 = (60 + 5)^2 = 3\,600 + 600 + 25 = 4\,225$

Obecně: $(10\,a + 5) = 10^2 .a^2 + 2\,.10\,.\,a\,.\,5 + 25 = 10^2\,a^2 + 100\,a + 25 =$

$= 10^2\,a^2 + 10^2\,a + 25 = 10^2\,a\,(a + 1) + 25$

Tedy na místo jednotek a desítek zapíšeme 25 a čísla na místě stovek a tisíců získáme tak, že počet desítek původního čísla násobíme číslem jednu větším (6 . 7 = 42).

3. Zajímavé úlohy:

a) Najděte taková přirozená čísla, jejich dekadický zápis obsahuje základ mocniny na místech nejnižších řádů, např. $6^2 = 36$, $25^2 = 125$.

b) Ověřte, zda platí, že součet několika lichých přirozených čísel je roven druhé mocnině přirozeného čísla, např. $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, …
tedy zda platí $1 + 2 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

c) Ověřte, zda platí: $28 + 59 + 61 = 31 + 49 + 68$ a $28^2 + 59^2 + 61^2 = 31^2 + 49^2 + 68^2$
$17 + 59 + 68 = 28 + 37 + 79$ a $17^2 + 59^2 + 68^2 = 28^2 + 37^2 + 79^2$

d) Přesvědčte se, rozdíl druhých mocnin dvou čísel je roven součinu součtu a rozdílu těchto čísel, např.

$$29^2 - 15^2 = (29 + 15)(29 - 15)$$
$$315^2 - 314^2 = (315 + 314)(315 - 314)$$

Tohoto způsobu výpočtu rozdílu druhých mocnin je vhodné využívat k rychlému výpočtu, jestliže rozdíl čísel je např. 1, 10, nebo vhodné jednociferné přirozené číslo.

e) Sledujte, jak se mění obsah čtverce, jestliže délku jeho strany většíme dvakrát, třikrát, obecně *n*- krát.

Druhá odmocnina

Druhá odmocnina z nezáporného čísla a je nezáporné číslo b, pro které platí $b^2 = a$.
Zapisujeme: $\sqrt{a} = b$.
Základní pojmy: odmocnitel, základ odmocniny, odmocnina.

Určování odmocnin provádíme pomocí tabulek, kalkulátoru nebo pomocí algoritmu.
Pro úspěšné zvládnutí učiva je vhodné procvičovat:

Zjistěte, zda platí a své tvrzení zdůvodněte:

1. Druhé odmocniny ze záporných čísel nepočítáme.
2. Záporné číslo můžeme odmocnit dvěma.
3. Druhá odmocnina z nuly je nula.
4. Když $(-7)^2 = 49$, je také $\sqrt{49} = -7$?
5. Kolik nul má druhá odmocnina z čísla, které má v dekadickém zápisu na konci
   a) 6 nul, b) 5 nul?
6. Rozhodněte, zda platí: $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$
   $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

Algoritmus pro výpočet druhé odmocniny:

$\sqrt{55696}$ — 1. číslo rozdělíme na skupiny po dvou od jednotek

$\sqrt{5|56|96} = 2\ 3\ 6$ — 2. odmocníme první skupinu $\sqrt{5} = 2$, počítáme $2^2 = 4$, 4 a kolik je 5, zapíšeme zbytek

-4
156 : 43 . 3 — 3. Ke zbytku připíšeme další dvojčíslí (56), odtrhneme poslední cifru a dělíme dvojnásobkem
- 129

2796 : 466 . 6 - 2796 0	částečného výsledku: 15 : 4 = 3, 4 připíšeme ke dvojnásobnému výsledku a ještě třemi násobíme 43 . 3 a dopočítáváme zbytek (156 – 129 = 27). Pokud je zbytek menší než číslo, které jsme násobili, Zapíšeme 3 do částečného výsledku odmocniny. 4. Ke zbytku připíšeme další dvojčíslí – 2796, znovu odtrhneme poslední cifru a dělíme dvojnásobkem částečného výsledku 279 : 46 = 6. 6 připíšeme a násobíme: 466 . 6 = 2796, zbytek je 0, 6 zapíšeme do výsledku odmocniny.

Kontrola. $236^2 =$ 4 . .
43 . 3 129 . .
466. 6 <u>2796</u>
55696

Téma druhá mocnina a druhá odmocnina má mnoho návazností, a proto je velmi potřeb né jeho dokonalé zvládnutí. Z možných návazností uveďme alespoň některé:

1. Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2$
   a) Výpočet jednotlivých stran pravoúhlého trojúhelníku pomocí příslušných odmocnin.
   b) Předpisy pro Pythagorejské trojice: Nechť *a, b, c, m, n, p, q* jsou přirozená čísla. Strany pravoúhlých trojúhelníků můžeme vypočítat podle následujících předpisů:

- Předpis stanovený pythagorejci: $a = 2n + 1$, $b = 2n^2 + 2n$, $c = 2n^2 + 2n + 1$.
- Předpisy připisované Platónovi: $a = 2n$, $b = n^2 – 1$, $c = n^2 + 1$
  $a = 4n$, $b = 4n^2 – 1$, $c = 4n^2 + 1$
- Předpis indického matematika Brahmagupty (7. stol.)

$$a = m \qquad b = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} - n\right) \qquad c = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{n} + n\right)$$

- Předpis indického matematika Mahaviry (9. stol.)

$$a = pq \qquad b = \frac{p^2 - q^2}{2} \qquad c = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

- Předpis pro přirozená čísla *m, n:*

$$a = m^2 – n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2 .$$

2. Úpravy algebraických výrazů: $(a + b)^2$, $(a – b)^2$, $a^2 – b^2$, $\sqrt{a^2 + b^2}$ apod.

3. Kvadratické závislosti, kvadratická funkce $y = x^2$.

4. Rovnice kružnice v kartézské souřadné soustavě:
$$x^2 + y^2 = r^2$$

5. Základní vztah pro goniometrické funkce:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

6. Geometrické početní úlohy – výpočty obsahů geometrických útvarů, povrchů a objemů těles.

7. Výpočty stěnových a tělesových úhlopříček různých těles.

Poznámka: Pro geometrické výpočty je potřebné seznámit se i třetí mocninou a odmocninou, např. pro výpočet objemu krychle o hraně *a* a naopak výpočtu délka hrany ze známého objemu. Podobně je tomu u koule.
Další mocniny přirozených a celých čísel potřebujeme k rozvinutému zápisu čísel pomocí mocnin čísla 10.

Literatura

Rámcový vzdělávací program. www.vuppraha.cz
Maláč, J.: Sbírka náročnějších úloh pro 6. - 9. ročník ZDŠ