GEOMETRIE V 6. – 9. ročníku ZŠ
STEREOMERTIE

Růžena Blažková
Brno 2004

1. Úvod

První stereometrické úvahy vznikly z praktických potřeb člověka. Archeologické vykopávky svědčí o poměrně značné prostorové představivosti našich předků při budování obydlí.

Popud k systematickému studiu stereometrie dalo rozvíjení perspektivy. V 5. století p.n.l. zkoumal perspektivu Anaxagoras po stránce vědecké. Řecký malíř Agatharchos v polovině století p.n.l. postavil perspektivní dekorace pro scénickou výpravu Aischylových Tragedií.

První zachované záznamy stereometrického myšlení se váží k počítání objemů. Nejprve se odhadovaly objemy nádob, prostornosti sýpek, potřeby materiálu pro stavbu obydlí aj. Sumerové již v 3. tisícíletí p.n.l. měřili objem pomocí počtu cihel. V Egyptě se určitý druh nauky o objemech vyvinul z potřeb zemědělství, hlavně zjišťování objemů sýpek. Při stavbě pyramid přicházejí Egypťané k vzorci pro výpočet objemu jehlanu.

K rozvoji prostorové geometrie nemalou měrou přispěla astronomická pozorování a navigace.

Původně tedy rozvoj stereometrie charakterizuje:

- zájem o tělesa,
- určování objemů těles, zdokonalování návodů pro výpočet,
- kriteriem přesnosti návodů je řemeslnická a úřednická praxe, teprve se rodí uvědomění si rozdílu mezi přesným a přibližným návodem.

Úlohy na výpočty objemů kvádrů, válců, komolých jehlanů se vyskytují v Moskevském a Rhindově (Ahmesově) papyrech.

K rozvoji stereometrie přispěli významnou měrou Řekové. Rozšiřují studium těles, dochází k idealizaci a zobecňování. Vznikají teorie zabývající se studiem transformací těles, které zachovávají objem, studují vztahy uvnitř tělesa a mezi tělesy navzájem. Postupně se geometrie axiomatizuje.

Charakteristickým problémem studia Řeků je jeden ze tří problémů starověku, tzv. zdvojení krychle.

Demokritos (5. – 4. století p.n.l.) jako první zjistil, že objem jehlanu je roven třetině objemu hranolu o stejné podstavě a výšce. Přesný důkaz podal později zřejmě Eudoxos z Knidu. Pravidla o počítání objemů jsou uvedena v díle Heróna z Alexandrie. Povrch a objem koule a další souvislosti počítá Archimédes (je to jeden z nejkrásnějších objevů Archimédova génia).

Poslední tři knihy Euklidových základů jsou věnovány stereometrii. Kniha XI. uvádí základní prostorové vztahy a objemy rovnoběžnostěnů, kniha XII. studuje objem jehlanu, válce, kužele a kulové plochy, XIII. kniha podává analýzu všech pěti platónských těles – čtyřstěnu, šestistěnu, osmistěnu, dvanáctistěnu a dvacetistěnu.

Další rozvoj stereometrie byl motivován potřebami astronomie, architektury, optiky, zeměměřictví, stavby lodí, výroby nástrojů apod.

Úlohy z geometrie řešil např. Leonardo da Vinci (1452 – 1519) a Albrecht Dürer (1471 – 1528). Mimo jiné hledali zákonitosti, podle kterých se prostorová situace zobrazuje do roviny.

Johanes Kepler (1571 – 1630) poukazuje na souvislosti mezi pěti platónovými tělesy a šesti planetami.

Objevitel deskriptivní geometrie Gaspard Monge (1746 – 1818) vynalezl metodu přesného zobrazení prostoru do roviny - do dvou nebo tří průměten. Byla to významná kvalitativní změna v geometrii a stavitelství, ekonomizovala projektování staveb.

K rozvoji stereometrie dále výraznou měrou přispěl objev analytické geometrie spojený se jménem Reného Descarta (1596 – 1650) a využití trigonometrie.

2. Rozvoj prostorové představivosti

Dítě se od malička pohybuje v trojrozměrném prostoru, avšak prostorová představivost mu není vrozena, je třeba ji záměrně rozvíjet a pěstovat. Pro rozvoj prostorového vnímání je nejvhodnější věk 5 – 6 roků a 11 – 12 roků. Pokud se tato doba promešká, jen obtížně se získává schopnost prostorového vidění.

Prostorovou představivostí rozumíme schopnost vytvářet si představy geometrických objektů a jejich rozmístění, umět v představě s těmito objekty manipulovat.

Činnosti podporující rozvoj prostorové představivosti:

- poznávání základních těles a jejich prvků,
- stavby z krychlí, práce s dalšími tělesy ze stavebnic,
- znázorňování pohledů na tělesa, kótovaný půdorys,
- vytváření sítí těles,
- skládání a rozkládání těles,
- incidenční a metrické vlastnosti.

Mezi výukou planimetrie a stereometrie je určitý rozdíl:

V planimetrii se zaměřujeme na:	Ve stereometrii se zaměřujeme na:
přesnost a zručnost rýsování	schopnost názorně zachytit prostorovou situaci v rovině

analýzu obrázku – vyznačit podstatné prvky	analýzu obrázku - schopnost vidět rovinný obrázek prostorově
řešení konstrukčních úloh s použitím vlastností rovinných útvarů	konstrukce a znázorňování těles, sítě těles,

Stereometrii je užitečné spojovat s řešením úloh, ve kterých se vyskytuje problematika vyplňování prostoru, dělení prostoru a pohyb v prostoru (F. Kuřina).

Činnosti spojené s představami mohou mít charakter her – hry s vodou a pískem, krabicemi, odměrkami.

Krabice od džusu – kolik malých se vejde do jedné velké, co se stane s objemem, jestliže všechny hrany krabice zmenšíme na polovinu (zvětšíme dvakrát) – zhotovíme nové krabice.

Objemy – od her k výpočtům

Úlohy

1. Krychle se jeví při pohledu shora i zepředu jako čtverec. Má i některé jiné těleso tuto vlastnost ?

2. Je dány krychle ABCDEFGH. Těleso, které vznikne sjednocením čtyřstěnů ACFH a BDEG se nazývá Keplerův mnohostěn. Určete počet vrcholů, hran a stěn tohoto tělesa.

3. Představte si kvádr sestavený z krychliček – tři krát dvě krát čtyři krychličky. Kolik z 24 krychliček prochází tělesová úhlopříčka kvádru ?

4. Představte si krychli, jejíž hrana má velikost 5 cm. Krychli na povrchu obarvíme barvou a potom krychli rozřežeme na 125 krychliček s hranou velikosti 1 cm. Kolik krychliček má právě jednu stěnu obarvenou ? Kolik má obarvené dvě stěny? Kolik tři stěny ?

5. Krychli rozřežeme rovinou na dvě části. Nakreslete obrázek tak, aby průnik krychle a roviny byl
   a) trojúhelník, b) obdélník, c) čtverec, d) lichoběžník,
   e) pětiúhelník, f) šestiúhelník.

6. Je dána krychle ABCDEFGH o hraně délky a. Vypočítejte obsah lichoběžníku BEKJ, kde bod K je středem hrany GH a bod J je středem hrany CG.

7. Jaké geometrické útvary můžeme získat, budeme-li provádět řez rovinou tělesa:
   a) válec, b) jehlan, c) kužel?

8. Jaké těleso vznikne, jestliže jeho hranami budou úsečky spojující středy stěn krychle.

9. Vymodelujte rotační tělesa – rotací obdélníku, trojúhelníku, půlkruhu.

10. Zhotovte si Mobiův proužek.

11. Zkuste nakreslit tzv. „nemožnou konstrukci“.

12. Zhotovte sítě platónových těles.

13. Ověřte Eulerovu větu pro mnohostěny (s + v = h + 2).

3. Početní geometrie

- výpočty objemů a povrchů těles,
- výpočty některých dalších prvků,
- aplikační úlohy,
- úlohy zájmové matematiky.

Úlohy

14. Odhadněte, jaký objem má třída, ve které se učíte. Změřte rozměry třídy a objem vypočtěte. Unesli byste vzduch, který je ve vaší třídě?

15. Kolik m^3 vody je v bazénu, který má délku 50 m, šířku 20 m a hloubku, která je první dva metry 150 cm a potom se postupně zvětšuje do 5 m.

16. Může být v akváriu 100 kg vody?

17. Vypočtěte délky hran kvádru, jestliže
    a) je dána délka jeho tělesové úhlopříčky u a poměr hran a : b : c.
    b) je dán poměr obsahů jeho stěn.

18. Je dán kvádr ABCDEFGH a kvádr A´BĆ´D´E´F´G´H´ jemu podobný. Jaký je poměr a) objemů obou těles
b) povrchů obou těles?

19. Vypočítejte velikosti hran kvádru a objem tohoto kvádru, jestliže hrany jsou v poměru 1 : 2 : 6 a jeho povrch je 1 000 m^2.

20. Vypočítejte velikosti hran a povrch kvádru, jestliže hrany jsou v poměru 1 : 2 : 4 a jeho objem je 1 000 m^3.

20. Jaký je objem prostoru pod střechou domu 15 m dlouhého, 8 m širokého a výška štítu je 3,5 m.

23. Vypočítejte rozměry válcové nádoby, jejíž objem je litr a výška je rovna průměru válce.

24. Vypočítejte objem válcové nádoby, jejíž objem je litr a výška je rovna dvojnásobku průměru válce.

25. Vypočtěte objem válce, jehož plášť je čtverec se stranou délky 20 cm.

26. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV s podstavnou hranou a a výškou v . Do čtverce ABCD je vepsán kruh, který tvoří podstavu kužele. Vypočítejte, kolikrát je výška kužele větší než výška jehlanu, jestliže se objemy obou těles rovnají.

27. Kuželovitá nálevka má mít objem 1 litr a výšku 12 cm. Jakou výseč musíme zvolit k výrobě nálevky ?

28. Vypočítejte povrch a objem tělesa, které vznikne rotací rovnostranného trojúhelníku kolem jeho strany.

29. Ověřte, že objem tělesa, které vznikne rotací pravidelného šestiúhelníku kolem jeho strany, je roven objemu koule, jejíž průměr je trojnásobkem strany šestiúhelníku.

30. Vypočítejte délku hrany, povrch a objem krychle vepsané do koule o poloměru r.

31. Vypočtete délku hrany, objem a povrch krychle vepsané do polokoule daného průměru.

32. Jaký je poměr povrchů a poměr objemů koulí, z nichž jedna je vepsána a druhá je opsána krychli o hraně a?

33. Jaký je poměr povrchů a poměr objemů koulí, z nichž jedna je vepsána a druhá je opsána rovnostrannému kuželi?

34. V jaké vzdálenosti od vrcholu jehlanu o výšce v se má vést řez rovnoběžný s podstavou jehlanu, aby se jehlan rozdělil na dvě části v poměru 1 : 3 ?

35. D koule je vepsán rovnostranný kužel. V jakém poměru jsou povrchy obou těles a v jakém poměru jsou objemy obou těles?

36. Koule a rovnostranný kužel mají stejné povrchy, V jakém poměru jsou objemy těchto těles ?

37. Může být kolmým průmětem krychle pravidelný šestiúhelník ?

38. Zjistěte, jaká objem má hrníček, sklenička, hluboký talíř, lžíce, lžička, které používáte.

39. Babička používá místo vážení polévkovou lžíci. Její lžíce obsahuje 18 g vody, 20 g oleje, 20 g mléka, 15 g octa, 20 g kečupu, 22 g mouky, 25 g cukru, 20 g soli, 25 g másla, 17 g rozpuštěného másla, 22 g rýže.

40. Sledujte vztah mezi povrchem a objemem krychle (číselně) v závislosti na zvětšování délky hrany krychle.

Literatura

Balada, F. Z dějin elementární matematiky. Praha: SPN, 1959.
Hejný, M. a kol. Teória vyučovania matematiky. Bratislava: SN,1990.
Kupčáková, M.: Modelování těles – návrhy úloh pro geometrické praktikum I. In: Učitel matematiky, roč. 7, č. 3, s. 160 – 167.
Kupčáková, M.: Modelování těles – návrhy úloh pro geometrické praktikum II. In: Učitel matematiky, roč. 8, č. 1, s. 27 – 36.
Kupčáková, M.: Putování za routou a dodekadrem. In : Učitel matematiky, roč. 8, č. 3, s. 160 – 166.
Kupčáková, M.: Modelování pravidelného dvanáctistěnu. In: Učitel matematiky, roč. 9, č. 1, s. 40 – 46.
Kuřina, F.: Geometrická představivost a vyučování stereometrii. In: Matematika a fyzika ve škole, roč. 18, (1987 – 88), str. 201 – 212.
Půlpán, Z. Kuřina, K., Kebza, V.: O představivosti a její roli v matematice. Praha: Academia 1992.