Úkoly A

25. listopadu

podzim 2008, MA7BP_CAN3

1. Ve 12:30 nás při pohledu na hodinky napadla následující úloha: V kolik hodin přesně doběhne velká ručička malou?

2. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^a}$ konverguje.

U následujících číselných řad rozhodněte o jejich konvergenci/divergenci:

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n\sqrt{n}}$ **4.** $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \tan \frac{4}{n\sqrt{n}}$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(5n)!}$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n+1}}{n \cdot 6^n}$ **7.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+7}}{n - \ln n}$ **8.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-8)^n}{n!}$

9. Které z předchozích řad konvergují absolutně?

10. Kolik byste museli sečíst sčítanců řady z příkladu **8**, abyste získali součet s přesností na tři desetinná místa?

U následujících funkčních řad určete obor konvergence a rozhodněte, kdy řada konverguje stejnoměrně:

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{11}{n^x}$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{12}}{x^n}$ **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^{13}}{n \ln^2 n}\right)$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14x}{x^2+n^7}$

15.
(a) Určete Taylorův rozvoj funkce $\arctan x$.
(b) Určete obor konvergence této řady.
(c) Vyjádřete číslo π jako součet nekonečné číslené řady.

16. Umíte napsat číslo e^{-8} jako součet nekonečné číslené řady?

17.
(a) Vyjádřete funkci $\frac{\sin x}{x}$ jako součet mocninné řady.
(b) Určete poloměr konvergence této řady.
(c) Vypočtěte $\int\limits_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$ s přesností na tři desetinná místa.

Úkoly B

7. prosince

podzim 2008, MA7BP_CAN3

Určete všechna řešení následujících diferenciálních rovnic:

18. $y' + y^2 \sin x = 0$

19. $\sin x(1 + e^{-y})dx = (1 + \cos x)dy$

20. $xydx = (y^2 - x^2)dy$

21. $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$

22. Pro předchozí rovnice určete definiční obor obecného řešení a řešte nějakou počáteční úlohu, např. $y(0) = 0$, $y(1) = -1$ apod.

23. Diskutujte počáteční podmínky, pro něž je porušena jednoznačnost řešení.

24. Pěstujeme bakterie, které se množí tak, že rychlost růstu jejich populace je přímo úměrná stávajícímu počtu. Po jedné hodině šlechtění jsme zaznamenali nárůst jejich počtu o 1/2. Za jak dlouho jich budeme mít trojnásobek?

25. V nádrži o objemu 500 litrů je 200 litrů čisté vody. Do nádrže přitéká slaná voda, obsahující 1/4 kg soli v jednom litru, rychlostí 3 litry za minutu. Z druhého konce odteká smíchaný roztok rychlostí 2 litry za minutu.

(a) Vyjádřete množství soli (kg) v nádrži jako funkci času (min).

(b) Kolik soli je v nádrži v okamžiku, kdy je plná?

26. Dokažte, že každá funkce $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln(\cos x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, je řešením diferenciální rovnice $y'' + y = \frac{1}{\cos} x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Určete obecná řešení následujících diferenciálních rovnic:

27. $y'' + y' = e^{-x}$

28. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

29. Pro předchozí rovnice určete definiční obor obecného řešení a řešte nějakou počáteční úlohu, např. $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$ apod.

30. Ukažte, že diferenciální rovnice $\ell y'' + g \sin y = 0$ je pohybová rovnice kyvadla, pokud ℓ je délka kyvadla, g je gravitační zrychlení a vnější síly zanedbáváme.

31. Určete délku ℓ kyvadla tak, aby jeden kmit trval vteřinu. (Pro malou amplitudu můžete nahradit $\sin y \approx y$ a řešit lineární DR.)