10. DĚLENÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

10. 1. Pamětné dělení

Dělení přirozených čísel je definováno jako inverzní operace k operaci násobení. Jestliže pro přirozená čísla a, b, c platí $a \, . \, b = c$ pak pro $a \neq 0, b \neq 0$ platí $c : a = b$, $c \, . \, b = a$.

Protože pro děti je dělení nejnáročnější operací, vyvozujeme dělení na základě rozdělování konkrétních předmětů. Již v předškolním věku umí děti rozdělit několik předmětů mezi určitý počet dětí tak, aby měly všechny děti stejně. Při vyvozování dělení vycházíme proto z konkrétní situace, kdy děti rozdělují konkrétní předměty, přitom je mohou rozdělovat na části např. mezi několik dětí, nebo podle obsahu, tj. po několika předmětech. Formulujeme proto dvě úlohy.

1. Dělení na části

Rozdělte 20 kuliček mezi pět dětí tak, aby měly všechny stejně a všechny kuličky jste rozdělili. Kolik kuliček bude mít každé dítě?

a) dramatizace – konkrétní provedení
b) grafické znázornění situace – postupně přikreslujeme každému z dětí po jedné kuličce.

děti	A	B	C	D	E
	o	o	o	o	o
	o	o	o	o	o
	o	o	o	o	o
	o	o	o	o	o

c) zápis příkladu: $20 : 5 = 4$

Každé dítě bude mít 4 kuličky.
Zkouška: (např. sečtením kuliček každého z dětí) $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$.

V tomto příkladu je dělenec 20, dělitel 5, podíl 4 a podíl vyjadřuje počet prvků každé z částí.

2. Dělení podle obsahu

Rozdělte 20 kuliček na hromádky po pěti. Kolik hromádek vytvoříte?

a) dramatizace – zde děti pracují samostatně – každý má 20 kuliček a vytváří hromádky po pěti kuličkách.
b) grafické znázornění

o o o o o   o o o o o   o o o o o   o o o o o

c) zápis příkladu : $20 : 5 = 4$

Vytvoříme čtyři hromádky.
Zkouška. $5 + 5 + 5 + 5 = 20$

I v tomto příkladu je dělenec 20, dělitel 5, podíl 4, podíl však vyjadřuje počet vytvořených částí.

Je třeba si uvědomit, že jeden příklad vyjadřuje dvě zcela jiné situace a obě je třeba s dětmi provést, zejména proto, aby v budoucnu uměly řešit slovní úlohy, ve kterých se vyskytuje operace dělení.

Specielní případy při dělení:

a) dělení číslem 1 $5 : 1 = 5$
   vyvodíme na příkladu: Pět bonbónů rozděl po jednom, kolik dětí podělíš?
b) dělenec je roven děliteli $5 : 5 = 1$
   vyvodíme na příkladu: Pět bonbónů rozděl mezi 5 dětí, kolik bonbónů bude mít každé dítě?
c) dělení nuly $0 : 5 = 0$
   vyvodíme na příkladu: Nula kuliček rozděl mezi 5 dětí, kolik kuliček bude mít každé dítě?
d) dělení nulou $5 : 0 = ?$
   Děti se seznamují s větou „Nulou nedělíme", avšak často bez jakéhokoliv zdůvodnění a proto v příkladech chybují a píší buď $5 : 0 = 0$ nebo $5 : 0 = 5$. Je vhodné ukázat dětem, že neexistuje přirozené číslo, pro které bychom mohli po vydělení nulou provést zkoušku správnosti.

Kdyby např. $5 : 0 = 0$, muselo by platit $0 . 0 = 5$. To však neplatí, protože $0 . 0 = 0$.
Kdyby $5 : 0 = 5$, muselo by platit $5 . 0 = 5$. To neplatí, protože $5 . 0 = 0$.
Takto můžeme postupovat a hledat číslo, pro které by vyšla zkouška správnosti. To však nenajdeme.
(Poznámka. Obecně jestliže by platilo pro $a \neq 0$ $a : 0 = x$, pak by muselo platit $x . 0 = a$. To však neplatí, protože $x . 0 = 0$ pro každé přirozené x.)

Postupně děti zvládají základní spoje dělení zpaměti a pokud chybují, měly by mít možnost vždy situaci znázornit konkrétními předměty.
Dále se děti seznámí se souvislostí operace násobení a operace dělení v obor přirozených čísel, např. jestliže $5 . 7 = 35$, pak $35 : 7 = 5$ a $35 : 5 = 7$.

10. 2. Problémy dětí při dělení v oboru násobilek

1. Děti nepochopí význam operace dělení, zejména pokud nemají dostatek konkrétních činností a nácvik se opírá pouze o pamětné zvládnutí spojů dělení.
2. Děti zaměňují některé příklady dělení (základní spoje), např. $54 : 9 = 7$, $56 : 8 = 9$, apod. Jedná se zejména o čísla 42, 48, 54, 56, 63, 64 aj.
3. Chyby z nepozornosti, např. $40 : 5 = 10$
4. Ve slovních úlohách nepochopí, kdy se užívá operace dělení.
5. Zaměňují dělence a dělitele, např. $2 : 8 = 4$

10. 3. Dělení mimo obor násobilek

10. 3. 1. Dělení se zbytkem

Dělení se zbytkem uvádíme takto: Jestliže máme dvě přirozená čísla a,b taková, že a není násobkem b a b je různé od nuly, pak k těmto číslům existují přirozená čísla q, z tak, že platí $a = b . q + z$.
Číslo a se nazývá dělenec, b dělitel, q neúplný podíl, z zbytek. Přitom zbytek musí být vždy menší než dělitel.
Dělení se zbytkem se vyvozuje analogicky jako dělení beze zbytku.

Nejprve formulujeme úlohu: 17 sešitů máme rozdělit mezi 5 dětí. Kolik sešitů dostane každé dítě a kolik sešitů zbude.

A B C D E
Î Î Î Î Î Î
Î Î Î Î Î Î 17 : 5 = 3 (zb.2)
Î Î Î Î Î 2

Zkouška. 3 . 5 + 2 = 17 nebo 3 . 5 = 15 15 + 2 = 17

Každé dítě bude mít 3 sešity a 2 sešity zbudou.

Další úloha: 17 sešitů máme rozdělit na hromádky po pěti. Kolik hromádek vytvoříme a kolik sešitů zbude?

Î Î Î Î Î Î Î Î Î Î Î Î Î Î Î Î Î

17 : 5 = 3 (zb 2)
2
Zkouška: 3 . 5 + 2 = 17
Vytvoříme 3 hromádky a 2 sešity zbudou.

Je nutné, aby děti viděly pod každým číslem jeho význam, tj. které číslo je ve významu je dělitele, dělence, neúplného podílu i zbytku.
Vhodné je využití násobků čísel a vyznačení nejblíže menšího násobku daného čísla k danému číslu.

10. 3. 2. Problémy dětí při dělení se zbytkem

1. Nezvládnutí základních spojů násobení a dělení, které jsou zde nezbytné.
2. Pokud je dělenec blízko dalšího násobku dělitele, děti počítají např.
   41 : 7 = 6 (zb 1)
   1
   Zapíší vyšší násobek a do zbytku zapíší číslo, které do vyššího násobku chybí.
3. Děti zapisují přímo násobek, např.: 38 : 7 = 35 (zb.3)
   3

4. Nevědí si rady s případy, kdy je dělenec menší než dělitel, např. 3 : 5 = nemá řešení
   Přitom 3 : 5 = 0 (zb.3) – toto je nutné zvládnou pro písemné dělení.
5. Provádějí chybný zápis zkoušky správnosti, např.: 3 . 5 = 15 + 2 = 17. Zde je porušena tranzitivita rovnosti. V průběhu výpočtu není možné nic přičítat nebo odčítat a zapisovat tak chybné rovnosti.

10. 3. 3. Dělení mimo obor násobilek zpaměti

Jedná se o příklady typu 72 : 4.
Je třeba najít vhodný rozklad čísla 72 na dvě čísla tak, aby byla, pokud možno, obě dělitelná číslem 4. V tomto případě jsou to čísla 40 a 32.
Počítáme: 72 : 4 = (40 + 32) : 4 = 40 : 4 + 32 : 4 = 10 + 8 = 18

Stručný zápis: 72 : 4 = 18
40 32

Zkouška: 18 . 4 = (10 + 8) . 4 = 10 . 4 + 8 . 4 = 40 + 32 = 72

Příklady tohoto typu se počítají zpaměti pouze v jednodušších případech.

10. 4. Písemné dělení

Písemné dělení se od ostatních algoritmů písemných operací liší jednak tím, že algoritmy pro písemné sčítání, odčítání a násobení začínají vždy od jednotek, dělení však začíná od nejvyššího řádu, jedna schéma dělení musí děti zvládnout jak v horizontálním, tak ve vertikálním směru. Navíc, aby mohly děti úspěšně provádět písemné dělení, je třeba, aby měly zvládnuté všechny pamětné operace – zejména dělení se zbytkem a odčítání. Pro nácvik písemného dělení je vhodné sestavit velmi jemnou metodickou řadu, kdy se v každém dalším příkladu objeví jen jeden nový jev.

A) Dělení jednociferným dělitelem

1. První série příkladů je volena tak, aby děti dělily dvojciferné číslo číslem jednociferným a aby počet desítek dělence byl násobkem dělitele a aby dělení bylo beze zbytku. Děti se učí postupným krokům algoritmu (co čím dělit, kam co zapsat). U každého příkladu provádíme ihned zkoušku správnosti. Jednak tím opakujeme násobení a jednak učíme děti přesvědčit se o správnosti výpočtu vlastními silami. Např.:

```
  9 : 3
  6 : 3
 69 : 3 = 23          Zkouška:    23
 09                              . 3
  0                               69
```

2. Ve druhé sérii příkladů volíme takové, kdy je počet desítek dělence větší než je dělitel, ale není jeho násobkem. Je třeba, aby děti zvládly zapsání zbytku při dělení a vytvoření nového částečného dělence, např.:

```
 25 : 5
  7 : 5
 75 : 5 = 15          Zkouška:    15
 25                              . 5
  0                               75
```

3.Třetí série obsahuje příklady, kdy na místě nejvyššího řádu dělence je číslo menší než dělitel, např.:

```
  36 : 6
  15 : 6
 156 : 6 = 26         Zkouška     26
  36                             . 6
   0                             156
```

4. Dělení je se zbytkem, např.

34 : 4
23 : 4
6 : 4

634 : 4 = 158	Zkouška:	158	632
23		. 4	+ 2
34		632	634
2(zbytek)			

6. Dělení čísel s nulami. V tomto případě je třeba vést děti tak, aby uplatňovaly důsledně naučený postup a nevynechaly některý z kroků nebo některé z čísel.

34 : 5
3 : 5
10 : 5

1 034 : 5 = 206	Zkouška:	206	1 030
03		. 5	+ 4
34		1030	1 034
4 (zbytek)			

6. Dělení dvojciferným dělitelem

Postup dělení dvojciferným dělitele kopíruje metodickou řadu dělení jednociferným dělitelem. Pro děti s poruchami učení je však náročný. Obtížně odhadují částečné podíly, hůře se v algoritmu orientují. Pokud se jim podaří zvládnout jednodušší příklady, je to velký úspěch. V opačném případě volíme jako kompenzační nástroj kalkulátor. Avšak je nezbytné, aby děti počítání na kalkulátoru ovládaly bezpečně a aby měly určitou představu o řádu podílu, tj. uměly určit správně odhad výsledku.

Dodat příklady

10. 5. Problémy při písemném dělení

1. numerické chyby vyplývající z nezvládnutí pamětných operací,
2. formální provádění zkoušky
3. nedodržení přesného postupu algoritmu, např.
   2535 : 5 = 57,   422149 : 7 = 639
4. nezvládnutí čísel s nulami, např.:
   2 408 : 6 = 41, zb. 2   82 000 : 4 = 205
   3 000 : 10 = 30