MA2BP_SMR1

PODZIM 2009

Obsah

Úvod

Následující text představuje osnovu k semináři *Metody řešení matematických úloh 1*. Jeho neúplná forma by měla motivovat k samostatnému studiu a příp. doplnění podrobností...

První doporučenou knihou je populární průvodce dnešní matematikou od Iana Stewarta [S], jejíž vybrané části jsou níže studovány blíže. Vzhledem k zásadnímu vlivu na celou matematiku (a velmi špatné povědomosti mezi mnohými dnešními matematiky) budeme též často citovat Eukleida [E].

1. Pythagorova věta

Formulaci Pythagorovy věty přepisujeme z [E, I.47[1]] podle překladu Servítova:

Tvrzení. *V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se*[2] *čtvercům na stranách pravý úhel svírajících.*

Kromě Eukleidova originálního důkazu uvádíme několik dalších známých důkazů:

- Perigalův stříhací důkaz,
- starý známý přesouvací důkaz,
- důkazy se smykem ve smyslu [E, I.37],
- důkazy s podobností ve smyslu [E, VI.8].

Postřeh 1. V nepravoúhlém trojúhelníku tvrzení o rovnosti čtverců neplatí, jinými slovy: *Když v trojúhelníku čtverec na jedné ze stran rovná se (součtem) čtvercům na dvou ostatních stranách, úhel ostatními dvěma stranami sevřený jest pravý* [E, I.48]. Pokud bychom chtěli být přesnější, lze zcela určitě vyjádřit rozdíl mezi obsahem jednoho čtverce a součtem zbylých dvou — tzv. kosinová věta. Víte, jak tento rozdíl interpretuje Eukleides?

otazník s nápovědou: II.12–13

Date: 12. prosince 2009.

[1] I.47 = kniha I, tvrzení 47.

[2] myšleno „má stejný plošný obsah jako...“; podobně i dále.

Postřeh 2. Všechny důkazy nějak (často skrytě) závisely na tzv. Eukleidovu postulátu o rovnoběžkách nebo na nějakém jeho důsledku, resp. ekvivalentním tvrzení:

- *k dané přímce daným bodem prochází jediná rovnoběžka*,
- *v každém trojúhelníku tři úhly vnitřní rovnají se dvěma pravým* [E, I.32],
- *rovnoběžníky na téže základně mezi týmiž rovnoběžkami jsou navzájem stejné* [E, I.35],
- *existují podobné trojúhelníky, které nejsou shodné* [E, VI.2].

▷ Pro Eukleidův důkaz, přezdívaný větrný mlýn, komentáře a souvislosti viz např. odkaz[3]. Postulát o rovnoběžkách se v různých vydáních Základů objevuje na různých místech: jako 12. axiom v [B], 5. postulát v [J] nebo 4. či dodatečný[4] postulát v [V].

▷ Předchozí postřeh lze ještě o něco rozšířit; ve skutečnosti platí, že *Pythagorova věta je ekvivalentní postulátu o rovnoběžkách...* výzva

Cvičení. Dokažte, že čtverec na jedné ze stran trojúhelníku rovná se součtu čtverců na dvou ostatních stranách právě tehdy, když trojúhelník je pravoúhlý. (Dejte si záležet a zdůrazněte v důkaze místo, kde používáte postulát o rovnoběžkách.) DÚ

* * *

Postřeh 3. Výška na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku jej rozděluje na dva trojúhelníky, oba podobné danému trojúhelníku (tedy i sobě navzájem), [E, VI.8]. Odtud bezprostředně vyplývá následující zobecnění Pythagorovy věty (tedy i Pythagorova věta samotná) [E, VI.31]: *V pravoúhlých trojúhelnících obrazec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se obrazcům podobným na stranách pravý úhel svírajících.*

▷ Obrazcem Eukleides myslí obecný mnohoúhelník, ale tvrzení zřejmě platí i pro obecnější útvary. Uvažujeme-li např. půlkružnice (se středem ve středu odpovídající strany), můžeme, stejně jako Hippokratos z Chiosu, pozorovat, že specifické půlměsíce nad odvěsnami mají stejný obsah jako daný trojúhelník! Tento závěr velmi připomíná problém kvadratury kruhu, původní Hippokratův zájem, viz část 2 pro překvapivě algebraické řešení.

* * *

Dovětek. „Kvadraturovat" jakýkoli mnohoúhelník, tj. sestrojit čtverec se stejným obsahem jako daný mnohoúhelník, by neměl být pro nikoho problém: viz např. tvrzení I.42, I.45 a II.14, příp. I.47, v [E]. Všimněte si, že všechny důkazy předchozích tvrzení jsou konstrukční v Eukleidově duchu, tj. pomocí kružítka a pravítka (bez rysek a jiných značek).

Zajímavá varianta úloh porovnávajících plošné obsahy je následující „krájecí problém": k daným dvěma obrazcům najít způsob, jak rozkrájet jeden obrazec na menší kousky (ne nutně trojúhelníky) tak, aby vhodným přeskládáním vytvořily druhý. V eukleidovské rovině platí, že *dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jeden lze rozkrájet na trojúhelníky, z nichž lze složit druhý.* Navíc, odpovídající krájení lze explicitně (a celkem jednoduše) popsat a sestrojit, viz [H, §24].

▷ Je pozoruhodné, že analogické tvrzení v prostoru neplatí! Přesněji, *existují mnohostěny, které mají stejný objem, ale ani jeden nelze rozkrájet tak, aby ze vzniklých kousků šel složit druhý*; viz [S, kapitola 12] pro motivaci a část 3 pro překvapivě algebraické řešení.

Cvičení. Pro hodně obecný čtyřúhelník sestrojte čtverec, který má stejný plošný obsah. (Ambicióznější studenti sestrojí i vhodné rozkrájení.) DÚ

[3] `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI47.html`

[4] formulován dodatečně až před tvrzením I.29, viz též komentář [V, str. 66–68].

2. Slavné problémy starověku

Máme na mysli zejména následující velmi slavné starověké problémy, jež zůstávaly velmi dlouho nerozřešeny: (1) problém kvadratury kruhu, (2) problém zdvojení krychle a (3) problém trisekce úhlu. Velmi blízko (3) je taky (4) problém konstrukce pravidelného mnohoúhelníku.

▷ „Problém“ zde znamená existenci eukleidovské konstrukce, která by řešila příslušný úkol. Eukleidovská konstrukce je geometrická konstrukce užívající pouze (libovolně rozkročitelného) kružítka a (libovolně prodloužitelného) pravítka bez jakýchkoli značek, tj. konstrukce v duchu prvních tří Eukleidových postulátů, viz např. [V, str. 45].

Algebra léčí. Řešení problému je veskrze algebraické a vypadá ve zkratce takto[5]:
— bod v eukleidovské rovině interpretujeme jako dvojici reálných čísel (souřadnice v kartézské reálné rovině),
— stačí charakterizovat, která reálná čísla jsou sestrojitelná z 1 (volba jednotky na souřadné ose),
— triviálně každý sestrojí $\mathbb{Z}$ a jednoduše taky $\mathbb{Q}$,
— další eukleidovskou konstrukcí sestrojíme z $\mathbb{Q}$ jedině buď racionální číslo (průnik dvou přímek), nebo číslo tvaru $a+b\sqrt{d}$, kde $a,b,d\in\mathbb{Q}$[6] (průnik přímky a kružnice nebo průnik dvou kružnic),
— jakékoli další sestrojitelné číslo vznikne pouze opakováním předchozího,
— tj. po označení $\mathbb{Q}_1:=\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, lze v dalším kroku z již sestrojených čísel sestrojit jedině čísla tvaru $k+l\sqrt{m}$, kde $k,l,m\in\mathbb{Q}_1$,
— označíme $\mathbb{Q}_2:=\mathbb{Q}_1[\sqrt{m}]$, ...

Tvrzení. *Reálné číslo je eukleidovsky sestrojitelné právě tehdy, když patří do nějakého (rozšířeného) tělesa $\mathbb{Q}_k$ z posloupnosti*

$$\{1\}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}=:\mathbb{Q}_0\subseteq\mathbb{Q}_1\subseteq\mathbb{Q}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathbb{Q}_k\subseteq\cdots\subsetneq\mathbb{R},$$

kde $\mathbb{Q}_i=\mathbb{Q}_{i-1}[\sqrt{d_i}]$ pro nějaké $d_i\in\mathbb{Q}_{i-1}$.

Ačkoli lze takto sestrojit velkou spoustu reálných čísel, např.

$$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\in\mathbb{Q}_2$$

nebo taky

$$\frac{1}{4}\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}\in\mathbb{Q}_5,$$

vidíme, že se jedná pouze o (dost specifická[7]) algebraická čísla. Daleko víc reálných čísel je nesestrojitelných, zejména všechna transcendentní čísla jako např. π (nebo sugestivněji $\sqrt{\pi}$), ale taky všechna algebraická čísla, která nejsou výše specifikovaného tvaru, např. $\sqrt[3]{2}$. Touto poznámkou jsou vyřešeny první dva ze zmíněných problémů:

Tvrzení. *Problém kvadratury kruhu a zdvojení krychle nelze nikdy vyřešit (eukleidovským) pravítkem a kružítkem.*

* * *

[5] Hodně podrobností včetně zajímavých historických poznámek lze najít v [H, §25 a kap. 6].

[6] Množina všech čísel tohoto tvaru se obvykle značí $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$; protože $\mathbb{Q}$ je těleso, $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ je taky těleso... Uvědomte si, že podobnou konstrukci každý už alespoň jednou viděl: $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]=\mathbb{C}$.

[7] Vždy jen iterované druhé odmocniny; každé takové číslo je kořenem polynomu (s racionálními koeficienty) stupně 2^k... Najdete odpovídající polynom pro některé z čísel uvedených výše? výzva

Trisekce úhlu. Problém trisekce úhlu je samozřejmě komplikovanější, protože některé úhly roztřetit eukleidovsky lze, většinu však nikoli. Abychom získali nějakou kontrolu nad tímto problémem, diskutujeme sestrojitelnost nějaké přidružené délkové veličiny k danému úhlu α, např. $\tan\alpha$:
— předp. sestrojitelný úhel 3α, ptáme se, zda α je sestrojitelný,
— ze součtových vzorců pro tan se snadno odvodí, že

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha},$$

— označíme $a := \tan 3\alpha$ a $x := \tan\alpha$, potom předchozí rovnost je ekvivalentní

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0, \tag{1}$$

— problém je redukován na následující: *Má pro dané sestrojitelné číslo $a \in \mathbb{Q}_k$ polynom* (1) *sestrojitelný kořen $x \in \mathbb{Q}_l$?*

Obecně tento problém není úplně jednoduchý, ale dovoluje aspoň otestovat vztah mezi algebrou a geometrií pro některé známe úhly, které roztřetit umí každý (např. $3\alpha = 45°$, tj. $a = 1$), a díky následujícímu tvrzení také demonstrovat existenci úhlů, které eukleidovsky roztřetit nejde.

Tvrzení. *Pro polynomy lichého stupně s koeficienty z $\mathbb{Q}_k$ platí:*
(1) Má-li polynom nějaký kořen z $\mathbb{Q}_{k+1}$, pak má i kořen z $\mathbb{Q}_k$.
(2) Odtud, speciálně, má-li polynom racionální koeficienty a kořen z $\mathbb{Q}_{k+1}$, pak má i kořen z $\mathbb{Q}$.
(3) Odtud obráceně, nemá-li polynom s racionálními koeficienty racionální kořen, nemá ani sestrojitelný kořen!

Nyní stačí vzpomenout, jak se hledají racionální kořeny pro polynomy s racionálními koeficienty, a otestovat sílu předchozích úvah např. na úhlu s tangensem 2.

Uvedená metoda však není všemocná, jak se každý přesvědčí např. nad úhlem $3\alpha = 90°$, jehož tangens není vůbec definován.

Další ukázka: pro úhel $3\alpha = 60°$ je odpovídající polynom tvaru $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$, tj. všechny koeficienty jsou z $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Chceme-li dokázat, že daný úhel nelze roztřetit eukleidovsky, znamená to v našem algebraickém překladu, že tento polynom nemá žádný kořen z $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. To je sice pravda, ale ne každý to umí jednoduše zdůvodnit[8]. Přesto lze modifikací předchozích postupů celkem bezbolestně tento problém dořešit…[9]

Cvičení. Dokažte, že úhel 60° nelze eukleidovsky rozdělit na třetiny. DÚ

* * *

Pravidelné mnohoúhelníky. S předchozím problémem úzce souvisí problém konstrukce pravidelného n-úhelníku. Eukleides uměl eukleidovsky problém vyřešit pro $n = 3$ [E, I.1], $n = 4$ [E, I.46 či IV.6], $n = 5$ [E, IV.11], $n = 6$ [E, IV.15] a $n = 15$ [E, IV.16]. Gauss totéž dokázal nejdřív pro $n = 17$, posléze výsledek zobecnil [H, §29]. Úplná charakterizace sestrojitelných mnohoúhelníků je následující:

Věta. *Pravidelný n-úhelník lze sestrojit (eukleidovským) pravítkem a kružítkem právě tehdy, když číslo n je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

[8] Dokonce ani když si vzpomene na Cardanovy vzorce…
[9] Napovědět by mohlo, že $\cos 60° = \frac{1}{2}$ a $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

▷ Fermatovo prvočíslo je Fermatovo číslo $F_k = 2^{2^k} + 1$, které je prvočíslem. K dnešnímu dni[10] je známo pouze pět Fermatových prvočísel: $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$.

. . . . . .

Cvičení. Dokažte, že pravidelný sedmiúhelník nelze sestrojit eukleidovsky. DÚ/výzva

3. Hilbertův problém

Dehnův invariant...

4. Některé diofantické rovnice

Diofantická rovnice je algebraická rovnice, u níž uvažujeme pouze celočíselné neznámé. Hodně takových rovnic bylo řešeno Diofantem z Alexandrie.

Lineární diofantické rovnice. Ze školy zná každý lineární diofantické rovnice (nejčastěji se dvěma neznámými), u nichž se hledají pouze kladná řešení. Toto omezení často vymezuje jenom konečně mnoho, příp. žádné, řešení, i když celočíselných řešení je nekonečně mnoho...

Náš cíl je pro obecnou lineární rovnici, příp. systém rovnic, nalézt všechna celočíselná řešení, pokud existují.

Postřeh. Rovnice $3x + 6y = 22$ evidentně nemá žádné celočíselné řešení, protože na levé straně je vždy číslo dělitelné 3, ale 22 napravo nikoli. Tento postřeh snadno zobecníme:

Rovnice $ax + by = c$ má celočíselné řešení pouze, když NSD čísel a a b dělí c.

Následující řádky přesvědčivě zdůvodňují, že platí i tvrzení opačné.

Příklad. Rovnice $5x + 6y = 22$ evidentně má řešení, protože každý vidí, příp. umí najít, aspoň $x = 2, y = 2$ (jediné kladné řešení). Ostatní lze najít různě:
(a) Vidíme-li jedno další řešení, můžeme postupovat následovně:
— uhodneme např. $x = 8, y = -3$,
— tato dvě řešení představují dva celočíselné body na přímce v rovině, rozdílový vektor je $(6, -5)$,
— parametrizace $x = 2 + 6t, y = 2 - 5t$, kde $t \in \mathbb{Z}$, popisuje nekonečně mnoho dalších řešení,
— protože mezi řešeními $[2, 2]$ a $[8, -3]$ žádné další není, uvedená parametrizace popisuje všechna řešení.
(b) Pokud postrádáme jakýkoli nápad, pomůže systém:
— rovnici přepíšeme jako $6y = 22 - 5x$, resp. $y = \frac{22-5x}{6}$,
— najít celočíselná řešení rovnice znamená zjistit, pro která všechna x je výraz $22 - 5x$ dělitelný 6,
— toto je splněno jenom a pouze pro $x = 2 + 6s$, kde $s \in \mathbb{Z}$, (*)
— po dosazení $y = 2 - 5s$ a je to.

Krok označený (*) je klíčový a zpravidla snadno vyřešen (zde max. šesterým) zkoušením. Pro dokonalejší kontrolu nad obecným problémem, ještě přepíšeme a řešíme podmínku „6 dělí $22 - 5x$“ následovně:

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 22 \mod 6, \\ 5x &\equiv 10 \mod 6, \\ x &\equiv 2 \mod 6. \end{aligned}$$

což samozřejmě souhlasí s předchozím závěrem. Podstatná je příp. redukce velkých čísel ze zadání a hlavně následující odkaz:

[10] 12. prosince 2009

Věta. *Kongruence* $kx \equiv l \mod m$ *má řešení právě tehdy, když* $NSD(k,m)$ *dělí* l.

▷ Důkaz věty je v podstatě konstruktivní a odkazuje na Eulerovu větu dobře známou z algebry II, viz část 5...

Nyní je již snadné dostopovat a zformulovat následující kriterium:

Tvrzení. *Rovnice* $ax + by = c$ *má celočíselné řešení právě tehdy, když* $NSD(a,b)$ *dělí* c.

Příklad s více neznámými. Předchozí tvrzení ve skutečnosti platí pro lineární rovnice s libovolným počtem neznámých. Namísto obecné argumentace, vyřešíme vhodný příklad, zaznamenáme specifika úlohy a domyslíme zobecnění:

$$5x + 6y + 9z = 22.$$

Vzhledem k předchozímu vidíme nekonečně mnoho řešení, kde $z = 0$. Zjistíme-li jedno další nezávislé řešení, můžeme parametrizovat všechna ostatní metodou analogickou postupu (a) na předchozí straně. Alternativně můžeme postupovat např. takto:
— dosadíme-li $z = t$ libovolné celé číslo, bude (náhodou) rovnice $5x + 6y = 22 - 9t$ (s neznámými x, y a jakýmsi parametrem t) mít celočíselné řešení, neboť $NSD(5,6) = 1$ jistě dělí $22 - 9t$,
— nelekáme se parametru t a zkoušíme dořešit podle návodu výše.....
— vychází, že obecné řešení rovnice je tvaru

$$x = 2 - 3t + 6s,\ y = 2 - 4t - 5s,\ z = t.$$

POZOR, řešitelnost v každém kroku obecně nevychází automaticky a je třeba ji pečlivě kontrolovat. Zkusme tentýž příklad ještě jednou z „opačné strany“, zapomeňme na předchozí výsledky a přemýšlejme nad obecnou metodou:
— je dána rovnice $5x + 6y + 9z = 22$ (se třemi neznámými x, y, z),
— $NSD(5,6,9) = 1$ dělí 22, nutná podmínka řešitelnosti je splněna,
— rovnice $6y + 9z = 22 - 5x$ (se *dvěma* neznámými y, z) má celočíselné řešení právě když $NSD(6,9) = 3$ dělí $22 - 5x$ (což samozřejmě neplatí pro všechna x),
— 3 dělí $22 - 5x$ právě když $x = 2 + 3r$, $r \in \mathbb{Z}$, (*)
— dosadíme a dělíme 3, $2y + 3z = 4 - 5r$,
— nebojíme se parametru r a pokračujeme v redukci ve stejném duchu,
— rovnice $2y = 4 - 5r - 3z$ (s *jednou* neznámou y) má celočíselné řešení právě když 2 dělí $4 - 5r - 3z$,
— 2 dělí $4 - 5r - 3z$ právě když $z = r + 2u$, $u \in \mathbb{Z}$, (*)
— dosadíme a dělíme 2, $y = 2 - 4r - 3u$,
— posbíráme mezivýsledky a konstatujeme, že všechna řešení rovnice, parametrizována pomocí $r, u \in \mathbb{Z}$, jsou tvaru:

$$x = 2 + 3r,\ y = 2 - 4r - 3u,\ z = r + 2u.$$

▷ Přestože parametrizace řešení pomocí t, s a r, u jsou různé, skutečně popisují tutéž množinu (ověřte!). Uvedený postup lze mírně zefektivnit a snadno zobecnit pro libovolný počet neznámých; kdo si není úplně jistý jak, může nahlédnout do [HKŠ, str. ?].

Zajímavou příchuť mají úlohy tohoto typu, musíme-li se vypořádat s nějakými omezujícími podmínkami, viz např. následující cvičení.

Cvičení. V jisté speciální laboratoři smíme používat pouze laboratorní váhy o nosnosti 1056 g, 7 závaží o hmotnosti 105 g, 5 závaží o hmotnosti 119 g a 4 závaží o hmotnosti 161 g. Určete všechny způsoby, jak odvážit 84 g jisté látky (abyste nepolámali váhu). DÚ

Příklad s více neznámými a více rovnicemi. Snad někdy příště, prozatím zkuste následující Eulerovu úlohu:

Cvičení. Jistý farmář koupil na trhu vepře, kozy a ovce, celkem 100 kusů za 100 korun. Jeden vepř stál $3\frac{1}{2}$ koruny, koza $1\frac{1}{3}$ a ovce $\frac{1}{2}$ koruny. Kolik kusů od každého zvířete farmář koupil?

* * *

Pythagorejské trojice. .....

5. Eulerova věta a důsledky

Eulerova funkce, Eulerova věta, Fermatova věta, ...

6.

7.

8.

Reference

[E] Eukleides, *Základy*, Alexandria, kolem r. −300 (pro specifická vydání viz [B, J, V])

[H] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000

[S] I. Stewart, *Odsud až do nekonečna*, Argo a Dokořán, 2006

[MZ] S. Motl, Zahradník, *Pěstujeme lineární algebru*, ...

[HKŠ] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh I*, MU Brno, 1997

* * *

[B] *The elements of Euclid*, atraktivní obrázkové vydání prvních 6 knih od O. Byrneho, el. dostupné na `http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/`

[J] *Euclid's elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T. Heatha, el. dostupná na `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`

[V] *Eukleides, Základy, Knihy I–IV*, české vydání prvních 4 knih, jež zpracoval a komentářem opatřil P. Vopěnka podle překladu F. Servíta, O.P.S., 2008