Lineární zobrazení – cvičení

1. Rozhodněte, zda φ: $V^{(n)} \to V'^{(m)}$ je lineární zobrazení, jestliže platí:
   a) φ: $V^{(3)} \to V^{(3)}$; $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1; 2\,x_1x_2; x_3)$,
   b) φ: $V^{(2)} \to V^{(2)}$; $\varphi(x_1; x_2) = (x_1; x_1)$,
   c) φ: $V^{(3)} \to V^{(1)}$; $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_3)$,
   d) φ: $V^{(3)} \to V^{(1)}$; $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (\ln x_3)$,
   e) φ: $V^{(3)} \to V^{(3)}$; $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (x_1; 2\,x_1 + 5\,x_3; x_2 - 3x_3)$,
   f) φ: $V^{(3)} \to V^{(3)}$; $\varphi(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3; \sin x_2)$.

   Výsledky: a), d), f) – ne, b), c), e) – ano.

2. Určete matici **A** reprezentující lineární zobrazení φ: $V^{(n)} \to V'^{(m)}$ vzhledem ke kanonickým bázím v obou prostorech. Dále určete Im φ a Ker φ jejich bázemi pro lineární zobrazení φ, pro které platí:

   a) $\varphi(x; y; z) = (x + y - z; x - z; y)$, b) $\varphi(x; y) = (-x; 3y; x + y)$.

   Výsledky: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Im φ = <(1; 1; 0), (0; 1; 1)>, Ker φ = <(1; 0; 1)>,

   b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, Im φ = <(-1; 0; 1), (0; 3; 1)>, Ker φ = $\{\mathbf{o}\}$.

3. Určete matici lineární transformace φ: $V^{(3)} \to V^{(3)}$ vzhledem ke kanonické bázi, jestliže znáte obrazy tří lineárně nezávislých vektorů:

   φ(-1; 2; 3) = (2; 1; 0), φ(0; 1; 0) = (-1; 1; 1), φ(-1; 1; 1) = (1; 0; -2).

   Výsledek: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. Určete báze vektorových prostorů Im $\varphi_{\mathbf{A}}$ a Ker $\varphi_{\mathbf{A}}$ pro lineární transformaci φ: $V^{(3)} \to V^{(3)}$ s bázemi $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, vzhledem ke kterým

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -9 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Výsledek: Im φ = <(1; -3; 1), (2; 0; -1)>, Ker φ = <(3; -1; -1)>.

5. Určete charakteristické kořeny a charakteristické vektory matic:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 15 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Výsledky:
a) $\lambda_1 = 3$, $x_1 \in$ <(1; 1)>, $\lambda_2 = -3$, $x_2 \in$ <(1; -5)>, b) $\lambda_1 = 4$, $x_1 \in$ <(5; 1)>, $\lambda_2 = -2$, $x_2 \in$ <(1; -1)>,
c) $\lambda_1 = 10$, $x_1 \in$ <(1; 1)>, $\lambda_2 = 0$, $x_2 \in$ <(1; -9)>, d) $\lambda_1 = 16$, $x_1 \in$ <(4; -1)>, $\lambda_2 = 3$, $x_2 \in$ <(1; 3)>,
e) $\lambda_{1,2} = 2$, $x_{1,2} \in$ <(1; -1)>, f) charakteristická rovnice nemá reálné kořeny.

6. Určete charakteristické kořeny a charakteristické vektory matic:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Výsledky: a) $\lambda_{1,2} = 0$, $x_{1,2} \in$ <(0; 1)>, b) $\lambda_{1,2} = 0$, $x_{1,2} \in$ <(1; 0), (0; 1)>.

7. Určete charakteristický polynom, charakteristické kořeny a charakteristické vektory matic:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -6 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -16 & 9 & 3 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Výsledky:
a) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$, $\lambda_1 = 1$, $x_1 \in$ <(1;1;1)>, $\lambda_2 = 2$, $x_2 \in$ <(1;0;1)>, $\lambda_3 = 3$, $x_3 \in$ <(1;1;0)>,
b) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4$, $\lambda_1 = 4$, $x_1 \in$ <(1;1;1)>, $\lambda_{2,3} = 1$, $x_{2,3} \in$ <(1;0;-1), (0; 1; -1)>,
c) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$, $\lambda_{1,2,3} = 2$, $x_{1,2,3} \in$ <(0;0;1), (1; 2; 0)>,
d) $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$, $\lambda_{1,2,3} = -1$, $x_{1,2,3} \in$ <(1;1;-1)>,
e) $\lambda^3 - 12\lambda - 16$, $\lambda_{1,2} = -2$, $x_{1,2} \in$ <(1;-1;1)>, $\lambda_3 = 4$, $x_3 \in$ <(1;-1;0)>,
f) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda$, $\lambda_1 = 0$, $x_1 \in$ <(0;1;-1)>, $\lambda_2 = 2$, $x_2 \in$ <(-2;-3;7)>, $\lambda_3 = 4$, $x_3 \in$ <(0;1;3)>,
g) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$, $\lambda_1 = -1$, $x_1 \in$ <(11;20;-8)>, $\lambda_2 = 1$, $x_2 \in$ <(1;2;0)>, $\lambda_3 = 2$, $x_3 \in$ <(5;11;1)>,
h) $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9$, $\lambda_{1,2} = 3$, $x_{1,2} \in$ <(1;1;0), (1; 0; 1)>, $\lambda_3 = 1$, $x_3 \in$ <(2;-1;1)>.

8. Pokud je to možné, určete k maticím z úloh 5, 6 a 7 podobnou diagonální matici **D** a regulární matici **S** tak, aby platilo $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, kde **A** je daná matice.

Výsledky: **D** neexistuje pro matice z úloh 5e), f), 6 a) a 7 c), d),e). O existenci podobné diagonální matice **D** rozhodneme pomocí V3.9, matice **D** a **S** (pokud existují) určíme užitím V3.10. Potřebné charakteristické kořeny a k nim příslušné charakteristické vektory viz výsledky úloh 5, 6 a 7. Např. pro matici z úlohy 7g) je

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 20 & 2 & 11 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 108 & -51 & 21 \\ -16 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Lineární transformace φ: → $V^{(n)}$ je v kanonické bázi reprezentována maticí **A**. Rozhodněte, zda ve $V^{(n)}$ existuje báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, vzhledem ke které je φ reprezentována diagonální maticí **D**. V kladném případě určete některou z takových bází a jí odpovídající matici **D.** Úlohu řešte pro matice z úloh 5, 6 a 7.

   Výsledky: Taková báze neexistuje pro matice z úloh 5e), f), 6 a) a 7 c), d),e). Pro řešení užijeme V3.8. Potřebné charakteristické kořeny a k nim příslušné charakteristické vektory viz výsledky úloh 5, 6 a 7. Např. pro matici z úlohy 5a) je $\mathbf{u}_1 = (1; 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1; -5)$ a

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

10. Zjistěte, zda lineární zobrazení φ: $V^{(n)} \to V^{(n)}$ je ortogonální transformací vektorového prostoru $V^{(n)}$, jestliže je vzhledem k dané ortonormální bázi reprezentováno maticí:

$$a)\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad c)\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 12 & 3 & -4 \\ 4 & -12 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Výsledky: a) ano, b) ne, c) ano.

11. Určete parametry p, q, r tak, aby φ: $V^{(3)} \to V^{(3)}$ bylo ortogonální transformací $V^{(3)}$, jestliže je vzhledem k dané ortonormální bázi reprezentováno maticí:

$$a)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ p & q & r \end{pmatrix}, \quad b)\ \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ p & q & r \end{pmatrix}.$$

   Výsledky: a) $p = 2$, $q = -2$, $r = 1$, nebo $p = -2$, $q = 2$, $r = -1$, b) úloha nemá řešení.

12. Jsou dány matice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

   a) Dokažte, že $\mathbf{A}_\alpha$ a $\mathbf{B}_\alpha$ jsou ortonormální matice pro každé $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

   b) Určete charakteristické kořeny daných matic v závislosti na $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

   c) Dokažte, že $x_1 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\ ;\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)$, $x_2 = \left(-\sin\frac{\alpha}{2}\ ;\ \cos\frac{\alpha}{2}\right)$ jsou charakteristické vektory matice $\mathbf{A}_\alpha$ pořadě příslušné ke kořenům $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$.

   d) Pokud existují, určete charakteristické vektory matice $\mathbf{B}_\alpha$.

   e) Pokud existují, určete k maticím $\mathbf{A}_\alpha$ a $\mathbf{B}_\alpha$ podobné diagonální matice **D** a regulární matici **S** tak, aby platilo $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_\alpha\mathbf{S}$ a $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}$.

   f) Dokažte, že matice $\mathbf{B}_\alpha$ a $\mathbf{B}_{-\alpha}$ jsou podobné.

   Výsledky řešení úlohy č. 12 budou využity v kapitole Shodná zobrazení. Proto bude řešení této úlohy dáno k dispozici v písemné formě.

Poznámka: Většina úloh je z publikace Kadleček, J., Troják, J. *Geometrie III. Geometrická zobrazení.* (Přehled látky s řešenými příklady) Praha: SPN 1984.