Podobná zobrazení - cvičení

1. Zobrazení f je vzhledem ke KASS určeno rovnicí $f \equiv \mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že f je vlastní podobnost příslušného prostoru $E^{(n)}$, určete její koeficient k, střed S a samodružné směry a rozhodněte, jde-li o podobnost přímou či nepřímou. Potom f rozložte na stejnolehlost h a shodnost z. Uveďte druh shodnosti z a pro obě zobrazení z rozkladu $f = hz$ uveďte jejich určující prvky.

Výsledky: $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 25\mathbf{E}$, $k = 5$, $S = \left[-\frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right]$, přímá, samodružné směry neexistují, $h \equiv \mathbf{X}' = 5.\mathbf{X}$, střed h je v počátku, $z \equiv \mathbf{X}'' = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{5}\mathbf{A} = \mathbf{B}_\alpha$, $\alpha = 53°\,7'\,48''$, z je rotace se středem $Q = [-5; 10]$.

2. Úlohu č. 1 řešte pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledky : $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 9\mathbf{E}$, $k = 3$, $S = [\,0, 0, 0\,]$, nepřímá, $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{x}_1 \in \langle (1, 0, 0) \rangle$, $h \equiv \mathbf{X}' = 3.\mathbf{X}$, střed h je v počátku, $z \equiv \mathbf{X}'' = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{X}$, $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{3}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha = 33°33'\,26''$, z je otočené zrcadlení složené z otočení kolem osy x o úhel α a souměrnosti podle roviny $\rho \equiv x = 0$.

3. Úlohu č. 1 řešte pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Výsledky: $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 4\mathbf{E}$, $k = 2$, nepřímá podobnost, $S = [\,1, 0, 0\,]$, $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = -2$, charakteristickým podprostorem příslušným k $\lambda_{1,2}$ je $Z(\rho)$, $\rho \equiv -x + y + \sqrt{2}\,z = 0$, $\mathbf{x}_3 \in \langle (-\sqrt{2}, \sqrt{2}; 2) \rangle$, $h \equiv \mathbf{X}' = 2.\mathbf{X}$, $z \equiv \mathbf{X}'' = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\mathbf{A}$; z nemá samodružné body, je posunutým zrcadlením - v tabulce pro $E^{(3)}$ je to jediná shodnost bez samodružných bodů, která má alespoň dva různé sa modružné směry, ale ne každý. Určení samodružné roviny $\sigma : \sigma \parallel \rho$, $\sigma \equiv x - y - \sqrt{2}\,z + c = 0$, pro všechna y, z bod $M = [\,y + \sqrt{2}\,z + c; y; z\,]$ leží v σ, také jeho obraz M'' ve shodnosti z leží v σ, dosazením souřadnic bodu M'' do rovnice roviny σ dostaneme $c = \frac{3}{2}$, $\sigma \equiv 2x - 2y - 2\sqrt{2}\,z + 3 = 0$.

4. Podobnost f z úlohy č. 3 je možno rozložit na souměrnost z podle roviny ρ' procházející středem podobnosti S a stejnolehlost h (v tomto pořadí, tj. $f = zh$). Určete rovnice obou zobrazení z tohoto rozkladu a určující prvky obou zobrazení.

Výsledky : Rovina souměrnosti $\rho' \parallel \rho$, $\rho' \equiv x - y - \sqrt{2}\,z + 1 = 0$, ,

rovnici $z \equiv \mathbf{X}' = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{K}$, $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\mathbf{A}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, určíme dle V 23,

$h \equiv \mathbf{X}'' = 2.\mathbf{X}' + \mathbf{D}$, po dosazení za $\mathbf{X}'$ z rovnice souměrnosti z dostaneme $2.\mathbf{K} + \mathbf{D} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{D}$. Střed h je S.

$$h \equiv \mathbf{X}'' = 2.\mathbf{X}' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Úlohu č. 1 řešte pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledky: $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 4\mathbf{E}$, f je přímá podobnost s koeficientem $k = 2$, S splývá s počátkem, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}_1 \in \langle (1; 0; 0) \rangle$, $h \equiv \mathbf{X}' = 2\mathbf{X}$, středem h je střed podobnosti S, $z \equiv \mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_\alpha \end{pmatrix}\mathbf{X}'$, kde $\alpha = 45°$; z je rotace kolem osy x o $45°$.

6. Úlohu č. 1 řešte pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Výsledky: $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 25\mathbf{E}$, f je nepřímá podobnost, $k = 5$, $S = \left[0; -\frac{1}{4}\right]$, $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{x}_1 \in \langle (2; 1) \rangle$, $\lambda_2 = -5$, $\mathbf{x}_2 \in \langle (1; -2) \rangle$, $h \equiv \mathbf{X}' = 5\mathbf{X}$, střed h je v počátku KASS, $z \equiv \mathbf{X}'' = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{X}' + \mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{5}\mathbf{A}$, z je posunutá souměrnost, složená z osové souměrnosti $o \equiv \mathbf{X}''' = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{X}' + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ podle osy $o \equiv 2x - 4y - 3 = 0$ a posunutí $t \equiv \mathbf{X}'' = \mathbf{X}''' + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f = hz = h(ot)$.

7. V zobrazení $f : E^{(2)} \to E^{(2)}$ jsou obrazem bodů $A = [-3; 1]$, $B = [4; 3]$, $C = [2; -5]$ po řadě body $A' = [-3; 43]$, $B' = [56; -31]$, $C' = [-50; -47]$. Přesvědčete se, že f je podobnost prostoru $E^{(2)}$, určete její koeficient a maticovou rovnici.

Výsledky: Užijeme větu 2, $k = 13$, $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. Určete maticovou rovnici podobnosti f v $E^{(2)}$, která vznikne složením stejnolehlosti h se středem $S = [1; 2]$ a koeficientem $\kappa = 3$, se souměrností podle osy $o \equiv 2x - 3y + 1 = 0$ v tomto pořadí, tj. $f = ho$.

Výsledky:

$$h \equiv \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad o \equiv \mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}\mathbf{X}' + \begin{pmatrix} -\frac{4}{13} \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix}, \quad f \equiv \mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} \frac{15}{13} & \frac{36}{13} \\ \frac{36}{13} & -\frac{15}{13} \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -\frac{62}{13} \\ \frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

9. Jsou dány stejnolehlosti h_1 se středem $S_1 = [-2; 2]$ a koeficientem $\kappa_1 = -\frac{1}{2}$, h_2 se středem $S_2 = [3; -13]$ a koeficientem $\kappa_2 = 3$. Určete, jaké zobrazení vznikne složením daných stejnolehlostí h_1, h_2 v tomto pořadí, napište jeho maticovou rovnici a uveďte jeho určující prvky.

Výsledky: Užijeme Mongeovu větu o skládání stejnolehlostí, $h_1 h_2$ je stejnolehlost s koeficientem $\kappa = -\frac{3}{2}$ a středem $S = [-6; 14]$, $h_1 h_2 \equiv \mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -15 \\ 35 \end{pmatrix}$.

Podobná zobrazení - cvičení

Úloha č. 2 - řešení

1. $$A^TA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 3^2E \Rightarrow$$

f je vlastní podobnost s koeficientem $\underline{k = 3}$

2. $|A| = -\frac{75}{4} - \frac{33}{4} < 0 \Rightarrow f$ je podobnost <u>nepřímá</u>

3. Samodružný bod - střed podobnosti:

$$\underline{(A-E)X = 0} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{11} \\ 0 & \sqrt{11} & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{11} \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ determinant

homogenní soustavy (1) je různý od 0 $\Rightarrow$ soustava má pouze triviální řešení $\Rightarrow \underline{S = [0,0,0]}$

4. Samodružné směry: $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(3+\lambda)\Big[\underbrace{\left(\tfrac{5}{2}-\lambda\right)\left(\tfrac{5}{2}-\lambda\right)+\tfrac{11}{4}}_{\text{nemá reálný kořen}}\Big] = 0$$

$\underline{\lambda_1 = -3}$

Existuje pouze jeden reálný char. kořen $\lambda_1 = -3$.

charakteristický vektor

$$\lambda_1 = -3: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \sim \cdots$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -\sqrt{11} \\ 0 & 12\sqrt{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow x_3 = 0 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \end{matrix}$$

$\Downarrow$

x_1 libov. r. číslo

$$\underline{\vec{x}_1 \in \langle (1,0,0) \rangle}$$

5. Rozklad

$$h \equiv X' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X$$

$3^3 > 0 \Rightarrow h$ je podobnost přímá, takže z musí být shodnost nepřímá

$$z \equiv X'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} X'$$

$$f \equiv hz \equiv X'' = 3.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} X'$$

$$X'' = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix} X \qquad B_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{11}}{6} \\ \frac{\sqrt{11}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \underline{\alpha = 33°33'26''}$$

Z tabulky shodností v $E^{(3)}$ (tab. 2) plyne: protože z je nepřímá shodnost, která má právě jeden samodružný směr (druhý sloupec tabulky), je z <u>otočené zrcadlení</u> složené z otočení kolem osy x_1 o úhel $\alpha = 33°33'26''$ a souměrnosti podle roviny $\rho \equiv x_1 = 0$.

Úloha č. 4 - řešení

Rozklad, popsaný v zadání úlohy je možný, protože daná podobnost f je nepřímá, takže shodnost v rozkladu f

musí být rovněž nepřímá (neboť stejnolehlost s koeficientem $\varkappa = 3$ je podobnost přímá). O této shodnosti z víme, že má alespoň dva různé samodružné směry, ale ne každý. V příslušném 3. sloupci tabulky shodností v $E^{(3)}$ jsou nepřímé shodnosti dvě: a) posunuté zrcadlení, které jsme již užili v rozkladu v úloze 3, b) souměrnost dle roviny, kterou užijeme v rozkladu nyní – zvolíme ji jako první zobrazení v rozkladu $f = z\,h$. 1)

Za rovinu souměrnosti bychom mohli zvolit libovolnou rovinu $\rho' \parallel \rho$ (ρ viz úloha č. 3). Rovinu ρ' zvolíme tak, aby $S \in \rho'$, jak se požaduje v zadání úlohy č. 4.

$$\rho' \parallel \rho \Rightarrow \rho' \equiv -x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 + c = 0.$$

$$S \in \rho' \Rightarrow -1 + c = 0$$

$$c = 1 \Rightarrow \underline{\rho' \equiv -x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 + 1 = 0.}$$

Rovnici souměrnosti dle roviny ρ' určíme dle V23S:

$$x_i' = x_i - \frac{2a_i}{a_1^2 + \dots + a_n^2}(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a)$$

$$z \equiv x_1' = x_1 + \frac{2}{1+1+2}(-x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 + 1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 + \frac{1}{2}$$

$$x_2' = x_2 - \frac{2}{4}(-x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 + 1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 - \frac{1}{2}$$

$$\underline{x_3' = x_3 - \frac{2\sqrt{2}}{4}(-x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \qquad - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$z \equiv X' = \bar{A}X + K, \text{ kde } \bar{A} = \frac{1}{2}A$$

---

1) Jde o jiný rozklad než v úloze č. 3. V rozkladu této podobnosti bude jiná shodnost a jiná stejnolehlost. Shodností, která je v zadání úl. č. 4 určena, proto začneme, stejnolehlost h vyjde.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Poznámka: matici $\bar{A}$ jsme nemuseli určovat pomocí V23S, protože $\bar{A} = \frac{1}{2}A$. V23S nám posloužila pro určení K.

Rozklad: $f = z\,h$

$$z \equiv X' = \bar{A}X + K$$

$$\underline{h \equiv X'' = 2X' + D} \qquad \text{střed } h \text{ není v počátku}$$

$$z\,h \equiv X'' = 2(\bar{A}X + K) + D = 2\bar{A}X + 2K + D = AX + B \Rightarrow$$

$$2K + D = B$$

$$D = B - 2K$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Závěr:

$$z \equiv X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$h \equiv X'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X' + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = z\,h$$

Poznámka: Střed podobnosti $S = [1, 0, 0]$ je samodružným bodem (středem) podobnosti f. Protože $S \in \rho'$ je S samodružný v z, musí být samodružný i v h, tj. S je střed stejnolehlosti $h \equiv X'' = \underbrace{\varkappa X' + (1-\varkappa)S}_{\text{rovnice } h \text{ se středem } S}$, což souhlasí.