

Didaktika matematiky 1: DĚLITELNOST CELÝCH ČÍSEL

1) Dokažte:

- Součet každých dvou lichých čísel je číslo sudé.
- Součet každých dvou sudých čísel je číslo sudé.
- Součet libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je číslo liché.
- Součin každých dvou lichých čísel je číslo liché.
- Součin každých dvou sudých čísel je číslo sudé a je dělitelné čtyřmi.
- Součin libovolného lichého a libovolného sudého čísla je číslo sudé.
- Součet dvou lichých po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný čtyřmi.

2) Jestliže čísla a, b nejsou dělitelná třemi, pak je vždy jedno z čísel a_+, a_- dělitelné třemi. Dokažte.

3) Jestliže p je prvočíslo větší než tři, pak je vždy jedno z čísel p_+, p_- dělitelné šesti. Dokažte.

4) Jestliže p je prvočíslo větší než tři, pak je číslo p^2_+ dělitelné číslem 24. Dokažte.

5) Dokažte, že rozdíl dvou kladných trojčiferných čísel, z nichž první je zapsáno v desítkové soustavě týmiž číslicemi jako druhé, avšak v opačném pořadí, je dělitelný čísly 9 a 11.

6) Dokažte:

- Druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná osmi.
- Rozdíl druhých mocnin dvou libovolných lichých čísel je dělitelný osmi.
- Součet třetích mocnin tří za sebou jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.
- Součet tří po sobě následujících čísel, z nichž první a třetí jsou lichá, je dělitelný šesti.

7) Je-li a_- libovolné číslo, pak vždy jedno z čísel a^2_-, a, a^2_+ je dělitelné pěti. Dokažte.

8) Jestliže přirozené číslo a není dělitelné sedmi, pak jedno z čísel a^2_+, a^2_- je dělitelné sedmi. Dokažte.

9) Dokažte, že číslo $2_{+}^{\dots}_{+}^{\dots}_{+}^{\dots}_{+}^{\dots}$ je dělitelné třemi.

10) Dokažte, že číslo $4_{+}^{\dots}_{+}^{\dots}_{+}^{\dots}_{+}^{\dots}$ je dělitelné pěti.

11) Dokažte, že číslo $A_{-} = \frac{1.12222}{\text{čísler kcifer}}$ je rovno součinu dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. (např. $12 = 3 \cdot 4$, $1122 = 33 \cdot 34$ atd.)

12) Jestliže trojčiferné číslo tvaru ABC je dělitelné 37, pak každé číslo BCA nebo CAB je dělitelné 37. Dokažte.

13) Dokažte, že jestliže k libovolnému trojčifernému číslu připišeme zprava totéž číslo, že takto vzniklé šesticiferné číslo je dělitelné čísly 7, 11, 13.

14) Je-li a libovolné přirozené číslo, pak je číslo a^2_-, a_+ dělitelné číslem 24. Dokažte.

15) Určete, zda čísla 411, 573, 1007, 2773 jsou prvočísla nebo čísla složená.

16) Doplňte, je-li to možné, chybějící číslice v daných číslech tak, aby vzniklo číslo, které je dělitelné: a) devíti b) jedenácti c) dvanácti.

37_46, 536_4, 378__

Pokud je to možné, najděte všechny možnosti.

17) Najděte přirozené číslo, pro které platí současně: při dělení třemi dává zbytek 1, při dělení čtyřmi dává zbytek 2, při dělení pěti dává zbytek 3 a při dělení šesti dává zbytek 4.

18) Ověřte, že platí: $n^6 \equiv n^3 \pmod{42}$ a $n^3 \equiv n^6 \pmod{264}$.

19) Jaké číslice musíme doplnit, aby pěticiferné číslo 5 _ 3 _ 8 bylo dělitelné číslem 24.

20) Zvolte si tři různá trojčiferná čísla a určete jejich největšího společného dělitele.

21) Zvolte si tři různá dvojciferná čísla a určete jejich nejmenší společný násobek.

22) Kolik různých obdélníků lze sestavit z 225 čtvercových dlaždic tak, aby bylo všech dlaždic použito?

23) Kolika způsoby můžeme zaplatit částku 39 Kč pouze dvoukorunovými a pěti korunovými mincemi?

24) Určete trojčiferná čísla, která při dělení třemi dávají zbytek 2 a zároveň při dělení sedmi dávají zbytek 5.

25) Dokažte nebo vyvráťte věty:

a) Součet dvou po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 3.

b) Součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 7.

c) Jestliže je přirozené číslo dělitelné dvěma a šesti, pak je dělitelné dvanácti.

d) Jestliže je přirozené číslo dělitelné třemi a čtyřmi, pak je dělitelné dvanácti.

e) Každé číslo ve tvaru $10^a - 1$, kde a je přirozené číslo, je dělitelné číslem 18.

f) Číslo $3^a - 1$ je dělitelné osmi pro každé přirozené a .

g) Necht' p je prvočíslo větší než 3. Pak $2p^2 - 1$ je vždy dělitelné třemi.

h) Necht' p je prvočíslo větší než 2. Pak $3p^2 - 1$ je vždy dělitelné čtyřmi.

26) Najděte nejmenší přirozené číslo, které je násobkem všech čísel od 1 do 10.

27) Do přístavu připlouvají parníky. První se vrací každé 4 týdny, druhý za 8 týdnů, třetí za 12 týdnů a čtvrtý za 16 týdnů. Vypluly 2. ledna. Setkají se ještě v tomto roce v přístavu?

28) Podnikatel chtěl objednat výrobu kartónových krabic na balení krabiček čaje o rozměrech 13 cm, 7 cm, 5 cm. Jaké budou rozměry krabice, jestliže v ní má být umístěno minimálně 60 krabiček čaje. Bylo by reálné, aby krabice měla tvar krychle?

29) Věk kapitána vynásobený šířkou lodí, počtem jeho dcer a počtem synů je 5406. Určete, kolik je kapitánovi roků, kolik má dětí a jak široká je jeho loď.