Binární relace II
(binární relace v množině – uspořádání, ekvivalence)

Binární relace v množině M je kterákoliv podmnožina kartézského součinu M x M.

Příklad:
1. Je dána množina M = {1,2,3,4,5}. Zapište následující relace výčtem prvků.

$R_1 = \{[x,y] \in M \times M;\ x + 2 = y\}$

(zápis čteme: „Relace R_1 je množina všech uspořádaných dvojic [x,y] z kartézského součinu M x M, pro které platí, že x + 2 = y - tedy druhá složka je o 2 větší než první složka.“)

$R_2 = \{[x,y] \in M \times M;\ x > y\}$
$R_3 = \{[x,y] \in M \times M;\ x < y \wedge x + y = 4\}$
$R_4 = \{[x,y] \in M \times M;\ x$ je násobkem $y\}$
$R_5 = \{[x,y] \in M \times M;\ x = y\}$
$R_6 = \{[x,y] \in M \times M;\ x$ dává při dělení dvěma stejný zbytek jako y při dělení dvěma$\}$.
Je některá z uvedených relací zobrazení v množině M? Pokud ano, určete přesně typ zobrazení.

2. Uvažujte množinu O všech osob v dané místnosti (posluchárně, v sále kina) a na této množině binární relace S_1 - S_5 . Uvažujte o tom, z jakých uspořádaných dvojic osob se tyto relace skládají.:

$S_1 = \{[x,y] \in O \times O;\ x$ je v abecedě před $y\}$
$S_2 = \{[x,y] \in O \times O;\ x$ je narozen ve stejném měsíci jako $y\}$
$S_3 = \{[x,y] \in O \times O;\ x$ je starší než $y\}$
$S_4 = \{[x,y] \in O \times O;\ x$ je na mateřské dovolené a y neviděl film Vratné lahve$\}$
$S_5 = \{[x,y] \in O \times O;\ x$ má stejný počet dětí jako $y\}$

Binární relace S_1, S_3, R_2 jsou tzv. relace **uspořádání**. Určují pořadí prvků v množině, na níž jsou definovány. Uveďte výčtem prvků takto uspořádané množiny - nyní již záleží na pořadí. Např.
$\lfloor M \rfloor = \lfloor \{5,4,3,2,1\} \rfloor$, je množina M uspořádaná relací R_2.
$\lfloor O1 \rfloor$ je množina osob O uspořádaných podle abecedy (tedy uspořádáním S_1),
$\lfloor O2 \rfloor$ je množina osob O uspořádaných podle stáří od nejstaršího (tedy uspořádáním S_3).

Binární relace S_2, S_5 jsou tzv**. relace ekvivalence** na množině O.
Relace R_5, R_6 jsou **ekvivalence** na množině M.
Jsou to takové relace, které vytvářejí **rozklad** množiny, na níž jsou definované. Tato množina se rozpadá na podmnožiny (říkáme třídy rozkladu). Přitom do téže třídy rozkladu patří ty prvky z původní množiny, které „ jsou spolu v uspořádané dvojici“, tedy jsou vázané vztahem popsaným v příslušné relaci)

Rozklad množiny A je systém neprázdných podmnožin množiny A, tzv. tříd rozkladu, takových, že každý prvek z množiny A patří právě do jedné třídy rozkladu.
(Jinak můžeme také říci, že žádné dvě třídy rozkladu nemají společné prvky a současně sjednocení všech tříd rozkladu je původní množina.)

Příklad:

- Rozklad množiny M vytvořený relací R_6: {{1, 3, 5}, {2, 4}} .

- Rozklad množiny M vytvořený relací R_5: {{1}, {2},{3},{4},{5}}

- V každé třídě rozkladu množiny O vytvořeného relací S_2 budou osoby, které se narodily ve stejném měsíci. Tzn., že rozklad bude obsahovat nejvýše 12 tříd rozkladu.

- Rozklad množiny O vytvořený relací S_5 bude obsahovat třídu osob, které nemají žádné dítě, další třídu osob, které mají 1 dítě, další třídu osob, které mají 2 děti atd. (jako třídy rozkladu neuvažujeme prázdné množiny).