Rozvoj matematických představ 1. - Příklady

Helena Durnová

prosinec 2010

Přehled okruhů - RMP 1

(Převzato z materiálů pro dálkové studium)

1. Výrok. Negace výroku. Složené výroky (logické spojky: konjunkce, disjunkce, ostrá disjunkce, implikace, ekvivalence)
2. Výroková forma. Výroková formule, pravdivostní ohodnocení výrokových formulí
3. Kvantifikované výroky: obecný a existenční kvantifikátor, negace kvantifikovaných výroků.
4. Množina. Podmnožina. Doplněk množiny.
5. Sjednocení dvou množin. Průnik, rozdíl, symetrický rozdíl dvou množin. Využití množinových diagramů k řešení úloh.
6. Kartézský součin dvou množin.
7. Binární relace z množiny do množiny. Binární relace na množině, Uspořádání množiny. Ekvivalence na množině a rozklad množiny.
8. Zobrazení z množiny do množiny. Typy zobrazení: prosté, vzájemně jednoznačné.
9. Přirozená čísla: zavedení a základní vlastnosti. Operace s přirozenými čísly. Vytváření pojmu přirozeného čísla. Přirozená čísla a předškoláci.

Literatura (základní)

1 Růžena Blažková: *Rozvoj matematických pojmů a představ u dětí předškolního věku.*

`http://is.muni.cz/elportal/?id=893208`

Výroky

Definice 1 Výrok *je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, že je pravdivé nebo že pravdivé není.*

Negace výrokuA: $\neg A$

Konjunkce (A a zároveň B): $A \wedge B$

Disjunkce (A nebo B): $A \vee B$

Implikace (když A, pak B): $A \Rightarrow B$

Ekvivalence (A právě tehdy když B): $A \Leftrightarrow B$

Tautologie: výrok, který je vždy pravdivý

Kontradikce: výrok, který není nikdy pravidvý

Příklad 2 Napište negace následujících výroků:

1. Neexistují neomylní učitelé.
   [Existuje alespoň jeden neomylný učitel.]
2. Existují omylní učitelé.
   [Všichni učitelé jsou neomylní.]
3. Každý učitel je omylný.
   [Alespoň jeden učitel je neomylný.]
4. Žádný učitel není neomylný.
   [Alespoň jeden učitel je neomylný.]
5. Jen omylní lidé jsou učitelé.
   [Alespoň jeden neomylný člověk je učitelem.]
6. Žádný učitel není omylný.
   [Existuje alespoň jeden neomylný učitel.]
7. Jen ti lidé, kteří jsou učiteli, mohou být omylní.
   [Existue alespoň jeden člověk, který není učitelem a je omylný.]

8. Nejen omylní lidé jsou učiteli.

   [Žádný neomylný člověk není učitelem.]

Příklad 3 Sestavte tabulku pravdivostních hodnot následujících složených výroků:

(D) $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(\neg B \vee \neg A)$

(E) $\neg(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$

(F) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

(G) $(A \vee B) \wedge C$

(H) $(A \wedge C) \vee B$

(J) $[(A \vee B) \wedge C] \Rightarrow [(A \wedge C \vee B)]$

(K) $A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$

(L) $\neg(B \wedge C)$

(M) $[A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)] \Leftrightarrow [\neg(B \wedge C)]$

(N) $[(A \Rightarrow B) \wedge B] \Rightarrow A$

(P) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(Q) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

Řešení:

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Příklad 4 Napište negace následujících výroků (s kvantifikátory):

1. Všechna zvířata mají čtyři nohy.

   [Alespoň jedno zvíře nemá čtyři nohy.]

2. Existuje ryba, která mluví.

   [Žádná ryba nemluví.]

3. Existuje nejméně 5 druhů sladkovodních ryb.

   [Existují nejvíce 4 druhy sladkovodních ryb.]

4. Aspoň jeden jehličnatý strom na zimu opadává.
   [Žádný jehličnatý strom na zimu neopadává.]
5. V Evropě rostou alespoň dva druhy borovic.
   [V Evropě roste nejvýše jeden druh borovice.]
6. Duha obsahuje všechny základní barvy.
   [Alespoň jedna základní barva není obsažena v duze.]
7. Každou barvu lze namíchat ze základních barev.
   [Alespoň jednu barvu nelze namíchat ze základních barev.]

Množiny a operace s nimi

Definice 5 *Soubor prvků nazýváme* množinou. *Množiny označujeme zpravidla velkými písmeny latinské abecedy.*

x je prvkem A: $x \in A$;

A je podmnožinou B: $A \subset B$;

A je podmnožinou nebo je rovno B: $A \subseteq B$;

Sjednocení dvou množin: $A \cup B$;

Průnik dvou množin: $A \cap B$;

Rozdíl dvou množin: $A \setminus B$;

Doplněk množiny A vzhledem k množině M (platí $A \subseteq M$: $\overline{A} = M \setminus A$);

Kartézský součin dvou množin A, B: $A \times B$ (kartézský součin je množina uspořádaných dvojic, v nichž první prvek je z množiny A a druhý prvek z množiny B).

Příklad 6 Ukažte, že platí následující tvrzení (pomocí Vennových diagramů)

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

Příklad 7 Rozhodněte,která z následujících množinových inkluzí platí:

1. $A \setminus (B \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$
2. $A \setminus (B \cup C) \subset A \setminus (B \setminus C)$

   [platí 1.]

Příklad 8 Ukažte, že platí následující tvrzení:

* $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$, pokud $C \subset A$
* $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

Relace a zobrazení

Definice 9 Relací *na množině A nazýváme podmnožinu kartézského součinu $A \times A$; tj. prvky relace jsou některé uspořádané dvojice prvků množiny A:* $R \subseteq A \times A$

Vlastnosti relace

Relace symetrická: pro $\forall a, b \in A$ *platí:* $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$

Relace reflexivní: pro $\forall a \in A$ *platí:* $(a, a) \in R$

Relace antisymetrická: pokud $(a, b) \in A \wedge (b, a) \in A)$*, pak:* $a = b$

Relace tranzitivní: pro $\forall a, b, c \in A$ *platí:* $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Leftrightarrow (a, c) \in R$

Relaci, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní nazýváme uspořádání*. Tuto relaci lze zakreslit* hasseovským diagramem*.*

Relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní nazýváme ekvivalence*. Ke každé ekvivalenci přísluší* rozklad*.*

Příklad 10 Relaci na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zadanou výčtem zapište do tabulky a určete, zda je

(a) reflexivní,

(b) symetrická,

(c) antisymetrická,

(d) tranzitivní,

(e) uspořádání,

(f) ekvivalence.

V případě, že se jedná o uspořádání, nakreslete hasseovský diagram zadané relace; v případě, že se jedná o ekvivalenci, najděte příslušný rozklad.

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$;

[reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranziivní, uspořádání, ekvivalence, rozklad: jednoprvkové množiny 1,2,3,4,5,6]

$S = R \cup \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3)\}$;

[reflexivní, symetrická, tranziivní, ekvivalence, rozklad: dvouprvkové množiny 14, 25, 36]

$T = R \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)\}$

[reflexivní, antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

$P = R \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$

[reflexivní, antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

$Q = R \cup \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$

[reflexivní antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

Definice 11 *Relace $f \subset A \times B$ se nazývá zobrazením, pokud je každému prvku množiny A přiřazen nejvýše jeden prvek množiny B (tj. žádný prvek množiny A nelze zobrazit na dva různé prvky).*

Zobrazení se nazývá

prosté*, pokud má každý prvek množiny B právě jeden vzor;*

“na”*, pokud má každý prvek množiny B alespoň jeden vzor;*

vzájemně jednoznačné*, pokud má každý prvek množiny A právě jeden obraz a každý prvek množiny B právě jeden vzor.*

Příklad 12 Určete, která z následujících zobrazení jsou vzájemně jednoznačná; která jsou prostá; a která jsou 'na'. Nakreslete názorný obrázek.

$A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,3,4,5\}, f = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,2)\}$

[prosté]

$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}, f = \{(1,1),(2,3),(3,4)\}$

[prosté]

$A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c,d\}, f = \{(1,d),(2,a),(3,c),(4,b)\}$

[prosté a na, tj. vzájemně jednoznačné]

Přirozená čísla a operace s nimi

Definice 13 *Binární operace* $+$ *a* $\cdot$ *na množině přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *jsou*

komutativní, tj. platí $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$*;*

asociativní, tj. platí $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*;*

Dále platí distributivní zákon: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$*.*

Příklad 14 *Sečtěte následující čísla ve dvojkové soustavě*

1. $10101 + 1011$
   [100000]
2. $10111 + 10101$
   [101100]
3. $11001 + 10001$
   [101010]
4. $11111 + 11111$
   [111110]

Příklad 15 Zapište následující čísla vyjádřená římskými číslicemi v poziční desítkové soustavě:

1. XLIII
   [43]
2. MCM
   [1900]
3. MDCCCLIV
   [1854]
4. MXMIX
   [1999]
5. MDCXVIII
   [1618]