9. Těleso komplexních čísel

V 8. kapitole (věta 8.2 (b)) jsme viděli, že v tělese reálných čísel nemá binomická rovnice $x^n = \alpha$ řešení pro záporné reálné α a sudé přirozené číslo n ($n \geq 2$). Speciálně nejjednodušší taková rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá řešení v reálných číslech. Proto se konstruuje nadtěleso tělesa reálných čísel – těleso komplexních čísel, ve kterém rovnice $x^2+1 = 0$ řešení má. Ukazuje se pak, že v tomto tělese komplexních čísel má každá binomická rovnice n-tého stupně právě n řešení.

Hlavní důvod pro konstrukci komplexních čísel však spočívá v tom, že pomocí nich je možné řešit některé úlohy, jejichž formulace i řešení jsou z oboru reálných čísel. Příkladem jsou Cardanovy vzorce (9.23), pomocí nichž je možné spočítat reálné kořeny kubického polynomu s reálnými koeficienty.

9.1. Věta. *Těleso reálných čísel* $\mathbb{R}$ *lze vnořit do tělesa, ve kterém má rovnice* $x^2 + 1 = 0$ *řešení.*

Důkaz. Položme $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{[a, b] \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$. Pro $\alpha = [a, b] \in \mathbb{C}$, $\beta = [c, d] \in \mathbb{C}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, položíme

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= [a + c, b + d], \\ \alpha \cdot \beta &= [ac - bd, ad + bc]. \end{aligned}$$

Pak + a · jsou zajisté operacemi na množině $\mathbb{C}$. Zřejmě $(\mathbb{C}, +)$ je komutativní grupa, neboť $[0, 0]$ je její nulový prvek a pro libovolné $\alpha = [a, b] \in \mathbb{C}$ je opačným prvkem $-\alpha = [-a, -b]$.

Dále je vidět, že $(\mathbb{C}, \cdot)$ je komutativní grupoid s jednotkovým prvkem $[1, 0]$ a lze ukázat, že tento grupoid je asociativní. Operace + a · jsou svázány distributivním zákonem, a tudíž $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativním okruhem s jednotkovým prvkem $[1, 0]$.

Ukažme, že okruh $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je tělesem. Nechť $\alpha = [a, b] \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Pak $a^2 + b^2 \neq 0$, a tudíž můžeme položit $\xi = [\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}]$. Pak $\alpha \cdot \xi = \xi \cdot \alpha = [1, 0]$, tudíž $\xi = \alpha^{-1}$ pro libovolné nenulové α, takže $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je tělesem.

Položme nyní $i = [0, 1]$. Pak $i^2 = [-1, 0]$, a tedy $i^2 + [1, 0] = 0$. Rovnice $x^2 + 1 = 0$ má proto v $\mathbb{C}$ řešení.

Pro $r \in \mathbb{R}$ položíme $\psi(r) = [r, 0]$. Promyslete si, že ψ je opravdu vnořením tělesa $\mathbb{R}$ do tělesa $\mathbb{C}$. Věta je tím dokázána.

9.2. Definice. Těleso $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ zkonstruované v důkazu předchozí věty se nazývá *těleso komplexních čísel*, označuje se písmenem $\mathbb{C}$ a prvek z množiny $\mathbb{C}$ se nazývá *komplexní číslo*. Vnoření ψ nazveme *kanonické vnoření tělesa* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{C}$. Reálné číslo r se ztotožňuje se svým obrazem při kanonickém vnoření ψ. Tudíž $r = [r, 0]$ a těleso reálných čísel je proto podtělesem tělesa komplexních čísel ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$). Prvek $[0, 1]$ se označuje symbolem i a nazývá se *imaginární jednotka*.

Za této úmluvy pak pro komplexní číslo $\alpha = [a, b]$ platí:

$$\alpha = [a, 0] + [b, 0] \cdot [0, 1] = a + bi.$$

Dostáváme tak tzv. *algebraický tvar* komplexního čísla.

Je-li $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pak pro operace s komplexními čísly platí následující vztahy:

$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i,$$

$$\alpha \cdot \beta = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

pro $\alpha \neq 0$ je

$$\alpha^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Těleso komplexních čísel je v následujícím smyslu nejmenší těleso, do kterého lze vnořit těleso $\mathbb{R}$ a ve kterém rovnice $x^2 + 1 = 0$ má řešení.

9.3. Věta. *Nechť* f *je vnoření tělesa* $\mathbb{R}$ *do nějakého tělesa* P, *ve kterém existuje prvek* π, *který je řešením rovnice* $x^2 + 1 = 0$. *Pak existuje jediné vnoření* $\tilde{f}$ *tělesa komplexních čísel* $\mathbb{C}$ *do tělesa* P *tak, že* $\tilde{f} \circ \psi = f$ *a* $\tilde{f}(i) = \pi$.

Můžeme říci, že diagram na obrázku 8 komutuje:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[dd, dashed, "\tilde{f}"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & P \end{tikzcd}$$

Obr. 8.

Důkaz. Nechť $\pi \in P$ je řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$ v tělese P, tedy $\pi^2 = -1$. Definujme zobrazení $\tilde{f} : \mathbb{C} \to P$ tak, že pro $\alpha = [a, b] = a + bi \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) položíme

$$\tilde{f}(\alpha) = f(a) + \pi \cdot f(b).$$

Dokažme nyní, že $\tilde{f}$ je injektivní zobrazení. Nechť $\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d] \in \mathbb{C}$, $\tilde{f}(\alpha) = \tilde{f}(\beta)$. Pak $f(a) + \pi \cdot f(b) = f(c) + \pi \cdot f(d)$, odkud plyne $\pi \cdot f(b - d) = f(c - a)$. Jestliže $b \neq d$, je také $f(b - d) \neq 0$, a pak $\pi = f(\frac{c-a}{b-d})$. Tudíž reálné číslo $\frac{c-a}{b-d}$ je řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$. To však není možné, neboť rovnice $x^2 + 1 = 0$ žádné řešení v $\mathbb{R}$ nemá. Musí tedy být $b = d$, a pak $0 = f(c - a)$, z čehož plyne $c = a$, tudíž $\alpha = \beta$ a $\tilde{f}$ je tedy injekce.

Nyní ukažme, že $\tilde{f}$ je homomorfismus. To, že $\tilde{f}$ zachovává operaci +, se ukáže snadno. Podobně lze ukázat, že $\tilde{f}$ zachovává i operaci ·, neboť pro $\alpha = [a, b]$,

$\beta = [\,c, d\,]$ platí, že $\widetilde{f}(\alpha) \cdot \widetilde{f}(\beta) = (f(a) + \pi \cdot f(b))(f(c) + \pi \cdot f(d)) = f(ac - bd) + + \pi \cdot f(bc + ad) = \widetilde{f}(\alpha \cdot \beta)$. Dohromady tedy dostáváme, že $\widetilde{f}$ je vnořením tělesa $\mathbb{C}$ do tělesa P a pro $r \in \mathbb{R}$ máme $\widetilde{f}(\psi(r)) = \widetilde{f}([\,r, 0\,]) = f(r)$.

Ukážeme ještě jednoznačnost vnoření $\widetilde{f}$. Buď g vnoření tělesa $\mathbb{C}$ do tělesa P takové, že $g(i) = \pi$ a $g \circ \psi = f$. Pro libovolně zvolené komplexní číslo $\alpha = [\,a, b\,]$ je pak $g(\alpha) = g([\,a, 0\,] + [\,b, 0\,] \cdot i) = g(a) + \pi \cdot g(b) = \widetilde{f}(\alpha)$. Věta je tím dokázána.

9.4. Tvrzení. *Rovnice* $x^2 + 1 = 0$ *má v tělese komplexních čísel právě dvě řešení* $\{i, -i\}$.

Důkaz. Zřejmě oba prvky $\pm i$ jsou řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$ v tělese $\mathbb{C}$. Ukažme, že žádná další řešení tato rovnice v množině $\mathbb{C}$ nemá. Nechť $\xi = [\,u, v\,] = u + vi \in \mathbb{C}$ $(u, v \in \mathbb{R})$ vyhovuje rovnici $x^2 + 1 = 0$. Pak $\xi^2 = [\,u^2 - v^2, 2uv\,] = [\,-1, 0\,]$, tudíž $u^2 - v^2 = -1$ a $2uv = 0$. Z druhé rovnice dostáváme $u = 0$ nebo $v = 0$. Jestliže $u = 0$, pak $v^2 = 1$, a tedy $v = \pm 1$ a $\xi = \pm i$. Je-li $v = 0$, pak musí být $u^2 = -1$, což však není v tělese reálných čísel možné.

9.5. Poznámka. Na tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$ neexistuje lineární uspořádání $\leq$ takové, aby platila základní početní pravidla, na která jsme zvyklí z množiny reálných čísel. Tím máme na mysli, aby pro každé $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ platilo:

(a) $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$,

(b) $\gamma > 0$, $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Muselo by totiž potom platit, že $i > 0$ nebo $-i > 0$, což by znamenalo, že $i^2 > 0$ a také $i^4 > 0$. Dostali bychom pak $-1 > 0$ a současně $1 > 0$, což není možné.

Vlastnosti množiny reálných čísel vzhledem k uspořádání nám dovolují představit si množinu reálných čísel jako přímku, přičemž uspořádání reálných čísel odpovídá přirozenému uspořádání bodů na této přímce.

Množinu komplexních čísel si můžeme představit jako rovinu a to následujícím způsobem.

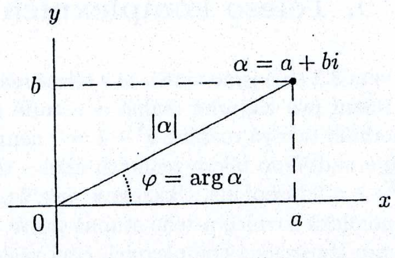
9.6. Definice. Nechť jsou v rovině zvoleny dvě navzájem kolmé přímky (číselné osy) x a y. Pak každý bod této roviny je jednoznačně určen dvojicí reálných čísel, která značí souřadnice tohoto bodu. Komplexní číslo $\alpha = [\,a, b\,] = a + bi$ znázorňujeme bodem o souřadnicích a, b (viz obr. 9). Uvažovaná rovina se nazývá *Gaussova rovina*. Osa x se nazývá *reálná osa*, osa y se nazývá *imaginární osa* (popř. mluvíme o *ose reálných čísel* a *ose imaginárních čísel*).

Pro komplexní číslo $\alpha = [\,a, b\,] = a + bi$ definujeme *absolutní hodnotu* $|\alpha|$ jako reálné číslo

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\geq 0).$$

Číslo $\overline{\alpha}$ *komplexně sdružené s číslem* α je komplexní číslo

$$\overline{\alpha} = a - bi.$$



Obr. 9.

Reálná část $\operatorname{Re}\alpha$ *komplexního čísla* α je

$$\operatorname{Re}\alpha = a,$$

imaginární část $\operatorname{Im}\alpha$ *komplexního čísla* α je

$$\operatorname{Im}\alpha = b.$$

Argument $\arg\alpha$ *komplexního čísla* $\alpha \neq 0$ je definován jako reálné číslo φ, pro které platí:

$$\cos\varphi = \frac{a}{|\alpha|} \quad \text{a} \quad \sin\varphi = \frac{b}{|\alpha|}.$$

Píšeme $\arg\alpha = \varphi$.

Zřejmě argument není definován jednoznačně. Jestliže $\arg\alpha = \varphi$, pak $\varphi + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je též argument čísla α.

Omezíme-li se např. na interval $0 \leq \varphi < 2\pi$, pak je ovšem argument určen jednoznačně.

Snadno se dokáže platnost následující věty.

9.7. Věta. *Nechť* α, β *jsou komplexní čísla. Pak platí:*

(a) $|\alpha| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$,

(b) $|-\alpha| = |\alpha|$,

(c) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$,

(d) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$,

(e) $|\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$,

(f) *pro* $\beta \neq 0$ *je* $|\frac{\alpha}{\beta}| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$,

(g) $|\alpha|^2 = \alpha \cdot \overline{\alpha}$,

(h) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$,

(k) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$,

(i) $\operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha}), \operatorname{Im}\alpha = -\frac{i}{2}(\alpha - \overline{\alpha})$,

(j) *pro* $\alpha \neq 0$ *je* $\alpha = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *kde* $\varphi = \arg\alpha$.

9.8. Definice. Tvar uvedený v bodu (j) předcházející věty pro nenulová komplexní čísla se nazývá *goniometrický tvar komplexního čísla* α.

Komplexní číslo $\alpha = a + bi$ se nazývá *komplexní jednotka*, jestliže $|\alpha| = 1$.

9.9. Poznámka. Zřejmě množina všech komplexních jednotek v Gaussově rovině je rovna množině všech bodů jednotkové kružnice (kružnice o poloměru 1 se středem v počátku souřadného systému).

Každé komplexní číslo α lze tedy psát ve tvaru $\alpha = |\alpha| \cdot \varepsilon$, kde ε je komplexní jednotka (pro $\alpha \neq 0$ určená jednoznačně).

Z poznatků analytické geometrie lze snadno odvodit následující tvrzení.

9.10. Tvrzení. *Nechť α, β, γ jsou komplexní čísla, kterým odpovídají body A, B, C v Gaussově rovině a nechť $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (O značí počátek). Pak*

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad |\alpha - \beta| = |\overrightarrow{AB}|.$$

9.11. Moivreův vzorec. *Nechť ε, η jsou komplexní jednotky. Pak*

$$\arg(\varepsilon \cdot \eta) = \arg \varepsilon + \arg \eta.$$

Důkaz. Pro danou komplexní jednotku ε uvažme zobrazení $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované předpisem $F(\xi) = \varepsilon \cdot \xi$ pro $\xi \in \mathbb{C}$. Pak F je bijekcí množiny $\mathbb{C}$ na sebe a pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí: $|F(\alpha - \beta)| = |\alpha - \beta|$. Odpovídá-li číslu ξ bod X v Gaussově rovině a číslu $F(\xi)$ bod Y, položíme $S(X) = Y$. Pak S je bijekcí Gaussovy roviny na sebe, pro body X_1, X_2 navíc platí $|S(X_1)S(X_2)| = |X_1X_2|$ a $S(0) = 0$ pro počátek O. Odtud plyne, že S je otočením Gaussovy roviny o úhel $\arg \varepsilon$ kolem počátku. Odtud snadno dostaneme tvrzení věty.

Z předchozího vzorce ihned dostáváme.

9.12. Moivreova věta. *Nechť n je přirozené číslo a φ reálné číslo. Pak platí:*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

9.13. Příklad. Vyjádřeme komplexní číslo $(5i + 5\sqrt{3})^{12}$ v algebraickém tvaru. Rozvoj podle binomické věty či postupné umocňování jsou v tomto případě pracnými metodami, jak dospět k výsledku. Elegantnější postup využívá Moivreovy věty:

$$\begin{aligned}(5i + 5\sqrt{3})^{12} &= 5^{12}\,(\sqrt{3} + i)^{12} = 10^{12}(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2})^{12} = \\ &= 10^{12}\,(\cos \tfrac{\pi}{6} + i \sin \tfrac{\pi}{6})^{12} = 10^{12}\,(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 10^{12}.\end{aligned}$$

Provedeme nyní úplnou diskusi řešení binomické rovnice v tělese komplexních čísel.

9.14. Věta. *Nechť n je přirozené číslo, α nenulové komplexní číslo, jehož goniometrický tvar je dán vztahem $\alpha = |\alpha|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Pak binomická rovnice $x^n = \alpha$ má v tělese komplexních čísel právě n různých řešení $x_0, \dots, x_{n-1}$ daných vztahem*

$$x_k = \sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos \tfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Důkaz. Z 9.12 plyne, že $x_k^n = |\alpha|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \alpha$, pro $k = 0, 1, \dots, n-1$. Jestliže $0 \le k < l \le n-1$, pak $0 < \frac{\varphi + 2l\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2(l-k)\pi}{n} < 2\pi$, tudíž $x_k \neq x_l$. Máme proto n různých kořenů binomické rovnice $x^n = \alpha$.

Nyní naopak ukažme, že každý z kořenů rovnice $x^n = \alpha$ lze napsat v uvedeném tvaru x_k pro některé $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Buď $x = |x|(\cos \psi + i \sin \psi)$ komplexní číslo v goniometrickém tvaru, pro které platí $x^n = \alpha$. Pak je

$$x^n = |x|^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = |\alpha|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

tudíž

$$|x| = \sqrt[n]{|\alpha|}, \qquad n\psi = \varphi + 2l\pi,$$

pro vhodné $l \in \mathbb{Z}$, odkud dostáváme $\psi = \frac{\varphi + 2l\pi}{n}$. Jestliže $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k \le n-1$, $k \equiv l \pmod n$, pak $\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2h\pi$, pro nějaké celé číslo h. Tedy $x = x_k$ a věta je dokázána.

9.15. Důsledek. *Pro přirozené číslo n má rovnice $x^n = 1$ v tělese komplexních čísel právě n různých řešení $x_0, \dots, x_{n-1}$ daných vztahem*

$$x_k = \cos \tfrac{2k\pi}{n} + i \sin \tfrac{2k\pi}{n},$$

kde $k = 0, 1, \dots, n-1$.

9.16. Poznámka. Komplexním číslům $x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ z předchozí věty, kde $0 \le k \le n-1$, odpovídají v Gaussově rovině vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného jednotkové kružnici tak, že jeden z jeho vrcholů je roven bodu o souřadnicích $[\,1, 0\,]$.

Každé z čísel $x_0, \dots, x_{n-1}$ se nazývá *n-tá odmocnina z jedné*.

Z vět 9.14 a 9.15 ihned dostáváme následující tvrzení.

9.17. Tvrzení. *Množina řešení binomické rovnice $x^n = \alpha$ v tělese komplexních čísel, kde n je přirozené číslo a α nenulové komplexní číslo, je rovna množině čísel $x_0 \cdot \varepsilon$, kde ε probíhá všechny n-té odmocniny z 1 a x_0 je libovolné pevně zvolené komplexní číslo, které splňuje rovnost $x_0^n = \alpha$.*

9.18. Poznámka. Každé číslo $x_0 \cdot \varepsilon$ z předchozího tvrzení se nazývá *n-tá odmocnina z čísla α* (pro $\alpha = 0$ rozumíme n-tou odmocninou z 0 číslo 0) a často se značí $\sqrt[n]{\alpha}$ ($\sqrt[n]{0} = 0$). Je však nutné zdůraznit, že se vždy jedná o *nějakou*

n-tou odmocninu z α, aby nedošlo k záměně s jednoznačně definovanou n-tou odmocninou z reálného čísla α, totiž s číslem $\sqrt[n]{\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ definovaným v 8.3!

Ukažme si, jak se dá řešit rovnice $x^2 = \alpha$ v případě, že α není v goniometrickém tvaru.

9.19. Tvrzení. *Nechť $\alpha = a + bi$ je komplexní číslo ($a, b \in \mathbb{R}$). Pak množina řešení rovnice $x^2 = \alpha$ je dána čísly*

$$\varepsilon\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})} + i\eta\sqrt{\tfrac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})},$$

kde $\varepsilon, \eta \in \{1, -1\}$ a

$$\varepsilon \cdot \eta = \begin{cases} 1, & \text{je-li } b \geq 0, \\ -1, & \text{je-li } b < 0. \end{cases}$$

Zde symboly $\sqrt{\ }$ značí jednoznačně definované druhé odmocniny nezáporných reálných čísel.

Důkaz. Z tvrzení 9.17 plyne, že rovnice $x^2 = \alpha$ má dvě řešení x_1 a $x_2 = -x_1$. Položme $x_1 = u + vi$. Dosazením do rovnice se zjistí platnost rovností $u^2 - v^2 = a$ a $2uv = b$. Umocníme-li obě tyto rovnosti na druhou a sečteme je, dostaneme $(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = a^2 + b^2$, tedy, vzhledem k tomu, že $a^2 + b^2 \geq 0$, platí rovnost $u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Odtud a ze vztahu $u^2 - v^2 = a$ dostaneme $u^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2})$, $v^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2+b^2})$. Tudíž $u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}$, $v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}$.

Znaménka + nebo − v těchto vztazích určíme z rovnosti $2uv = b$. Odtud již plyne dokazované tvrzení.

9.20. Definice. Nechť a, b, c jsou komplexní čísla, $a \neq 0$. Rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se nazývá *kvadratická rovnice (nad tělesem komplexních čísel)* a číslo $D = b^2 - 4ac$ se nazývá *diskriminant kvadratické rovnice* $ax^2 + bx + c = 0$.

9.21. Věta. *Nechť a, b, c jsou komplexní čísla, $a \neq 0$. Pak množina všech řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ v množině komplexních čísel je rovna množině $\{x_1, x_2\}$, kde*

$$x_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad x_2 = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Přitom odmocninou $\sqrt{\ }$ se rozumí nějaká pevně zvolená druhá odmocnina z komplexního čísla $b^2 - 4ac$.

Pro čísla x_1, x_2 platí $x_1 = x_2$, právě když diskriminant uvedené kvadratické rovnice je roven 0.

Důkaz. Nejprve ukažme, že čísla x_1, x_2 jsou kořeny dané kvadratické rovnice. Evidentně platí, že

$$ax_1^2 + bx_1 + c = \frac{1}{4a}(b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2 - 4ac) + \frac{b}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) + c = 0$$

a analogicky $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$.

Nechť je nyní x_0 komplexní číslo, pro které platí $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. Pak po úpravě dostaneme

$$x_0 + \frac{b}{2a} = \pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac},$$

odkud plyne, že $x_0 = x_1$ nebo $x_0 = x_2$. Každý kořen kvadratické rovnice tedy lze napsat ve tvaru x_1 nebo x_2. Zbylá část věty je zřejmá.

Z předchozí věty přímo plyne následující tvrzení o kvadratické rovnici s reálnými koeficienty.

9.22. Tvrzení. *Nechť D je diskriminant kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty a $\{x_1, x_2\}$ je množina všech řešení této rovnice v tělese $\mathbb{C}$. Pak platí:*

(a) $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \iff D > 0$,
(b) $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \iff D < 0$,
(c) $x_1 = x_2$, $x_1 \in \mathbb{R} \iff D = 0$.

V případě $D < 0$ je $x_2 = \overline{x_1}$.

Z věty 9.21 také ihned dostáváme další tvrzení.

9.23. Tvrzení. *Množina všech řešení kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{C}$) v tělese $\mathbb{C}$ je rovna množině $\{x_1, x_2\}$, kde*

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Dále platí: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Druhá odmocnina z $(\frac{p}{2})^2 - q$ zde značí nějakou pevně zvolenou druhou odmocninu z tohoto komplexního čísla.

9.24. Definice. Nechť a, b, c, d jsou komplexní čísla, $a \neq 0$. Rovnice

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se nazývá *kubická rovnice (nad tělesem komplexních čísel).*

Vynásobíme-li tuto rovnici číslem $\frac{1}{a}$ a pak položíme $x = X - \frac{b}{3a}$, převedeme ji na tzv. *kanonický tvar*

$$X^3 + pX + q = 0.$$

Budeme tedy dále uvažovat kubickou rovnici ve tvaru $x^3 + px + q = 0$, kde p, q jsou komplexní čísla.

Číslo

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

se nazývá *diskriminant kubické rovnice* $x^3 + px + q = 0$.

9.25. Věta. *Nechť p, q jsou komplexní čísla. Pak množina všech řešení kubické rovnice $x^3 + px + q = 0$ v tělese komplexních čísel je rovna množině $\{x_1, x_2, x_3\}$, kde*

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad x_2 = \varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta, \quad x_3 = \varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta.$$

Přitom $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ značí některou pevně zvolenou druhou odmocninu z komplexního čísla $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, dále α značí některou pevně zvolenou třetí odmocninu z čísla $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, tedy

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

a β značí tu třetí odmocninu z čísla $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, pro kterou platí, že $\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}$, tudíž

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}.$$

Číslo ε značí některou pevně zvolenou třetí odmocninu z 1 různou od 1.

9.26. Poznámka. Číslo ε je rovno buď číslu $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ nebo číslu $\varepsilon = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. V obou případech je množina $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ rovna množině všech třetích odmocnin z 1.

Je-li β_0 některá třetí odmocnina z čísla $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, pak podle 9.17 je množina $\{\beta_0, \varepsilon\beta_0, \varepsilon^2\beta_0\}$ rovna množině všech třetích odmocnin z čísla $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

Platí, že $(\alpha \cdot \beta_0)^3 = -\frac{p^3}{27}$ a množina $\{-\frac{p}{3}, -\frac{p}{3}\varepsilon, -\frac{p}{3}\varepsilon^2\}$ je množina všech třetích odmocnin z čísla $-\frac{p^3}{27}$. Tudíž existuje $j \in \{0, 1, 2\}$ takové, že $\alpha \cdot \beta_0 \cdot \varepsilon^j = -\frac{p}{3}$. Odtud plyne v případě $p \neq 0$ existence i jednoznačnost třetí odmocniny β z čísla $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ takové, že platí $\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}$.

Poznamenejme ještě, že vzorce pro řešení kubické rovnice uvedené ve větě 9.25 se nazývají *Cardanovy vzorce*.

Důkaz věty 9.25. Dosazením čísel x_1, x_2, x_3 do rovnice $x^3 + px + q = 0$ se snadno zjistí, že čísla x_1, x_2, x_3 jsou řešením kubické rovnice $x^3 + px + q = 0$.

Nechť x_0 je komplexní číslo, pro které platí: $x_0^3 + px_0 + q = 0$. Buďte γ, δ řešení kvadratické rovnice $x^2 - x_0x - \frac{p}{3} = 0$ v tělese $\mathbb{C}$, takže podle tvrzení 9.23 platí: $\gamma + \delta = x_0$ a $\gamma \cdot \delta = -\frac{p}{3}$. Pak tedy $(\gamma + \delta)^3 + p(\gamma + \delta) + q = 0$, odkud dostáváme

po úpravě a dosazení za $\gamma \cdot \delta = -\frac{p}{3}$

$$\gamma^3 + \delta^3 = -q \quad \text{a} \quad \gamma^3 \cdot \delta^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Tudíž γ^3, δ^3 jsou řešeními kvadratické rovnice $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$, odkud plyne

$$\gamma^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad \delta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

(druhá odmocnina z $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ značí stejnou druhou odmocninu z tohoto čísla jako u čísla α), a tedy $\gamma \in \{\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha\}$, $\delta \in \{\beta, \varepsilon\beta, \varepsilon^2\beta\}$. Jelikož $\gamma \cdot \delta = -\frac{p}{3} = \alpha \cdot \beta$, dostáváme tyto tři možnosti:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \gamma = \alpha & \Longrightarrow \quad \delta = \beta, & x_0 = x_1, \\
\text{(b)} & \gamma = \varepsilon\alpha & \Longrightarrow \quad \delta = \varepsilon^2\beta, & x_0 = x_2, \\
\text{(c)} & \gamma = \varepsilon^2\alpha & \Longrightarrow \quad \delta = \varepsilon\beta, & x_0 = x_3.
\end{array}$$

Věta je tím dokázána.

9.27. Tvrzení. *Nechť M je množina všech řešení kubické rovnice*

$$x^3 + px + q = 0$$

s komplexními koeficienty p, q nad tělesem komplexních čísel a $D = -108(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})$ je diskriminant této kubické rovnice. Pak platí:

(a) M je tříprvková množina $\Longleftrightarrow D \neq 0$,

(b) M je dvouprvková množina $\Longleftrightarrow D = 0, q \neq 0$,

(c) M je jednoprvková množina $\Longleftrightarrow D = 0, q = 0$.

V případě (c) je pak jediné řešení rovno 0.

Důkaz. Užijeme označení z věty 9.25. Pak $M = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Nechť M má méně než tři prvky. Ukážeme, že pak nutně $D = 0$.

Jelikož $(\varepsilon^2 - 1)^3 = (\varepsilon^2(1-\varepsilon))^3 = (1-\varepsilon)^3 \neq 0$, dostáváme z libovolné z rovností $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$ umocněním na třetí vztah $\alpha^3 = \beta^3$. (Např. $x_1 = x_2 \Longrightarrow \alpha + \beta = \varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta \Longrightarrow \alpha(1-\varepsilon) = \beta(\varepsilon^2 - 1) \Longrightarrow \alpha^3 = \beta^3$.) Odtud však vzhledem k definici čísel α a β přímo plyne, že $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, což znamená, že $D = 0$.

Nechť nyní naopak $D = 0$. Pak $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ a $\beta = \alpha \cdot \varepsilon^j$, kde $j \in \{0, 1, 2\}$. Tudíž

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha(1 + \varepsilon^j), \\
x_2 &= \varepsilon\alpha(1 + \varepsilon^{j+1}), \\
x_3 &= \varepsilon\alpha(\varepsilon + \varepsilon^j).
\end{aligned}$$

Uvědomíme-li si, že $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$, dostáváme pro různé hodnoty j následující výsledky:

$$\begin{aligned} j=0 &\implies x_1=2\alpha,\ x_2=x_3=-\alpha,\\ j=1 &\implies x_1=x_2=-\varepsilon^2\alpha,\ x_3=2\varepsilon^2\alpha,\\ j=2 &\implies x_1=x_3=-\varepsilon\alpha,\ x_2=2\varepsilon\alpha. \end{aligned}$$

Množina M má tedy méně než tři prvky. Navíc je zřejmé, že M má jeden prvek právě tehdy, když $\alpha=0$, což nastane, právě když $q=0$. V tomto případě pak také $p=0$ a $M=\{0\}$. Tvrzení je tím dokázáno.

Na závěr provedeme úplnou diskusi řešení kubické rovnice s reálnými koeficienty.

9.28. Věta. *Nechť $x^3+px+q=0$ je kubická rovnice s reálnými koeficienty p,q nad tělesem komplexních čísel. Nechť dále D značí diskriminant této kubické rovnice. Pak platí:*

(a) $D>0 \implies$ *rovnice má 3 různé reálné kořeny,*
(b) $D<0 \implies$ *rovnice má 1 reálný a 2 komplexně sdružené kořeny,*
(c) $D=0,\ q\neq 0 \implies$ *rovnice má 2 různé reálné kořeny,*
(d) $D=0,\ q=0 \implies$ *rovnice má jediný kořen rovný* 0.

Důkaz. Užijeme opět označení z věty 9.25. Pak množina kořenů kubické rovnice $x^3+px+q=0$ je $M=\{x_1,x_2,x_3\}$.

Nechť $D>0$. Podle 9.27 (a) je M tříprvková množina. Stačí tedy ukázat, že $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$. Platí, že $\overline{(\alpha^3)}=\beta^3$, tedy $(\overline{\alpha})^3=\beta^3$, odkud plyne, že $\beta=\overline{\alpha}\varepsilon^j$, kde $j\in\{0,1,2\}$.

Jelikož $\alpha\beta$ je reálné číslo a $\alpha\beta=|\alpha|^2\varepsilon^j$, dostáváme, že $j=0$. Tudíž $\beta=\overline{\alpha}$. Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} \overline{x_1} &= \overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\beta+\alpha &&= x_1,\\ \overline{x_2} &= \overline{\varepsilon}\overline{\alpha}+\overline{\varepsilon}^2\overline{\beta}=\varepsilon^2\beta+\varepsilon\alpha &&= x_2,\\ \overline{x_3} &= \overline{\varepsilon}^2\overline{\alpha}+\overline{\varepsilon}\overline{\beta}=\varepsilon\beta+\varepsilon^2\alpha &&= x_3, \end{aligned}$$

tudíž $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

Nechť $D<0$. Podle 9.27 (a) je množina M tříprvková. Ukažme tedy, že jeden z kořenů je reálný a zbývající dva komplexně sdružené. Číslo $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ je kladné reálné, a tudíž i $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ je reálné číslo. Číslo α můžeme zvolit tak, že je rovno jednoznačně definované reálné třetí odmocnině z reálného čísla $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$. Jelikož $\alpha\cdot\beta=-\frac{p}{3}$, je také číslo β reálné, a je tedy rovno jednoznačně definované reálné třetí odmocnině z reálného čísla $-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$. Pak číslo $x_1=\alpha+\beta$ je reálné číslo.

Jelikož $D\neq 0$, je $\alpha\neq\beta$. Pro čísla x_2,x_3 dostáváme při $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$x_2=\varepsilon\alpha+\varepsilon^2\beta=(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\alpha+(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\beta=-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta),$$

$$x_3=\varepsilon^2\alpha+\varepsilon\beta=(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\alpha+(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\beta=-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}(\beta-\alpha).$$

Tudíž $\operatorname{Im}x_2=-\operatorname{Im}x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)\neq 0, \operatorname{Re}x_2=\operatorname{Re}x_3$. To znamená, že čísla x_2 a x_3 jsou komplexně sdružená a výrok (b) tedy platí.

Je-li $D=0$, položíme α rovno jednoznačně definované reálné třetí odmocnině z čísla $-\frac{q}{2}$. Pak β je reálné číslo, tudíž $\alpha=\beta$. Odtud plyne, že $x_1=2\alpha$, $x_2=x_3=$ $=-\alpha$, z čehož přímo plynou výroky (c) a (d). Tím je věta dokázána.

9.29. Příklad. Řešme kubickou rovnici $x^3+x-2=0$. Pro diskriminant této rovnice platí $D=-108(1+\frac{1}{27})=-112$. Rovnice má tudíž podle věty 9.28 jeden reálný a dva komplexní kořeny. Budeme-li při řešení vždy volit reálné odmocniny, dostaneme, že pro reálný kořen x_1 rovnice $x^3+x-2=0$ platí

$$x_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}.$$

Snadno se však vidí, že kořenem rovnice je číslo 1. Dostáváme tedy, že platí

$$x_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}=1.$$

Podobně pro komplexní kořeny rovnice $x^3+x-2=0$ dostáváme

$$x_2=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}\,\varepsilon+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}\,\varepsilon^2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$x_3=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}\,\varepsilon^2+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}\,\varepsilon=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2},$$

kde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ je třetí odmocnina z 1.

Z příkladu je vidět, že význam Cardanových vzorců je spíše teoretický, neboť zpravidla bývá obtížné získané vyjádření kořenů dále upravit.

9.30. Cvičení.

1) Najděte všechna řešení následujících binomických rovnic
 a) $x^6=-2$,
 b) $x^4=-\sqrt{3}+3i$.

2) Dokažte, že

$$\prod_{n=1}^{7}(\cos\tfrac{n\pi}{7}+i\sin\tfrac{n\pi}{7})=1.$$