VII. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

§1. Základní vlastnosti lineárního zobrazení

V našich předchozích úvahách o vektorových prostorech jsme vždy vyšetřovali vlastnosti jednoho vektorového prostoru (pro úplnost připomeňme, že vektorovým prostorem rozumíme vždy pouze konečnědimenzionální vektorový prostor). V této kapitole se naopak budeme zabývat vzájemnými vztahy mezi dvěma (případně i více) vektorovými prostory. Tyto "vzájemné vztahy" budeme studovat pomocí zobrazení jednoho vektorového prostoru do druhého. Aby naše úvahy měly praktický smysl bude zřejmě nutné pracovat s takovými zobrazeními, která nějakým způsobem "zachovávají" operace, s nimiž se ve vektorových prostorech setkáváme, tj. zachovávají jednak součet vektorů a jednak násobek čísla s vektorem. Při tom zřejmě druhý požadavek bude moci být splněn jen tehdy, když uvažované vektorové prostory budou nad stejným číselným tělesem.

Definice: Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad týmž číselným tělesem T. Zobrazení $\varphi : V \to V'$ splňující

(i) $\varphi(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = \varphi(\mathrm{u}) + \varphi(\mathrm{v})$

(ii) $\varphi(t.\mathrm{u}) = t.\varphi(\mathrm{u})$

pro $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$; $t \in T$ libovolné

se nazývá **lineární zobrazení** vektorového prostoru V do V'.

Je-li navíc φ bijektivní, pak se nazývá **izomorfizmus vektorového prostoru** V **na** V'.

Poznámka: 1. je nutné si uvědomit, že vektorové prostory V a V' jsou obecně různé, a tedy i operace sčítání vektorů (resp. násobení čísla s vektorem) ve V a ve V' jsou pak samozřejmě také různé. Přesto však je budeme pro jednoduchost označovat stejným symbolem + (resp. $\cdot$). Nebude moci dojít k nedorozumění, poněvadž ze souvislosti a z ostatní symboliky bude vždy zřejmé, o kterou operaci se jedná. Pro ulehčení orientace budeme vektory z V' obvykle označovat čárkovaně, kdežto vektory z V nečárkovaně. Specielně tedy o' bude značit nulový vektor z V', kdežto o bude značit nulový vektor z V.

2. lehce se ukáže, že podmínky (i) a (ii) z předchozí definice jsou ekvivalentní jediné podmínce:

(iii) $\varphi(t.\mathrm{u} + s.\mathrm{v}) = t.\varphi(\mathrm{u}) + s.\varphi(\mathrm{v})$ pro $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$; $t, s \in T$ libovolné.

Ověřujeme-li tedy, že zobrazení $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení, pak ověřujeme buď podmínky (i) a (ii) nebo jedinou podmínku (iii).

Dále, matematickou indukcí lze (iii) rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců, tzn. pro lineární zobrazení φ platí:

$$\varphi(t_1.\mathrm{u}_1 + \ldots + t_k.\mathrm{u}_k) = t_1.\varphi(\mathrm{u}_1) + \ldots + t_k.\varphi(\mathrm{u}_k).$$

Příklad 1.1.: Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T, nechť $t \in T$. Pak:

1. zobrazení $\varphi : V \to V$, definované

$\varphi(\mathrm{u}) = t.\mathrm{u}$, pro každé $\mathrm{u} \in V$

je lineární zobrazení. Je-li $t \neq 0$, pak φ je dokonce izomorfizmus (ověřte si obojí rozepsáním!). Specielně, pro $t = 1$ dostáváme identické zobrazení id_V, které je tedy izomorfizmem vektorového prostoru V na V.

2. zobrazení $\omega : V \to V'$, definované:

$\omega(\mathrm{u}) = \mathrm{o}'$, pro každé $\mathrm{u} \in V$

je lineární zobrazení, které budeme nazývat **nulové lineární zobrazení**.

Příklad 1.2.: Zobrazení $\varphi : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$, definované:

$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3)$, pro $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3$

je lineární zobrazení, které není izomorfizmem.

Dále, např. zobrazení $\psi : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$, definované:

$\psi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 1, x_1 - x_2 - x_3)$ pro $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3$

není lineární zobrazení (zřejmě neplatí (i) ani (ii))

Příklad 1.3.: Zobrazení $\delta : \mathrm{R}_n[x] \to \mathrm{R}_n[x]$, definované:

$\delta(f(x)) = f'(x)$, pro $\forall\ f(x) \in \mathrm{R}_n[x]$,

tj. zobrazení přiřazující polynomu $f(x)$ jeho derivaci $f'(x)$, je lineární zobrazení (při ověřování podmínek (i) a (ii) se využije některých vět o derivování funkcí, známých z analýzy). Zřejmě δ není bijektivní zobrazení, a tedy není izomorfizmem.

Věta 1.1.: *Nechť* $\varphi : V \to V'$ *je lineární zobrazení. Pak platí:*

1. $\varphi(\mathrm{o}) = \mathrm{o}'$, *tj. nulový vektor se musí zobrazit na nulový vektor*

2. $\varphi(-\mathrm{u}) = -\varphi(\mathrm{u})$, *pro* $\forall\ \mathrm{u} \in V$

3. $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k \in V$ *jsou lineárně závislé vektory* $\Rightarrow$ $\varphi(\mathrm{u}_1), \ldots, \varphi(\mathrm{u}_k)$ *jsou lineárně závislé vektory (ve* V'*).*

[D ů k a z: 1. zřejmě je $o = 0.o$, tzn. pak $\varphi(o) = \varphi(0.o) = 0.\varphi(o) = o'$

2. $\varphi(-u) = \varphi((-1).u) = (-1).\varphi(u) = -\varphi(u)$, podle V.1.1.4., kap. III.

3. $u_1, \dots, u_k$ jsou lineárně závislé $\Rightarrow$ existují $t_1, \dots, t_k \in T$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly tak, že $t_1 u_1 + \dots + t_k u_k = o$. Pak ale $\varphi(t_1 u_1 + \dots + t_k u_k) = \varphi(o)$, tzn. $t_1.\varphi(u_1) + \dots + t_k.\varphi(u_k) = o'$, a tedy $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$ jsou lineárně závislé.]

Další věta si všímá toho, jak se lineární zobrazení chová vůči podprostorům. Připomeňme, že je-li $\varphi : V \to V'$ zobrazení a W je podmnožina ve V, pak symbolem $\varphi(W)$ označujeme množinu obrazů všech prvků z W, tj.:

$\varphi(W) = \{x' \in V' \mid \exists\ w \in W$ tak, že $\varphi(w) = x'\}$

Věta 1.2.: *Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení; W je podprostor ve V. Pak:*

1. $\varphi(W)$ *je podprostor ve* V'

2. $u_1, \dots, u_k$ *jsou generátory podprostoru* $W \Rightarrow \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$ *jsou generátory podprostoru* $\varphi(W)$

3. $\dim W \geq \dim \varphi(W)$

[D ů k a z: 1. provede se přímým ověřením definice podprostoru

2. nechť $x' \in \varphi(W)$ libovolný, tzn. existuje $w \in W$ tak, že $\varphi(w) = x'$. Ale podle předpokladu $w = t_1 u_1 + \dots + t_k u_k$, a tedy $x' = \varphi(t_1 u_1 + \dots + t_k u_k) = t_1.\varphi(u_1) + \dots + t_k.\varphi(u_k)$, odkud plyne, že $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$ jsou generátory $\varphi(W)$.

3. je-li $W = \{o\}$, pak tvrzení zřejmě platí; nechť tedy $W \neq \{o\}$ a nechť $u_1, \dots, u_m$ je báze W. Pak podle 2. jsou vektory $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ generátory $\varphi(W)$, a tedy $\dim \varphi(W) \leq m = \dim W$]

Věta 1.3.: *Složením lineárních zobrazení dostaneme opět lineární zobrazení, tj. jsou-li $\varphi : V \to V'$, $\psi : V' \to V''$ lineární zobrazení, pak $\psi \circ \varphi : V \to V''$ je lineární zobrazení.*

[D ů k a z: ověříme podmínku (iii); pro $u, v \in V$; $t, s \in T$ je

$(\psi \circ \varphi)(tu + sv) = \psi[\varphi(tu + sv)] = \psi[t.\varphi(u) + s.\varphi(v)] = t.[(\psi \circ \varphi)(u)] + s.[(\psi \circ \varphi)(v)]$,

a tedy $(\psi \circ \varphi)$ je lineární zobrazení.]

Následující důležitá věta ukáže, že k úplnému zadání lineárního zobrazení $V \to V'$ stačí zadat pouze obrazy vektorů pevné báze prostoru V a obrazy zbývajících vektorů z V jsou pak již jednoznačně vynuceny. Na druhé straně, takovýto výsledek se dá celkem očekávat, uvědomíme-li si, že každý vektor z V je jistou lineární kombinací vektorů báze a že lineární zobrazení "zachovává lineární kombinace vektorů".

Věta 1.4.: (Základní věta o lineárních zobrazeních)

Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T; nechť $u_1, \dots, u_n$ je báze prostoru V a nechť $v'_1, \dots, v'_n$ jsou libovolné vektory z V'.

Pak existuje jediné lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ takové, že $\varphi(u_1) = v'_1, \dots, \varphi(u_n) = v'_n$.

[D ů k a z: I. existence: nechť $x \in V$ libovolný, přičemž $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$. Položme: $\varphi(x) = x_1.v'_1 + \dots + x_n.v'_n$. Potom φ je zobrazení V do V', které je lineární zobrazení (obojí si podrobně rozmyslete, resp. dokažte!). Dále, zřejmě $\varphi(u_i) = v'_i$, pro $i = 1, \dots, n$.

II. jednoznačnost: nechť φ je výše zkonstruované lineární zobrazení a nechť dále $\psi : V \to V'$ je lineární zobrazení takové, že $\psi(u_1) = v'_1, \dots, \psi(u_n) = v'_n$. Pak pro libovolný vektor $x \in V$ (pro nějž $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$) je:

$$\psi(x) = \psi(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 \psi(u_1) + \dots + x_n \psi(u_n) = x_1 v'_1 + \dots + x_n v'_n = \varphi(x),$$

což však znamená, že $\psi = \varphi$.]

Definice: Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Pak

(i) množina $\operatorname{Ker} \varphi = \{u \in V \mid \varphi(u) = o'\}$ se nazývá **jádro lineárního zobrazení** φ

(ii) množina $\operatorname{Im} \varphi = \varphi(V)$ se nazývá **obraz lineárního zobrazení** φ

Poznámka: Označení $\operatorname{Ker} \varphi$, resp. $\operatorname{Im} \varphi$ jsou v literatuře běžně používané zkratky pro anglické názvy "kernel" = jádro, resp. "image" = obraz.

Následující tvrzení ukáží, že obě podmnožiny jsou podprostory a popíší jejich základní vlastnosti.

Věta 1.5.: *Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Pak*

1. *jádro* $\operatorname{Ker} \varphi$ *je podprostorem ve* V

2. *obraz* $\operatorname{Im} \varphi$ *je podprostorem ve* V'

[D ů k a z: 1. zřejmě $o \in \operatorname{Ker} \varphi$, a tedy $\operatorname{Ker} \varphi \neq \emptyset$. Dále, nechť $u, v \in \operatorname{Ker} \varphi$, tzn.

je $\varphi(\mathrm{u}) = \mathrm{o}'$, $\varphi(\mathrm{v}) = \mathrm{o}'$. Pak $\varphi(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = \varphi(\mathrm{u}) + \varphi(\mathrm{v}) = \mathrm{o}' + \mathrm{o}' = \mathrm{o}'$, a tedy $\mathrm{u}+\mathrm{v} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Podobně pro $\mathrm{u} \in \operatorname{Ker}\varphi$ a $t \in T$ je $t.\mathrm{u} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Dohromady tedy $\operatorname{Ker}\varphi$ je podprostor ve V.

2. jde o speciální případ V.1.2.1.]

Věta 1.6.: *Lineární zobrazení* φ *je injektivní* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathrm{o}\}$.

[D ů k a z: "$\Rightarrow$" nechť $\mathrm{x} \in \operatorname{Ker}\varphi$ libovolný; pak $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{o}' = \varphi(\mathrm{o})$, užitím V.1.1.1. Z injektivnosti zobrazení φ pak dostáváme $\mathrm{x} = \mathrm{o}$, tzn. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathrm{o}\}$.

"$\Leftarrow$" nechť $\varphi(\mathrm{u}) = \varphi(\mathrm{v})$; potom $\varphi(\mathrm{u} - \mathrm{v}) = \mathrm{o}'$, neboli $\mathrm{u} - \mathrm{v} \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\mathrm{o}\}$. Tedy $\mathrm{u} - \mathrm{v} = \mathrm{o}$, neboli $\mathrm{u} = \mathrm{v}$, což znamená, že φ je injektivní zobrazení.]

Definice: Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Pak dimenze jádra $\operatorname{Ker}\varphi$ se nazývá **defekt lineárního zobrazení** φ a dimenze obrazu $\operatorname{Im}\varphi$ se nazývá **hodnost lineárního zobrazení** φ.

Věta 1.7.: *Nechť* $\varphi : V \to V'$ *je lineární zobrazení. Pak součet defektu a hodnosti lineárního zobrazení* φ *je roven dimenzi prostoru* V, *tj.*

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V$$

[D ů k a z: je-li $\operatorname{Im}\varphi = \{\mathrm{o}'\}$, pak $\operatorname{Ker}\varphi = V$ a věta zřejmě platí. Nechť je tedy $\operatorname{Im}\varphi \neq \{\mathrm{o}'\}$ a nechť $\mathrm{w}'_1, \dots, \mathrm{w}'_r$ je báze $\operatorname{Im}\varphi$. Pak existují vektory $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r \in V$ tak, že $\varphi(\mathrm{u}_1) = \mathrm{w}'_1, \dots, \varphi(\mathrm{u}_r) = \mathrm{w}'_r$. Z věty 1.1.3. plyne, že $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r$ jsou lineárně nezávislé, tzn. je pak:

(1) $$\dim L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r) = r = \dim(\operatorname{Im}\varphi)$$

Dále:

I. ukážeme, že $\operatorname{Ker}\varphi + L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r) = V$.

Ale inkluse "$\subseteq$" je zřejmá a naopak, je-li $\mathrm{x} \in V$ libovolný, pak $\varphi(\mathrm{x}) \in \operatorname{Im}\varphi$, tzn. $\varphi(\mathrm{x}) = c_1\mathrm{w}'_1 + \dots + c_r\mathrm{w}'_r$, kde $c_i \in T$. Uvažme nyní vektor $\mathrm{u} = c_1\mathrm{u}_1 + \dots + c_r\mathrm{u}_r$. Zřejmě je $\mathrm{u} \in L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r)$ a dále:

$$\varphi(\mathrm{u}) = \varphi(c_1\mathrm{u}_1 + \dots + c_r\mathrm{u}_r) = c_1\varphi(\mathrm{u}_1) + \dots + c_r\varphi(\mathrm{u}_r) = c_1\mathrm{w}'_1 + \dots + c_r\mathrm{w}'_r = \varphi(\mathrm{x})$$

odkud $\varphi(\mathrm{x} - \mathrm{u}) = \mathrm{o}'$, neboli $\mathrm{x} - \mathrm{u} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Potom však:

$\mathrm{x} = (\mathrm{x} - \mathrm{u}) + \mathrm{u} \in \operatorname{Ker}\varphi + L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r)$, což jsme potřebovali dokázat.

II. ukážeme, že $\operatorname{Ker}\varphi \cap L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r) = \{\mathrm{o}\}$.

Nechť $\mathrm{x} \in \operatorname{Ker}\varphi \cap L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r)$. Pak $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{o}'$ a současně $\mathrm{x} = t_1\mathrm{u}_1 + \dots + t_r\mathrm{u}_r$, odkud:

$$\mathrm{o}' = \varphi(\mathrm{x}) = t_1.\varphi(\mathrm{u}_1) + \dots + t_r.\varphi(\mathrm{u}_r) = t_1.\mathrm{w}'_1 + \dots + t_r.\mathrm{w}'_r$$

Ale z lineární nezávislosti vektorů $\mathrm{w}'_1, \dots, \mathrm{w}'_r$ plyne, že $t_1 = \dots = t_r = 0$, a tedy po dosazení dostáváme $\mathrm{x} = \mathrm{o}$.

Nyní, z I. a II., užitím věty o součtu a průniku podprostorů a vztahu (1) dostáváme:

$$\dim V = \dim[\operatorname{Ker}\varphi + L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r)] = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r) -$$
$$- \dim[\operatorname{Ker}\varphi \cap L(\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r)] = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi - 0 = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi.$$]

Definice: Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T; nechť existuje izomorfizmus vektorového prostoru V na V'. Pak říkáme, že V a V' jsou **izomorfní vektorové prostory** a píšeme $V \cong V'$.

Věta 1.8.: *Relace* $\cong$ *je relací ekvivalence na množině všech (konečnědimenzionálních) vektorových prostorů nad tělesem* T.

[D ů k a z: reflexivita: je zřejmá (neboť id_V je izomorfizmus V na V)

symetrie: nechť $V \cong V'$, tzn. existuje izomorfizmus $\varphi : V \to V'$. Pak zobrazení $\varphi^{-1} : V' \to V$ je bijektivní a ukážeme, že je lineárním zobrazením. Nechť $\mathrm{u}', \mathrm{v}' \in V'$; $t, s \in T$ libovolné a označme $\varphi^{-1}(\mathrm{u}') = \mathrm{u}$; $\varphi^{-1}(\mathrm{v}') = \mathrm{v}$. Potom je $\varphi(\mathrm{u}) = \mathrm{u}'$; $\varphi(\mathrm{v}) = \mathrm{v}'$. Nyní:

$$\varphi^{-1}(t\mathrm{u}' + s\mathrm{v}') = \varphi^{-1}(t.\varphi(\mathrm{u}) + s.\varphi(\mathrm{v})) = \varphi^{-1}(\varphi(t\mathrm{u} + s\mathrm{v})) = t\mathrm{u} + s\mathrm{v} = t.\varphi^{-1}(\mathrm{u}') + s.\varphi^{-1}(\mathrm{v}')$$

Je tedy $V' \cong V$.

tranzitivita: plyne z vlastností bijekce a z V.1.3.]

Věta 1.9.: *Nechť* $\varphi : V \to V'$ *je izomorfizmus. Pak platí:*

1. $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_k \in V$ *jsou lineárně závislé* $\Leftrightarrow$ $\varphi(\mathrm{u}_1), \dots, \varphi(\mathrm{u}_k)$ *jsou lineárně závislé.*

2. $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_k \in V$ *jsou lineárně nezávislé* $\Leftrightarrow$ $\varphi(\mathrm{u}_1), \dots, \varphi(\mathrm{u}_k)$ *jsou lineárně nezávislé*

3. $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_n$ *je báze* V $\Leftrightarrow$ $\varphi(\mathrm{u}_1), \dots, \varphi(\mathrm{u}_n)$ *je báze* V'

4. dim V = dim V'

[D ů k a z: podle předpokladu je $\varphi : V \to V'$ bijektivní lineární zobrazení a podle důkazu předchozí věty je $\varphi^{-1} : V' \to V$ také bijektivní lineární zobrazení. Potom:

ad 1: plyne z V.1.1.3. aplikované na φ, resp. na φ^{-1}

ad 2: je logickým důsledkem 1.

ad 3: plyne z 2. a z V.1.2.2., uvědomíme-li si, že $\varphi(V) = V'$ a $\varphi^{-1}(V') = V$

ad 4: je-li V nulovým prostorem, pak je tvrzení zřejmé; v ostatních případech plyne ze 3.]

Poznámka: utvoříme-li na množině všech (konečnědimenzionálních) vektorových prostorů nad T rozklad příslušný ekvivalenci $\cong$, pak v každé třídě tohoto rozkladu budou vždy všechny navzájem izomorfní vektorové prostory. Z věty 1.9. pak plyne, že tyto izomorfní vektorové prostory mají z algebraického hlediska naprosto stejné vlastnosti (jedná se tedy o pouze formálně různé exempláře shodných vlastností). V matematice se obvykle o takovýchto objektech říká, že jsou "stejné, až na izomorfizmus" a často se dokonce ztotožňují.

Následující věta pak podá velmi jednoduchou charakterizaci izomorfních vektorových prostorů, tj. vektorových prostorů patřících do jedné třídy zmíněného rozkladu.

Věta 1.10. (Věta o izomorfizmu vektorových prostorů)
Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T. Pak:

$V \cong V' \iff \dim V = \dim V'$

[D ů k a z: "$\Rightarrow$" plyne přímo z V.1.9.4.

"$\Leftarrow$" je-li dim V = dim V' = 0, pak zřejmě $V \cong V'$. Nechť tedy dim V = = dim V' = n ($\geqslant 1$) a nechť $u_1, \dots, u_n$ je báze V, resp $u'_1, \dots, u'_n$ je báze V'. Nechť dále $x \in V$ libovolný, přičemž $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ (víme, že toto vyjádření existuje, a to jediné). Položme:

$$\varphi(x) = x_1 u'_1 + \dots + x_n u'_n$$

Pak zřejmě $\varphi : V \to V'$ je zobrazení a rozepsáním se ukáže, že φ je bijektivní (proveďte si podrobně sami!) Dokažme, že φ je lineární zobrazení: nechť $x, y \in V$; $t, s \in T$, přičemž $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$; $y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$. Potom:

$$\varphi(t.x + s.y) = \varphi[(tx_1 + sy_1) . u_1 + \dots + (tx_n + sy_n) . u_n] = (tx_1 + sy_1) . u'_1 + \dots$$
$$\dots + (tx_n + sy_n) . u'_n = t . (x_1 u'_1 + \dots + x_n u'_n) + s . (y_1 u'_1 + \dots + y_n u'_n) = t.\varphi(x) + s.\varphi(y).$$

Dohromady pak φ je izomorfizmus prostoru V na V', a tedy $V \cong V'$.]

Poznámka: z předchozí věty plyne, že při zadaném číselném tělese T je každý vektorový prostor jednoznačně (až na izomorfizmus) určen svojí dimenzí. Při tom např. zřejmě každý nenulový n-dimenzionální vektorový prostor nad T je izomorfní s prostorem T^n. Vidíme tedy, že vektorové prostory T^n, pro $n = 1, 2, 3, \dots$, vyčerpávají (až na izomorfizmus) všechny nenulové vektorové prostory nad T. Mohlo by se tedy na první pohled zdát, že při budování obecné teorie vektorových prostorů by vlastně stačilo omezit se pouze na prostory T^n. Je však ihned vidět, že bychom tímto nedosáhli žádného zjednodušení, neboť z důkazu předchozí věty plyne, že použitý izomorfizmus závisí na volbě báze. Pokud bychom tedy chtěli nějaké tvrzení o prostoru T^n přenést na libovolný n-dimenzionální vektorový prostor, znamenalo by to vždy dokázat jeho nezávislost na volbě báze.

§2. Lineární transformace a její matice

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad T. Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ se nazývá **lineární transformace** vektorového prostoru V.

Je-li navíc φ bijektivní, pak se nazývá **automorfizmus** vektorového prostoru V.

Poznámka: vidíme, že lineární transformace je pouze specielním případem lineárního zobrazení, a sice pro $V' = V$. Znamená to tedy, že všechny úvahy a tvrzení z předchozího paragrafu zůstávají v platnosti i pro lineární transformace, přičemž bude zřejmě platit ještě něco navíc.

Specielně zdůrazněme, že podle základní věty o lineárních zobrazeních je lineární transformace nenulového prostoru V jednoznačně určena zadáním obrazů pevné báze prostoru V.

Dále si všimněme toho, že je-li $V = \{o\}$, pak existuje pouze jediná, a to identická lineární transformace prostoru V a všechny úvahy o ní jsou více méně triviální. Proto se v dalším budeme zabývat pouze lineárními transformacemi nenulových vektorových prostorů.

Nejprve uvedeme větu, která nám podá řadu ekvivalentních podmínek pro to, aby lineární transformace byla automorfizmem, tj. aby byla bijektivní.

Věta 2.1.: *Nechť φ je lineární transformace prostoru V. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) φ je automorfizmus

(ii) φ je injektivní zobrazení

(iii) φ je surjektivní zobrazení

(iv) φ zobrazuje libovolnou bázi prostoru V na bázi prostoru V

(v) φ zobrazuje libovolné lineárně nezávislé vektory opět na lineárně nezávislé vektory.

[Důkaz: "(i) $\Rightarrow$ (ii)" zřejmé

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" nechť φ je injektivní zobrazení; pak podle V.1.6. je $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$, a tedy podle V.1.7. musí být $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$, neboli $\varphi(V) = V$. To však znamená, že φ je surjektivní zobrazení.

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)" je-li φ surjektivní, pak $\varphi(V) = V$. Nechť nyní $u_1, \dots, u_n$ je báze prostoru V. Podle V.1.2.2. $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ jsou generátory $\varphi(V) = V$. Ale z generátorů prostoru V lze vybrat bázi V, která však v našem případě musí sestávat z n vektorů, což znamená, že $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ je báze V.

"(iv) $\Rightarrow$ (v)" nechť $u_1, \dots, u_k \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory. Ale lineárně nezávislé vektory z V lze doplnit na bázi V, odkud užitím (iv) dostaneme, že $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$ jsou lineárně nezávislé vektory.

"(v) $\Rightarrow$ (i)" z (v) plyne, že $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$ (neboť, je-li $x \neq o$ libovolný, pak x je lineárně nezávislý, a tedy podle (v) je $\varphi(x)$ také lineárně nezávislý, neboli $\varphi(x) \neq o$). Ale, je-li $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$, pak z V.1.6. plyne, že φ je injektivní a užitím V.1.7. dostaneme, že φ je surjektivní. Dohromady tedy φ je automorfizmus.]

Definice: Nechť φ je lineární transformace prostoru V; nechť

(1) $u_1, \dots, u_n$

je pevná báze prostoru V a platí:

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1) &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n \\
\varphi(u_2) &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varphi(u_n) &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n
\end{aligned}$$

Pak matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **matice lineární transformace** φ **v bázi** (1).

Poznámka: 1. vidíme, že matice A je čtvercová, řádu n (kde $n = \dim V$), a je utvořena tak, že souřadnice vektoru $\varphi(u_j)$ v bázi (1) jsou napsány do j-tého sloupce matice A ($j = 1, \dots, n$). Tyto souřadnice jsou určeny jednoznačně, a tedy i matice A je jednoznačně určena.

Uvědomme si dále, že pojem matice lineární transformace je vázán podstatným způsobem na pevnou bázi prostoru V. Zřejmě matice téže lineární transformace φ v různých bázích prostoru V budou obecně různé.

2. všimněme si ještě vzájemného vztahu mezi pojmem "matice přechodu" (definovaným v §5, kapitoly IV) a pojmem "matice lineární transformace". Jsou-li $u_1, \dots, u_n$ a $v_1, \dots, v_n$ dvě báze prostoru V a označíme-li symbolem φ lineární transformaci prostoru V zadanou určením obrazů báze tak, že vektory první báze se postupně zobrazují na vektory druhé báze, tzn.:

$$\varphi(u_1) = v_1, \dots, \varphi(u_n) = v_n ,$$

pak ihned vidíme, že matice přechodu od báze $u_1, \dots, u_n$ k bázi $v_1, \dots, v_n$ je rovna matici lineární transformace φ v bázi $u_1, \dots, u_n$.

Označení: množinu všech lineárních transformací prostoru V budeme označovat symbolem $\mathcal{L}(V)$.

Prvky množiny $\mathcal{L}(V)$ jsou tedy lineární transformace vektorového prostoru V, tj. jistá zobrazení $V \to V$. Zřejmě je $\mathcal{L}(V) \neq \phi$, neboť například identické zobrazení $\mathrm{id}_V \in \mathcal{L}(V)$. Na množině $\mathcal{L}(V)$ nyní určitým přirozeným způsobem definujeme součet a součin, resp. násobek číslem a popíšeme základní vlastnosti takto vzniklých algebraických struktur.

Definice: Nechť $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$, $t \in T$ libovolné. Pak zobrazení:

(i) $\varphi + \psi : V \to V$, definované: $(\varphi + \psi)(\mathrm{u}) = \varphi(\mathrm{u}) + \psi(\mathrm{u})$, pro $\forall\, \mathrm{u} \in V$

se nazývá **součet lineárních transformací** φ a ψ

(ii) $\varphi \circ \psi : V \to V$, definované: $(\varphi \circ \psi)(\mathrm{u}) = \varphi(\psi(\mathrm{u}))$, pro $\forall\, \mathrm{u} \in V$

se nazývá **součin lineárních transformací** φ a ψ

(iii) $t.\varphi : V \to V$, definované: $(t.\varphi)(\mathrm{u}) = t\,.\,(\varphi(\mathrm{u}))$, pro $\forall\, \mathrm{u} \in V$

se nazývá **součin čísla** t **s lineární transformací** φ.

Věta 2.2.: *Nechť* φ, ψ *jsou lineární transformace prostoru* V; $t \in T$ *libovolné. Pak:*

1. $\varphi + \psi$, $\varphi \circ \psi$, $t.\varphi$ *jsou lineární transformace prostoru* V
2. $(\mathcal{L}(V), +)$ *je komutativní grupa*
3. $(\mathcal{L}(V), +, \circ)$ *je okruh s jedničkou*
4. $\mathcal{L}(V)$ *je vektorový prostor nad tělesem* T *(vzhledem k* $+$, *resp.* $\cdot$ *).*

[D ů k a z: 1. zřejmě $\varphi + \psi, \varphi \circ \psi$, $t.\varphi$ jsou zobrazení $V \to V$. Rozepsáním se bezprostředně ověří, že jsou to lineární zobrazení.

2. dokáže se rozepsáním; při tom roli nulového prvku hraje nulová lineární transformace $\omega : V \to V$ (definovaná: $\omega(\mathrm{u}) = \mathrm{o}$, pro $\forall\, \mathrm{u} \in V$), resp. opačným prvkem k $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ je lineární transformace $\rho : V \to V$, definovaná: $\rho(\mathrm{u}) = -\varphi(\mathrm{u})$, pro $\forall\, \mathrm{u} \in V$.

3. dokáže se opět rozepsáním, s využitím 2. Jedničkou okruhu je zřejmě identická lineární transformace id_V.

4. dokáže se užitím 2. a bezprostředním ověřením axiomů vektorového prostoru.]

Věta 2.3.: *Nechť* φ, ψ *jsou lineární transformace prostoru* V, $\dim V = n \geqslant 1$ *a nechť maticí* φ *(resp.* ψ*) v bázi (1) je matice* A *(resp.* B*). Potom:*

1. *maticí lineární transformace* $\varphi + \psi$ *v bázi (1) je matice* $A + B$
2. *maticí lineární transformace* $\varphi \circ \psi$ *v bázi (1) je matice* $A.B$
3. *maticí lineární transformace* $t.\varphi$ *v bázi (1) je matice* $t.A$

[D ů k a z: nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$. Při tomto označení pak platí:

$$\varphi(\mathrm{u}_j) = \sum_{r=1}^{n} a_{rj}\mathrm{u}_r \;;\quad \psi(\mathrm{u}_j) = \sum_{r=1}^{n} b_{rj}\mathrm{u}_r \quad \text{pro } j = 1, \ldots, n$$

Pak, 1: $(\varphi + \psi)(\mathrm{u}_j) = \varphi(\mathrm{u}_j) + \psi(\mathrm{u}_j) = \sum_{r=1}^{n} a_{rj}\mathrm{u}_r + \sum_{r=1}^{n} b_{rj}\mathrm{u}_r = \sum_{r=1}^{n} (a_{rj} + b_{rj}).\mathrm{u}_r$

pro $j = 1, \ldots, n$; a tedy maticí lineární transformace $\varphi + \psi$ v bázi (1) je matice $(a_{ij} + b_{ij}) = A + B$.

2: označme $A.B = (c_{ij})$, tzn. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$, pro $i, j = 1, \ldots, n$. Ale:

$$(\varphi \circ \psi)(\mathrm{u}_j) = \varphi\Big(\sum_{r=1}^{n} b_{rj}\mathrm{u}_r\Big) = \sum_{r=1}^{n} b_{rj}.\varphi(\mathrm{u}_r) = \sum_{r=1}^{n} b_{rj}.\sum_{s=1}^{n} a_{sr}\mathrm{u}_s = \sum_{s=1}^{n}\Big(\sum_{r=1}^{n} a_{sr}b_{rj}\Big).\mathrm{u}_s = \sum_{s=1}^{n} c_{sj}\mathrm{u}_s,$$

odkud plyne, že maticí lineární transformace $\varphi \circ \psi$ v bázi (1) je matice $A.B$.

3: $(t.\varphi)(\mathrm{u}_j) = t.\varphi(\mathrm{u}_j) = t.\sum_{r=1}^{n} a_{rj}\mathrm{u}_r = \sum_{r=1}^{n}(t.a_{rj}).\mathrm{u}_r$, a tedy maticí lineární transformace $t.\varphi$ v bázi (1) je matice $(t.a_{ij}) = t.A$.]

Věta 2.4.: *Nechť* V *je vektorový prostor nad* T, $\dim V = n \geqslant 1$. *Pak vektorový prostor* $\mathcal{L}(V)$ *je izomorfní vektorovému prostoru* $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$.

[D ů k a z: nechť (1) je pevná báze V. Definujme zobrazení $F : \mathcal{L}(V) \to \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ takto: pro libovolné $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ položme

$F(\varphi) = A$, kde A je matice lineární transformace φ v bázi (1).

Nyní dokážeme, že

I. F je bijektivní zobrazení:

nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ libovolná; označme $\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_n$ vektory z V, jejichž souřadnicemi v bázi (1) (tj. v bázi $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n$) jsou po řadě sloupce matice A. Podle základní věty o lineárních zobrazeních existuje jediná lineární transformace φ prostoru V s vlastností: $\varphi(\mathrm{u}_1) = \mathrm{w}_1, \ldots, \varphi(\mathrm{u}_n) = \mathrm{w}_n$. Ale maticí φ v bázi (1) je pak právě matice A. Tedy existuje právě jedno $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $F(\varphi) = A$, neboli matice A má při zobrazení F právě jeden vzor, což znamená, že F je bijektivní zobrazení.

II. F je lineární zobrazení:

nechť $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$, $t \in T$ libovolné, přičemž $F(\varphi) = A$, $F(\psi) = B$. Pak:

podle V.2.3.1. je $F(\varphi + \psi) = A + B = F(\varphi) + F(\psi)$,

podle V.2.3.3. je $F(t.\varphi) = t.A = t.F(\varphi)$,

a tedy F je lineární zobrazení.

Dohromady dostáváme, že F je izomorfizmus, neboli $\mathcal{L}(V) \cong \mathrm{Mat}_{nn}(T)$.]

Poznamenejme, že z předchozí věty a z věty o izomorfizmu vektorových prostorů plyne, že $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$ (poněvadž, jak víme, $\dim \mathrm{Mat}_{nn}(T) = n^2$).

Na závěr paragrafu si ještě stručně všimneme toho, jak vypadají matice téže lineární transformace v různých bázích prostoru V a jaké jsou některé jejich základní vlastnosti.

Věta 2.5.: *Nechť* $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$, *nechť* $\dim V = n$ $(\geqslant 1)$. *Pak platí:* A, B *jsou maticemi téže lineární transformace prostoru* V *(ve vhodných bázích)* $\Leftrightarrow$ *existuje regulární matice* S *tak, že:* $B = S^{-1}.A.S$

[D ů k a z: "$\Rightarrow$" nechť $A = (a_{ij})$, resp. $B = (b_{ij})$ je matice lineární transformace φ v bázi (1), resp. v bázi (1') (kde (1) je báze $u_1, \dots, u_n$, resp. (1') je báze $u'_1, \dots, u'_n$). Dále, nechť $S = (s_{ij})$ je matice přechodu od báze (1) k bázi (1'), tzn. S je regulární matice a platí:

$$u'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} u_i, \quad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Potom však:

$$\varphi(u'_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u'_k = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} . \sum_{i=1}^{n} s_{ik} u_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} s_{ik} b_{kj} \Big) . u_i$$

a také:

$$\varphi(u'_j) = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} s_{kj} u_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} s_{kj} . \varphi(u_k) = \sum_{k=1}^{n} s_{kj} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} u_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} s_{kj} \Big) . u_i$$

odkud porovnáním pravých stran (na základě jednoznačnosti vyjádření vektoru $\varphi(u_j)$ pomocí báze (1)) dostáváme, že

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ik} . b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . s_{kj} \quad \text{pro } i, j = 1, \dots, n$$

což však znamená, že $S.B = A.S$, neboli $B = S^{-1}.A.S$

"$\Leftarrow$" nechť $B = S^{-1}.A.S$ a nechť (1) je pevná báze prostoru V. Pak (podle důkazu V.2.4.) existuje jediná lineární transformace φ prostoru V taková, že A je maticí φ v bázi (1). Dále, S je regulární matice, tzn. existuje (jediná) báze (1') prostoru V taková, že S je maticí přechodu od báze (1) k (1'). Konečně, podle předpokladu je $S.B = A.S$, neboli $\sum_{k=1}^{n} s_{ik} . b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . s_{kj}$, pro $i, j = 1, \dots, n$. Potom stejnými úpravami jako v první části důkazu dostáváme:

$$\varphi(u'_j) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} s_{kj} \Big) u_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} s_{ik} b_{kj} \Big) u_i = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u'_k, \quad \text{pro } j = 1, \dots, n$$

což však znamená, že B je maticí lineární transformace φ v bázi (1'). Tedy matice A, B

jsou maticemi téže lineární transformace prostoru V.]

Definice: Nechť $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ a nechť existuje regulární matice S taková, že $B = S^{-1}.A.S$. Pak říkáme, že matice A, B jsou **podobné matice** a píšeme $A \sim B$.

Věta 2.6. Relace $\sim$ podobnosti matic je relací ekvivalence na množině $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$.

[D ů k a z: a) reflexivita: pro libovolnou matici $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ je zřejmě $A = E_n^{-1}.A.E_n$, kde E_n je jednotková matice řádu n. Je tedy $A \sim A$.

b) symetrie: nechť $A \sim B$, tzn. existuje regulární matice S tak, že $B = S^{-1}.A.S$. Pak ale $A = S.B.S^{-1} = (S^{-1})^{-1}.A.(S^{-1})$, kde S^{-1} je zřejmě regulární. Tedy je $B \sim A$.

c) transitivita: nechť $A \sim B$ a $B \sim C$, tzn. existují regulární matice S, Q tak, že $B = S^{-1}.A.S$ a $C = Q^{-1}.B.Q$. Po dosazení dostáváme: $C = Q^{-1}.S^{-1}.A.S.Q = (SQ)^{-1}.A.(SQ)$, přičemž matice $S.Q$ je zřejmě regulární. Tedy je $A \sim C$.]

Definice: Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n (nad T) a nechť λ je proměnná. Pak determinant

$$|A - \lambda E_n| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

se nazývá **charakteristický polynom matice** A.

Poznámka: provedeme-li výpočet předchozího determinantu (např. užitím V.2.2., kap.IV), dostaneme:

$$|A - \lambda E_n| = (-1)^n . \lambda^n + (-1)^{n-1} . (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) . \lambda^{n-1} + \dots + |A|$$

Je tedy okamžitě vidět, že se skutečně jedná o polynom proměnné λ, který je stupně n a jeho koeficienty jsou z číselného tělesa T.

Konkretně, například pro $n = 3$ dostaneme rozepsáním:

$$|A - \lambda E_3| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + |A|$$

Věta 2.7.: *Nechť A, B jsou podobné matice. Pak matice A, B mají*

1. *stejné determinanty, tj.* $|A| = |B|$
2. *stejnou hodnost, tj.* $h(A) = h(B)$
3. *stejné charakteristické polynomy, tj.* $|A - \lambda E_n| = |B - \lambda E_n|$.

[D ů k a z: nechť $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ jsou podobné matice, tzn. existuje regulární matice S tak, že $B = S^{-1}.A.S$. Potom:

1. užitím Cauchyovy věty a V.3.9.3., kap. IV, dostáváme:

$$|B| = |S^{-1}.A.S| = \frac{1}{|S|} \cdot |A| \cdot |S| = |A|$$

2. užitím V.4.5.2., kap. IV. je: $h(B) = h(S^{-1}.A.S) = h(A.S) = h(A)$

3. užitím Cauchyovy věty a zřejmého faktu, že $\lambda.E_n = S^{-1}.(\lambda.E_n).S$, dostáváme:

$$|B - \lambda E_n| = |S^{-1}AS - S^{-1}(\lambda E_n)S| = |S^{-1}(A - \lambda E_n)S| = \frac{1}{|S|} \cdot |A - \lambda E_n| \cdot |S| =$$
$$= |A - \lambda E_n| \;]$$

Poznámka: připomeňme, že předchozí větu nelze obrátit, tzn. rovnost determinantů, rovnost hodností a rovnost charakteristických polynomů dvou matic jsou pouze nutné, nikoliv však dostatečné podmínky pro podobnost těchto matic. Vezmeme-li např. matice

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pak zřejmě $|E_2| = |B|$, $h(E_2) = h(B)$ a $|E_2 - \lambda E_2| = |B - \lambda E_2|$, ale matice E_2 a B nejsou podobné (neboť pro každou regulární matici S řádu 2 je $S^{-1}.E_2.S = E_2$, což znamená, že matice E_2 je podobná pouze sama sobě).

Jak již bylo řečeno, všechny matice dané lineární transformace φ jsou navzájem podobné. Z předchozí věty potom plyne, že determinant (resp. hodnost, resp. charakteristický

polynom) všech matic dané lineární transformace φ je vždy stejný. Vidíme tedy, že tyto pojmy závisí pouze na lineární transformaci samotné, nikoliv na její konkretní matici v jisté bázi. Z tohoto zjištění pak plyne korektnost následujícího pojmu a věty.

Definice: Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V; nechť A je matice lineární transformace φ (v jisté bázi prostoru V). Pak charakteristický polynom matice A, tj. $|A - \lambda E_n|$, se nazývá **charakteristický polynom lineární transformace** φ.

Věta 2.8.: *Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V a nechť A je matice lineární transformace φ (v jisté bázi prostoru V). Pak:*

$$\dim \mathrm{Im}\, \varphi = h(A)$$

neboli: hodnost lineární transformace φ je rovna hodnosti její matice A.

[D ů k a z: nechť A je matice lineární transformace φ v bázi $u_1, \ldots, u_n$, kterou označme (1). Podle V.1.2.2. vektory $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)$ jsou generátory podprostoru $\varphi(V) = \mathrm{Im}\, \varphi$, přičemž souřadnice těchto vektorů v bázi (1) tvoří po řadě řádky matice A', tj. transponované matice k matici A.

Přiřadíme-li nyní každému vektoru z V uspořádanou n-tici jeho souřadnic v bázi (1), dostaneme izomorfizmus prostoru V na prostor T^n, pomocí něhož již lehce ukážeme, že $h(A') = \dim \mathrm{Im}\, \varphi$ (rozmyslete si podrobně sami!). Ale $h(A') = h(A)$, a tedy $\dim \mathrm{Im}\, \varphi = h(A)$.]

§3. Vlastní vektory a vlastní hodnoty lineární transformace

Definice: Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V. Podprostor W vektorového prostoru V se nazývá **invariantní podprostor vzhledem k** φ, je-li: $\varphi(W) \subseteq W$, tzn. pro libovolný vektor $x \in W$ platí $\varphi(x) \in W$.

Příklad 3.1.: Nechť V je libovolný pevný vektorový prostor nad T. Uvažme

1: identickou lineární transformaci $\mathrm{id}_V : V \to V$; pak zřejmě každý podprostor W ve V je invariantní vzhledem k id_V.

2: nulovou lineární transformaci $\omega : V \to V$ (definovanou: $\omega(x) = o$, pro $\forall\, x \in V$); pak opět každý podprostor W ve V je invariantní vzhledem k ω.

3: libovolnou lineární transformaci $\varphi : V \to V$; pak triviální podprostory ve V (tzn. podprostory $\{o\}$ a V) jsou invariantní vzhledem k φ.

Příklad 3.2.: Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ uvažme podprostor $W = \{(x,o) \mid x \in \mathbf{R}\}$ a dále uvažme dvě lineární transformace φ a ψ prostoru $\mathbf{R}^2$, definované:

$$\left.\begin{aligned} \varphi((x_1, x_2)) &= (x_1 + x_2, 0) \\ \psi((x_1, x_2)) &= (x_2, x_1) \end{aligned}\right\} \quad \text{pro každé } (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

Lehce se ověří, že W je invariantní podprostor vzhledem k φ, zatímco tentýž podprostor W není invariantním podprostorem vzhledem k ψ (neboť například $(1,0) \in W$, ale $\psi((1,0)) = (0,1) \notin W$).

Poznámka: v příkladu 3.1. jsou uvedeny speciální, triviální případy; uvědomme si, že obecně podprostor W může, ale nemusí být invariantní vzhledem k φ a dále, že podprostor, který je invariantní vzhledem k jedné lineární transformaci, nemusí být invariantní vzhledem k jiné lineární transformaci (viz příklad 3.2.). Vidíme tedy, že pojem invariantního podprostoru je vždy vázán na pevnou lineární transformaci.

Další příklady obecných konstrukcí invariantních podprostorů (vzhledem k φ) nám ukáží následující dvě věty.

Věta 3.1.: *Nechť φ je lineární transformace prostoru V. Pak jádro* $\operatorname{Ker}\varphi$ *a obraz* $\operatorname{Im}\varphi$ *jsou invariantními podprostory vzhledem k φ.*

[D ů k a z: podle V.1.5. jsou $\operatorname{Ker}\varphi$ i $\operatorname{Im}\varphi$ podprostory ve V. Ukážeme jejich invariantnost vzhledem k φ: nechť $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker}\varphi$ libovolný; pak $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{o} \in \operatorname{Ker}\varphi$ a tedy $\operatorname{Ker}\varphi$ je invariantní vzhledem k φ. Dále, nechť $\mathbf{u} \in \operatorname{Im}\varphi$ libovolný, tzn. zřejmě $\mathbf{u} \in V$. Pak ale $\varphi(\mathbf{u}) \in \varphi(V) = \operatorname{Im}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ je tedy invariantní vzhledem k φ.]

Věta 3.2.: *Nechť φ je lineární transformace prostoru V; nechť $W_1, \dots, W_k$ jsou podprostory ve V, které jsou invariantní vzhledem k φ.*
Pak průnik $(W_1 \cap \dots \cap W_k)$ a součet $(W_1 + \dots + W_k)$ jsou invariantní podprostory vzhledem k φ.

[D ů k a z: víme, že $(W_1 \cap \dots \cap W_k)$, resp. $(W_1 + \dots + W_k)$ jsou podprostory ve V. Dále:

a) nechť $\mathbf{u} \in W_1 \cap \dots \cap W_k$ libovolný; pak $\mathbf{u} \in W_i$ a podle předpokladu $\varphi(\mathbf{u}) \in W_i$, pro $i = 1, \dots, k$. Tedy $\varphi(\mathbf{u}) \in W_1 \cap \dots \cap W_k$, což znamená, že $W_1 \cap \dots \cap W_k$ je invariantní podprostor vzhledem k φ.

b) označme $W = W_1 + \dots + W_k$. Nechť $\mathbf{u} \in W$, tzn. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_k$, kde $\mathbf{u}_i \in W_i$. Pak ale $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_k) = \varphi(\mathbf{u}_1) + \dots + \varphi(\mathbf{u}_k) \in W$, neboť podle předpokladu $\varphi(\mathbf{u}_i) \in W_i$. Tedy W je invariantní podprostor vzhledem k φ.]

Důležitou roli při studiu lineárních transformací hrají jednodimenzionální invariantní podprostory. Z kapitoly o vektorových prostorech víme, že jednodimenzionální podprostor W ve vektorovém prostoru V (nad T) je generován jedním nenulovým vektorem $\mathbf{u} \in V$, tzn. je pak:

$$W = L(\mathbf{u}) = \{t.\mathbf{u} \mid t \in T\}$$

Máme-li navíc dánu lineární transformaci φ prostoru V, pak zřejmě podprostor $W = L(\mathbf{u})$ je invariantní vzhledem k φ právě když existuje číslo $\lambda \in T$ tak, že $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda.\mathbf{u}$, tzn. právě když se generátor $\mathbf{u}$ podprostoru W zobrazí na jistý svůj násobek (rozepište si podrobně sami!). A právě vektory tohoto typu se budeme v dalším zabývat.

Definice: Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V (nad T). Nechť $\mathbf{u} \in V$, $\lambda \in T$ splňují:

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{o} \quad \wedge \quad \varphi(\mathbf{u}) = \lambda.\mathbf{u}$$

Pak číslo λ se nazývá **vlastní hodnota lineární transformace** φ a vektor $\mathbf{u}$ se nazývá **vlastní vektor lineární transformace** φ, **příslušný vlastní hodnotě** λ.

Poznámka: z předchozí definice ihned plyne, že je-li $\mathbf{u}$ vlastním vektorem φ, příslušným vlastní hodnotě λ, pak také každý nenulový vektor $\mathbf{w} \in L(\mathbf{u})$, tj. každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{u}$, je rovněž vlastním vektorem φ, příslušným téže vlastní hodnotě λ.

Příklad 3.3.: Nechť V je vektorový prostor nad T. Dále:

1. nechť $\mathrm{id}_V : V \to V$ je identická lineární transformace prostoru V. Pak zřejmě každý nenulový vektor z V je vlastním vektorem id_V, příslušným vlastní hodnotě $\lambda = 1$ (což je jediná vlastní hodnota id_V).

2. nechť $\omega : V \to V$ je nulová lineární transformace prostoru V. Pak podobně každý nenulový vektor z V je vlastním vektorem transformace ω, příslušným vlastní hodnotě $\lambda = 0$ (což je opět jediná vlastní hodnota ω).

3. nechť $\varphi : V \to V$ je libovolná lineární transformace. Pak všechny nenulové vektory z $\operatorname{Ker}\varphi$ (pokud existují) jsou vlastními vektory φ, příslušnými vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Přitom

samozřejmě φ může obecně mít další vlastní hodnoty a jim odpovídající vlastní vektory.

Příklad 3.4.: Nechť $\delta : R_n[x] \to R_n[x]$ je lineární transformace derivování (viz příklad 1.3.). Bezprostředně je vidět, že polynomy stupně nula (tj. nenulové reálné konstantní polynomy) jsou vlastními vektory transformace δ, příslušnými vlastní hodnotě $\lambda = 0$ a že žádné jiné vlastní hodnoty a vlastní vektory δ neexistují.

Předchozí příklady vlastních hodnot a vektorů byly víceméně triviální. Úplný popis vlastních hodnot a vlastních vektorů lineární transformace v obecném případě podává následující věta.

Věta 3.3.: *Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V nad T. Pak:*

1. vlastními hodnotami φ jsou právě všechny kořeny (patřící do T) charakteristického polynomu transformace φ

2. je-li $\lambda \in T$ vlastní hodnota φ, pak vlastní vektory φ, příslušné λ, jsou právě všechny nenulové vektory z podprostoru Ker $(\varphi - \lambda.\mathrm{id}_V)$.

[D ů k a z: ad 2: nechť $\lambda \in T$ je vlastní hodnota φ. Pak $u \in V$ je vlastní vektor φ, příslušný vlastní hodnotě λ, právě když

(1) $\quad u \neq o \ \wedge \ \varphi(u) = \lambda.u$

Ale $\lambda.u = \lambda.\mathrm{id}_V(u)$, a tedy po dosazení a úpravě (1) dostáváme ekvivalentní podmínku:

(2) $\quad u \neq o \ \wedge \ (\varphi - \lambda.\mathrm{id}_V)(u) = o$

Ale množina vektorů splňujících (2) je rovna množině všech nenulových vektorů z podprostoru Ker $(\varphi - \lambda.\mathrm{id}_V)$ vektorového prostoru V.

ad 1 : z právě dokázaného, z V.2.8. a z V.1.7. plyne: λ je vlastní hodnota $\varphi \Leftrightarrow \lambda \in T$ a $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda.\mathrm{id}_V) \neq \{o\} \Leftrightarrow \lambda \in T$ a matice lineární transformace $\varphi - \lambda.\mathrm{id}_V$ (v pevné bázi prostoru V) je singulární. Ale, je-li A maticí lineární transformace φ (v pevné bázi V), pak $(A - \lambda.E_n)$ je maticí lineární transformace $\varphi - \lambda.\mathrm{id}_V$ (v téže bázi). Tedy pak: λ je vlastní hodnota $\varphi \Leftrightarrow \lambda \in T$ a $|A - \lambda.E_n| = 0$, neboli $\lambda \in T$ je kořenem charakteristického polynomu lineární transformace φ.]

Důsledek: *Nechť φ je lineární transformace prostoru V, nechť $A = (a_{ij})$, $1 \leq i,j \leq n$, je matice φ (v dané bázi prostoru V) a nechť λ je vlastní hodnota φ. Pak: vlastní vektory transformace φ, příslušné λ (vyjádřené v dané bázi) jsou právě všechna nenulová*

řešení soustavy lineárních rovnic:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}\,x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0
\end{aligned}
$$

[D ů k a z: nechť $u_1, \ldots, u_n$ je daná báze V a nechť vektor u má v této bázi souřadnice $(x_1, \ldots, x_n)$, tj. $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$. Pak po dosazení a úpravě dostáváme:

$$(\varphi - \lambda.\mathrm{id}_V)(u) = \varphi(u) - \lambda.u = ((a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n).u_1 + \\ + (a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n).u_2 + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n).u_n.$$

Podle předchozí věty je však u vlastním vektorem transformace φ, příslušným vlastní hodnotě λ právě když $u \neq o$ a $u \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda.\mathrm{id}_V)$. Ale to, vzhledem k předchozímu vyjádření, nastane právě když u je nenulový a jeho souřadnice splňují (3).]

Poznámka: 1. s problémem nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů se velmi často setkáváme při řešení praktických úloh, a to nejen v matematice, ale i v různých technických aplikacích. Uvědomme si však, že předchozí věta nám dává odpověď pouze na teoretické úrovni, neboť hledání vlastních hodnot převádí na hledání kořenů polynomu n-tého stupně, což je úloha, která obecně není algoritmicky řešitelná. Samozřejmě existuje pro hledání vlastních hodnot a vlastních vektorů řada numerických metod, které však zde nebudeme uvádět, neboť přesahují rámec tohoto kurzu.

2. Poznamenejme ještě, že z hlediska aplikací bývá výhodné sestavit z vlastních vektorů bázi prostoru V (pokud samozřejmě taková báze vůbec existuje), neboť potom se celá situace početně velmi zjednoduší. Důvodem je, že daná lineární transformace má pak v takové bázi diagonální matici. (**Diagonální matice** je čtvercová matice, v níž všude mimo hlavní diagonálu stojí samé nuly; při tom v hlavní diagonále nuly být mohou, ale nemusí.)

Skutečně, je-li $u_1, \ldots, u_n$ báze prostoru V, sestávající z vlastních vektorů lineární transformace φ, příslušných vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, pak je $\varphi(u_1) = \lambda_1.u_1, \ldots, \varphi(u_n) = \lambda_n.u_n$, a tedy matice lineární transformace φ v bázi $u_1, \ldots, u_n$ má tvar

$$(4)\qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Naopak, má-li lineární transformace φ v nějaké bázi $u_1, \dots, u_n$ diagonální matici tvaru (4), pak $u_1, \dots, u_n$ jsou zřejmě vlastními vektory lineární transformace φ, příslušnými vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (jak plyne ihned z definice matice lineární transformace).

Následující úvahy nás přivedou k jedné dostatečné podmínce pro existenci výše popsané báze, tj. báze sestávající z vlastních vektorů dané lineární transformace.

Věta 3.4.: *Nechť φ je lineární transformace prostoru V. Pak vlastní vektory lineární transformace φ, příslušné navzájem různým vlastním hodnotám, jsou lineárně nezávislé.*

[D ů k a z: nechť $u_1, \dots, u_k$ jsou vlastní vektory lineární transformace φ, příslušné navzájem různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Z posloupnosti vektorů $u_1, \dots, u_k$ vybereme libovolnou maximální lineárně nezávislou posloupnost. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že ji tvoří například prvých r vektorů, tj. $u_1, \dots, u_r$. Zřejmě je $1 \leq r \leq k$. Dále pokračujeme sporem; předpokládejme, že $r < k$. Pak lze ale psát:

$$(5)\qquad u_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} t_i u_i\,, \quad t_i \in T$$

odkud po vynásobení číslem λ_{r+1} dostáváme: $\lambda_{r+1} u_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{r+1} t_i u_i$

Současně však je: $\lambda_{r+1} u_{r+1} = \varphi(u_{r+1}) = \varphi(\sum_{i=1}^{r} t_i u_i) = \sum_{i=1}^{r} t_i \lambda_i u_i$

Porovnáním pravých stran pak dostáváme:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_{r+1} t_i u_i = \sum_{i=1}^{r} t_i \lambda_i u_i\,, \quad \text{odkud:} \quad \sum_{i=1}^{r} t_i(\lambda_{r+1} - \lambda_i) u_i = o$$

Z předpokládané lineární nezávislosti vektorů $u_1, \dots, u_r$ však plyne, že $t_i \cdot (\lambda_{r+1} - \lambda_i) = 0$, pro $i = 1, \dots, r$. Podle předpokladu věty je však $\lambda_{r+1} - \lambda_i \neq 0$, a tedy musí být $t_i = 0$, pro $i = 1, \dots, r$. Po dosazení do (5) pak dostáváme, že $u_{r+1} = o$, což je ale spor s definicí vlastního vektoru. Je tedy $r = k$, tzn. vektory $u_1, \dots, u_k$ jsou lineárně nezávislé.]

Důsledek: *Nechť φ je lineární transformace n-dimenzionálního vektorového prostoru V, která má n navzájem různých vlastních hodnot. Pak matice lineární transformace φ v bázi sestávající z vlastních vektorů, příslušných těmto vlastním hodnotám, je diagonální.*

[D ů k a z: nechť $u_1, \dots, u_n$ jsou vlastní vektory, příslušné navzájem různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lineární transformace φ. Pak podle předchozí věty vektory $u_1, \dots, u_n$ tvoří bázi prostoru V a tvrzení důsledku ihned plyne z 2. části poslední poznámky.]

§4. Ortogonální zobrazení, ortogonální matice

V tomto paragrafu se vrátíme k euklidovským vektorovým prostorům (tj. k vektorovým prostorům nad R, v nichž je definován skalární součin) a budeme studovat vzájemné vztahy mezi nimi. Použijeme k tomu lineárních zobrazení (podobně jako u vektorových prostorů v §1 a §2), která však navíc budou "zachovávat skalární součin".

Definice: Nechť V, V' jsou euklidovské vektorové prostory; nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení, pro něž platí:

$u.v = \varphi(u) \,.\, \varphi(v)$, pro každé $u, v \in V$

Pak φ se nazývá **ortogonální zobrazení** euklidovského prostoru V do V'.

Je-li navíc zobrazení φ bijektivní, pak se nazývá **izomorfizmus euklidovského prostoru** V na V' a euklidovské prostory V, V' se nazývají izomorfní.

Je-li speciálně $V' = V$, pak se ortogonální zobrazení φ nazývá **ortogonální transformace** euklidovského prostoru V.

Podmínku "zachování skalárního součinu" z předchozí definice je možné vyjádřit několika ekvivalentními způsoby, jak ukazuje následující věta.

Věta 4.1.: *Nechť V, V' jsou euklidovské prostory a $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $u.v = \varphi(u) \,.\, \varphi(v)$ *pro každé* $u, v \in V$

(ii) $\|u\| = \|\varphi(u)\|$ *pro každé* $u \in V$

(iii) jsou-li $u_1, \dots, u_k$ *ortonormální vektory ve* V, *pak* $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$ *jsou ortonormální vektory ve* V'.

[D ů k a z: "(i) $\Rightarrow$ (ii)": nechť platí (i) a nechť $u \in V$. Pak (užitím (i)) dostáváme: $\|u\|^2 = u.u = \varphi(u) \,.\, \varphi(u) = \|\varphi(u)\|^2$, odkud pak $\|u\| = \|\varphi(u)\|$.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": nechť platí (ii) a nechť $u_1, \dots, u_k$ jsou ortonormální vektory ve V. Nechť $i, j = 1, \dots, k$. Pak (užitím (ii)):

– pro $i = j$ platí: $\varphi(u_i) \,.\, \varphi(u_i) = \|\varphi(u_i)\|^2 = \|u_i\|^2 = 1$

– pro $i \neq j$ platí: $2.\varphi(u_i) \,.\, \varphi(u_j) = \varphi(u_i + u_j) \,.\, \varphi(u_i + u_j) - \varphi(u_i) \,.\, \varphi(u_i) -$
$- \varphi(u_j) \,.\, \varphi(u_j) = \|\varphi(u_i + u_j)\|^2 - \|\varphi(u_i)\|^2 - \|\varphi(u_j)\|^2 = \|u_i + u_j\|^2 - \|u_i\|^2 - \|u_j\|^2 =$
$= 2.u_i.u_j = 0$, odkud tedy $\varphi(u_i) \,.\, \varphi(u_j) = 0$.

Dohromady dostáváme, že vektory $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$ jsou ortonormální.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": nechť platí (iii) a $u, v \in V$. Je-li $u = o$, pak zřejmě platí (i). Nechť tedy $u \neq o$. Mohou nastat dva případy:

α) vektory u, v jsou lineárně nezávislé;

pak podle poznámky za V.2.3., kap. VI. existují ortonormální vektory e_1, e_2 tak, že $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$, $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$. Podle (iii) však $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ jsou ortonormální vektory a platí:

$$\varphi(u) \,.\, \varphi(v) = \varphi(u_1 e_1 + u_2 e_2) \,.\, \varphi(v_1 e_1 + v_2 e_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 = u.v$$

β) vektory u, v jsou lineárně závislé;

pak opět podle poznámky za V.2.3., kap. VI. existuje normovaný vektor e tak, že $u = t.e$, $v = s.e$. Podle (iii) je vektor $\varphi(e)$ normovaný a platí:

$$\varphi(u) \,.\, \varphi(v) = \varphi(t.e) \,.\, \varphi(s.e) = t.s = (t.e) \,.\, (s.e) = u.v$$

Dohromady tak dostáváme, že platí (i).]

Věta 4.2.: (Věta o izomorfizmu euklidovských prostorů)
Dva euklidovské prostory jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.

[D ů k a z: nechť V, V' jsou euklidovské prostory. Potom:

"$\Rightarrow$": nechť V, V' jsou izomorfní (ve smyslu izomorfizmu euklidovských prostorů). Pak jsou V, V' izomorfní jako vektorové prostory a podle věty o izomorfizmu vektorových prostorů je $\dim V = \dim V'$.

"$\Leftarrow$": nechť $\dim V = \dim V' = n$. Je-li $n = 0$, pak zřejmě V a V' jsou izomorfní. Nechť tedy $n \geqslant 1$ a nechť dále

(I) $e_1, \dots, e_n$ je ortonormální báze V, resp.

(I') $e'_1, \dots, e'_n$ je ortonormální báze V'.

Nechť $u \in V$ je libovolný vektor, přičemž $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$. Položme:

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i e'_i$$

Pak φ je zřejmě zobrazení prostoru V do V', o němž se rozepsáním lehce ověří, že je bijektivní a že je lineárním zobrazením. Navíc je:

$$\|\varphi(u)\|^2 = \varphi(u) \,.\, \varphi(u) = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i e'_i\Big) \,.\, \Big(\sum_{j=1}^{n} u_j e'_j\Big) = u_1 u_1 + \dots + u_n u_n = u.u = \|u\|^2$$

tzn. $\|\varphi(u)\| = \|u\|$, a tedy φ je podle V.4.1. ortogonálním zobrazením. Dohromady pak φ je izomorfizmem euklidovského prostoru V na V'.]

Věta 4.3.: *Nechť V, V' jsou euklidovské prostory, $\varphi : V \to V'$ je ortogonální zobrazení. Pak φ je injektivní zobrazení.*

[D ů k a z: nechť $x \in \operatorname{Ker} \varphi$, tzn. $\varphi(x) = o'$. Pak podle V.4.1. je: $\|x\| = \|\varphi(x)\| = \|o'\| = 0$, a tedy (podle V.1.4.1., kap. VI.) je $x = o$. Dostáváme, že $\operatorname{Ker} \varphi = \{o\}$, odkud podle V.1.6. plyne, že φ je injektivní zobrazení.]

Ve zbývající části tohoto paragrafu se budeme zabývat ortogonálními transformacemi daného euklidovského prostoru V. Je-li specielně $V = \{o\}$ nulový euklidovský prostor, pak zřejmě jedinou možnou ortogonální transformací prostoru V je identické zobrazení. Tento triviální případ nebudeme v dalším uvažovat a budeme se zabývat pouze ortogonálními transformacemi nenulového euklidovského prostoru V. Některé základní vlastnosti ortogonální transformace nenulového euklidovského prostoru popisuje následující věta.

Věta 4.4.: *Nechť $\varphi : V \to V$ je ortogonální transformace euklidovského prostoru V. Pak platí:*

1. φ je bijektivní zobrazení

2. inverzní zobrazení φ^{-1} je ortogonální transformací prostoru V

3. je-li λ vlastní hodnota ortogonální transformace φ, pak $\lambda = \pm 1$

[D ů k a z: 1: plyne přímo z V.4.3. a z V.2.1.

2: zřejmě $\varphi^{-1} : V \to V$ a podle důkazu V.1.8. je φ^{-1} lineárním zobrazením. Dále, nechť $u, v \in V$ libovolné; označme $\varphi^{-1}(u) = x$, $\varphi^{-1}(v) = y$. Potom

$\varphi(x) = u$, $\varphi(y) = v$ a platí: $u.v = \varphi(x) . \varphi(y) = x.y = \varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(v)$, tzn. dostáváme, že φ^{-1} je ortogonální transformace euklidovského prostoru V.

3: nechť λ je vlastní hodnota φ (tj. musí být $\lambda \in R$) a nechť u je vlastní vektor φ, příslušný vlastní hodnotě λ. Pak je $\varphi(u) = \lambda.u$ a $u \neq o$, odkud: $u.u = \varphi(u) . \varphi(u) = (\lambda u) . (\lambda u) = \lambda^2 . (u.u)$. Ale $u.u \neq 0$ (poněvadž $u \neq o$), a tedy musí být $\lambda^2 = 1$ neboli $\lambda = \pm 1$.]

Každá ortogonální transformace (euklidovského) prostoru V je zřejmě lineární transformací tohoto (vektorového) prostoru V, a tedy můžeme sestrojit její matici v nějaké dané bázi prostoru V, specielně např. v dané ortonormální bázi prostoru V. Ukážeme, že v takovém případě bude pak mít tato matice jistý specielní tvar.

Definice: Nechť A je čtvercová matice nad R taková, že A je regulární a platí: $A^{-1} = A'$ (tj. inverzní matice je rovna matici transponované). Pak matice A se nazývá ortogonální matice.

Věta 4.5.: *Nechť A je čtvercová matice řádu n nad R. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) A *je ortogonální matice*

(ii) $A.A' = E_n$

(iii) $A'.A = E_n$

[D ů k a z: věta plyne bezprostředně z definice ortogonální matice, definice inverzní matice a poznámky za V.3.10, kapitoly IV.]

Věta 4.6.: *Nechť A, B jsou ortogonální matice řádu n. Pak platí:*

1. $A.B$ *je ortogonální matice*

2. A^{-1} *je ortogonální matice*

3. $|A| = \pm 1$

[D ů k a z: 1. $(A.B) . (A.B)' = A . (B.B') . A' = A.E_n.A' = A.A' = E_n$, a tedy podle V.4.5. je $A.B$ ortogonální maticí

2. plyne z V.4.5., uvážíme-li, že $(A')' = A$,

3. víme, že $|A| = |A'|$, tzn. pak z V.4.5. a z Cauchyovy věty dostáváme: $1 = |E_n| = |A.A'| = |A| . |A'| = |A|^2$, odkud $|A| = \pm 1$.]

Důsledek: *Množina všech ortogonálních matic řádu n, s operací násobení matic, je grupou.*

[D ů k a z: tvrzení plyne z předchozí věty, uvědomíme-li si, že násobení matic je asociativní a že jednotková matice E_n je ortogonální.]

Věta 4.7.: *Nechť V je euklidovský prostor a $\varphi : V \to V$ je lineární transformace. Pak: φ je ortogonální transformace $\Leftrightarrow$ matice transformace φ v ortonormální bázi prostoru V je ortogonální.*

[D ů k a z: nechť

(1) $\quad e_1, \ldots, e_n$

je ortonormální báze prostoru V a nechť $A = (a_{ij})$ je matice lineární transformace φ v bázi (1). Dále:

"$\Rightarrow$": nechť φ je ortogonální transformace prostoru V. Pak podle V.4.1. vektory $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ tvoří ortonormální bázi prostoru V. Označme $A.A' = B = (b_{ij})$. Potom: $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.a_{jk} = (a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n) . (a_{j1}e_1 + \ldots + a_{jn}e_n) = \varphi(e_i) . \varphi(e_j)$, odkud plyne, že $b_{ij} = 1$ pro $i = j$, resp. $b_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Tedy $A.A' = E_n$ a podle V.4.5. je matice A ortogonální.

"$\Leftarrow$": nechť matice A je ortogonální, tzn. platí (dle V.4.5., část (iii)):

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}.a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Nechť dále $u \in V$ libovolný, přičemž $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$. Potom:

$$\|u\|^2 = u.u = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 .$$

Dále: $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i.\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ki}u_i) . e_k$,

odkud rozepsáním a úpravou dostáváme:

$\|\varphi(u)\|^2 = \varphi(u) . \varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj})u_i u_j$, tzn. po dosazení (2) je pak

$\|\varphi(u)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$. Dohromady tedy $\|u\|^2 = \|\varphi(u)\|^2$, neboli $\|u\| = \|\varphi(u)\|$, což znamená, že φ je ortogonální transformace.]

Na závěr ještě ukážeme, že maticemi přechodu od ortonormální báze k ortonormální bázi euklidovského prostoru jsou právě ortogonální matice.

Věta 4.8.: *Nechť*

(3) $u_1, \dots, u_n$

(4) $v_1, \dots, v_n$

jsou báze euklidovského prostoru V *a nechť báze (3) je ortonormální. Pak platí: matice přechodu od báze (3) k bázi (4) je ortogonální* $\Leftrightarrow$ *báze (4) je ortonormální.*

[D ů k a z: nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze (3) k bázi (4), tzn. platí: $v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k$, pro $i = 1, \dots, n$. Potom však:

$$v_i \cdot v_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} a_{lj} u_l\right) = a_{1i}a_{1j} + \dots + a_{ni}a_{nj}$$

odkud již (užitím V.4.5.) bezprostředně plyne celé tvrzení věty.]