ZS1BK_PGE1 Geometrie I: Vybrané úlohy z elementární geometrie

1. Které geometrické útvary mohou vzniknout a) jako průnik dvou polopřímek téže přímky, b) jako průnik dvou polorovin téže roviny? V případě b) uvažujte všechny možnosti vzájemné polohy hraničních přímek daných polorovin.

2. Vyšetřete všechny možné případy vzájemné polohy tří různých přímek ležících v jedné rovině.

3. Které geometrické útvary mohou být průnikem přímky m a poloroviny pA.

4. Rozhodněte, zda dvě opačné polopřímky tvoří rozklad dané přímky na třídy. (Totéž pro dvě navzájem opačné poloroviny a dva navzájem opačné poloprostory.

5. Uvnitř jedné poloroviny určené přímkou h zvolte body A, B a uvnitř opačné poloroviny body C, D tak, aby přímky AB a CD byly s přímkou h různoběžné. Na přímce AB zvolte bod M, na přímce CD bod N. Jak je nutno zvolit body M, N, aby úsečka MN protala.přímku h, tj. aby obsahovala bod přímky h ležící mezi body M, N?

6. Přímka p, která prochází libovolným vnitřním bodem L strany AB trojúhelníku ABC a je rovnoběžná se stranou AC, protíná stranu BC v jejím vnitřním bodě. Dokažte.

7. Zvolte tři různé body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Určete množinu všech bodů X takových, že mezi body C, X leží bod Y úsečky AB.

8. Je dán trojúhelník ABC. Zvolte bod X, který leží mezi body A, B, bod Y, který leží mezi body B, C. Zdůvodněte, že úsečky AY a CX mají společný bod..

9. V množině všech přímek v rovině uvažujte binární relace: „přímka a je rovnoběžná s přímkou b“, „přímka a splývá s přímkou b“, „přímka a protíná přímku b“, „přímka a je kolmá k přímce b“.Určete vlastnosti těchto čtyř relací (R, AR, S, AS, T, SO).

10. Zjistěte, zda je konvexní bodovou množinou a)trojúhelník ABC bez jednoho bodu jeho obvodu, b)sjednocení vnitřku trojúhelníku ABC a dvou bodů jeho obvodu, c)sjednocení vnitřku čtverce a dvou jeho stran.

11. Načrtněte dva konvexní rovinné útvary, jejichž sjednocením je rovinný útvar a)konvexní, b) nekonvexní. Dále načrtněte dva nekonvexní rovinné útvary tak, že jejich sjednocení (průnik) je rovinný útvar a)konvexní, b)nekonvexní.

12. Je známo, že tři různé body A, B, C náleží jistému konvexnímu útvaru U. Které další body ještě určitě patří útvaru U? Jaký geometrický útvar vytvoří? Uvažujte, že body A, B, C neleží (leží) v jedné přímce.

13. Je dán konvexní úhel AVB. Jako množinu bodů definujte úhel k němu vrcholový a úhel k němu vedlejší.

14. Osy dvou vedlejších úhlů jsou polopřímky navzájem kolmé. Dokažte.

15. Zvolte tři přímky a, b, c tak, aby ležely v jedné rovině a neprocházely týmž bodem. V obrázku vyznačte dvojice úhlů vedlejších, vrcholových, střídavých a souhlasných a uveďte definice těchto pojmů.

16. Načrtněte příklad lomené čáry, která v dané rovině a) je jednoduchá uzavřená, b) není jednoduchá a není uzavřená, c) je uzavřená a není jednoduchá.

17. Vyslovte alespoň dvě ekvivalentní definice trojúhelníku ABC. Zdůvodněte tvrzení: trojúhelník je podmnožinou každého svého vnitřního úhlu.

18. Vyšetřete, jaký útvar může být průnikem dvou trojúhelníků. Načrtněte všechny možné případy.

19. Je dán trojúhelník ABC. Nad jeho stranami AB, AC jsou vně sestrojeny čtverce ABGF, ACDE. Dokažte shodnost úseček EB a CF.

20. Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou vně sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABH a ACK. Dokažte shodnost úseček CH a BK.

21. Dokažte: Leží-li bod X na ose dané úsečky AB, pak AX ≅ BX.

22. Na základě definice omezeného útvaru zformulujte definici útvaru, který není omezený. Uveďte příklady omezených i neomezených geometrických útvarů.

23. Je dána kružnice k(S, r) a kruh K(S, r). Rozhodněte, zda bod S náleží vnitřku, hranici nebo vnějšku kružnice k, kruhu K vzhledem k rovině, v níž leží (vzhledem k prostoru, v němž leží).

24. Určete hranici, vnitřek a vnějšek kruhu, kružnice, trojúhelníku, poloroviny, roviny – vzhledem k rovině a vzhledem k prostoru v němž leží.

25. V rovině ρ je dána přímka p. Rozhodněte, zda přímka p je uzavřeným nebo otevřeným útvarem vzhledem k rovině ρ.

26. Načrtněte několik dvojic geometrických útvarů v rovině, které se překrývají a několik dvojic útvarů, které se nepřekrývají.- vzhledem k této rovině. Rozhodněte též o překrývání těchto útvarů vzhledem k prostoru.

27. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolte bod S. Dokažte, že součet úseček SA + SB + SC je větší než poloviční součet jeho stran.

28. Dva trojúhelníky mají jednu stranu společnou a další dvě jejich strany se protínají. Dokažte, že součet protínajících se stran těchto trojúhelníků je větší než součet těch jejich stran, které nemají společný bod.

29. Je dána přímka h. Zvolte body E, F tak, aby je přímka h oddělovala. Dokažte, že bod M, v němž přímka EF protíná přímku h, má ze všech bodů přímky h nejmenší součet vzdáleností od bodů E, F.

30. Dokažte, že pro každý konvexní čtyřúhelník platí: Součet dvou protějších stran konvexního čtyřúhelníku je menší než součet jeho úhlopříček.

31. Bod U je vnitřním bodem trojúhelníku ABC. Dokažte, že $\measuredangle AUB > \measuredangle ACB$, $\measuredangle BUC > \measuredangle BAC$, $\measuredangle AUC > \measuredangle ABC$.

32. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AC a rovnoramenný trojúhelník ABD se základnou AB tak, že bod C leží mezi body A, D. Konvexní úhel ADB = α. Pomocí úhlu α vyjádřete vnitřní úhly trojúhelníku ABC.

33. V trojúhelníku ABC je AB > BC. Bod D je libovolný vnitřní bod strany AC. Dokažte, že AB > BD.

34. Největší strana konvexního čtyřúhelníku ABCD je AB, nejmenší CD. Dokažte, že $\measuredangle ABC < \measuredangle ADC$.

35. Dokažte: leží-li bod X na ose dané úsečky AB, pak AX ≅ BX.

36. Přímka o je osou úsečky AB. Bod X je libovolný vnitřní bod poloroviny oA. Dokažte, že AX < BX.

37. Splývá-li těžnice trojúhelníku s jeho výškou, je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

38. Leží-li bod X na ose daného konvexního úhlu AVB, pak má od jeho ramen stejné vzdálenosti. Dokažte.

39. Jestliže je čtyřúhelník rovnoběžníkem (tj. každé dvě jeho protější strany jsou rovnoběžné), pak platí, že jeho
a) protější strany jsou shodné,
b) úhlopříčky se půlí,
c) protější úhly jsou shodné.
Dokažte.

40. Dokažte, že pro každý čtyřúhelník platí: a) čtyřúhelník ABCD je rovnoběžník právě tehdy, jsou-li každé dvě jeho protější strany shodné, b) čtyřúhelník ABCD je rovnoběžník právě tehdy, když se jeho úhlopříčky navzájem půlí.

41. Dokažte, že pro každý čtyřúhelník platí: Jsou-li dvě protější strany čtyřúhelníku ABCD rovnoběžné a navzájem shodné úsečky, pak je čtyřúhelník ABCD rovnoběžník.

42. Je dán trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ. Pomocí těchto úhlů vyjádřete úhly trojúhelníku KLM, jehož vrcholy jsou průsečíky os vnějších úhlů daného trojúhelníku ABC.

43. Je dán trojúhelník ABC. Jeho vrcholy jsou vedeny rovnoběžky s jeho protějšími stranami. Dokažte, že průsečíky těchto přímek jsou vrcholy trojúhelníku, který je sjednocením čtyř nepřekrývajících se trojúhelníků, shodných s trojúhelníkem ABC.

44. ABCD je konvexní čtyřúhelník, body E, F, G, H jsou postupně středy jeho stran. Dokažte, že a) čtyřúhelník EFGH je rovnoběžník,
b) obvod čtyřúhelníku EFGH je roven součtu velikostí úhlopříček čtyřúhelníku ABCD.

45. Body K, L jsou středy stran AB, CD rovnoběžníku ABCD. Dokažte, že úsečky DK, LB dělí úhlopříčku AC na tři shodné díly.

46. Množinou všech bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů A, B této roviny stejnou vzdálenost, je osa úsečky AB. Dokažte.

47. Množinou všech bodů, které náleží konvexnímu úhlu AVB a které mají od obou ramen tohoto úhlu stejnou vzdálenost, je osa úhlu AVB (tj. polopřímka VR, kde R je bodem úhlu AVB a úhly AVR a BVR jsou shodné). Dokažte.

48. Množinou všech bodů v rovině, které jsou vrcholy pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma různými body A, B je Thaletova kružnice (tj. kružnice s průměrem AB bez bodů AB). Dokažte.

49. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které
a) mají daný poloměr r a procházejí dvěma různými body A, B,
b) mají daný poloměr r a dotýkají se dané přímky p,
c) se dotýkají dvou daných rovnoběžek a, b,
d) se dotýkají dvou daných různoběžek a, b,
e) se dotýkají dané přímky p v daném bodě A.

50. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) c, b, t_c	c) a, v_a, b	e) b, c, v_a	g) c, t_a, t_b
b) α, c, t_c	d) a, α, v_b	f) b, γ, v_c	h) v_a, v_b, γ

51. Sestrojte rovnoběžník ABCD, je-li dáno:
a) velikost strany AB, úhlu $\alpha = \measuredangle ABC$ a velikost úhlopříčky AC,
b) velikost úhlopříček AC a BD a výška ke straně AB.

52. Sestrojte kosočtverec ABCD, je-li dána velikost úhlu ABC a velikost úhlopříčky AC.

53. Sestrojte kružnici k, která se a) dotýká přímky t v bodě T a další přímky p,
b) dotýká dvou rovnoběžných přímek a, b a další přímky c, která je s přímkami a, b různoběžná.

54. Dokažte, že úhlopříčka čtverce je nesouměřitelná s jeho stranou.

55. Je dána úsečka AB, jejíž velikost je rovna jedné. Sestrojte úsečky AC, AD, AE, AF tak, aby platilo /AC/ $=\sqrt{2}$, /AD/ $= \sqrt{3}$, /AE/ $= \sqrt{4}$, /AF/ $=\sqrt{5}$.

56. Určete vzdálenost dvou kružnic (kruhů) – uvažujte všechny možné jejich vzájemné polohy.

57. Určete vzdálenost bodu od přímky, polopřímky a úsečky. Uvažujte různé možnosti jejich vzájemné polohy.

58. Určete vzdálenost bodu od konvexního úhlu. Uvažujte různé možnosti vzájemné polohy daného bodu a tohoto úhlu.

59. Užitím pravítka a kružítka narýsujte úhly o velikostech 15°, 22,5° 30°, 45°, 60°, 67,5°, 75°, 90°. Zapište velikosti těchto úhlů v obloukové míře.

60. Užitím Jordanovy teorie míry lze odvodit vzorec pro výpočet obsahu obdélníka o rozměrech a, b, tj. S = ab. Užitím tohoto vzorce odvoďte vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka, rovnoběžníka a lichoběžníka. Uveďte též návod, jak určit obsah obecného čtyřúhelníka a dalších mnohoúhelníků.

61. Zvolte v rovině čtvercovou síť o rozměru 1cm. Narýsujte takový geometrický útvar, aby jeho jádro v této síti mělo velikost 5. Vyšrafujte též jeho obal v této síti.

62. Na milimetrový papír narýsujte libovolný rovinný geometrický útvar. Určete jeho jádro a obal v sítích s rozměry 1cm a 0,5 cm. Porovnejte velikosti těchto jader a obalů a odhadněte velikost narýsovaného geometrického útvaru.

63.Odhadněte obsah čtvrtkruhu pomocí tří různých čtvercových sítí (využijte milimetrový papír).

64.Určete geometrický útvar v rovině, který není Jordanovsky měřitelný.