1 URČOVÁNÍ JEDNOTEK FYZIKÁLNÍCH VELIČIN

př.: Určete jednotky veličiny r nazývané refrakce, víte-li, že se spočítá podle vztahu:

$$r = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho}$$

kde ρ je hustota, kterou jste dosadili v jednotkách $g \cdot cm^{-3}$, n je index lomu.

Pravidla určování jednotek:

1) Výrazy log x, ln x, 10^x, sin x, cos x, tg x, cotg x, jsou definovány pouze pro bezrozměrná čísla (goniometrické funkce i pro úhlové stupně). Argument i hodnota těchto funkcí jsou bezrozměrná čísla. Píšeme [log x] = 1, [sin x] = 1,…

2) Pokud se ve fyzikálním vzorci vyskytuje číslo (a ne symbol pro konstantu), je toto číslo bezrozměrné.

3) Hodnoty sečítaných nebo odečítaných veličin musejí být ve stejných jednotkách. Výsledek má stejné jednotky jako sečítané (odečítané) veličiny.

4) Jednotky dané veličiny zjišťujeme následovně: Místo symbolů fyzikálních veličin dosadíme do vzorce jejich jednotky (podle bodů 1-3). Symbol veličiny, jejíž jednotky chceme zjistit, napíšeme do hranaté závorky. Běžnými matematickými úpravami (násobení, dělení) vyjádříme, čemu se rovná hodnota v hranaté závorce. Výsledek jsou hledané jednotky.

Použití uvedených pravidel si ilustrujeme nenásledujících příkladech:

Př.:

$$r = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho}$$

$[n^2] = 1$ bezrozměrné číslo, neboť ve vzorci je odčítání bezrozměrného čísla.

$[n^2 - 1] = 1$ výsledek odčítání bezrozměrných čísel

$[n^2 + 2] = 1$ výsledek sečítání bezrozměrných čísel

Po dosazení do rovnice ..... dosatneme:

$$[r] = \frac{[n^2 - 1]}{[n^2 + 2]} \cdot \frac{1}{[\rho]}$$

$$[r] = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{g \cdot cm^{-3}}$$

$$[r] = \frac{1}{g \cdot cm^{-3}} = \underline{\underline{g^{-1} \cdot cm^3}}$$

r	refrakce	$[r]$=g^{-1}·cm^3
n	index lomu	
ρ	hustota	$[\rho]$=g·cm^{-3}

Př.: Určete jednotky veličiny *G*, platí-li $G = -RT \ln K$. Symbolem *R* je označena molární plynová konstanta.

Řešení:

$$[G] = [-1] \cdot [R] \cdot [T] \cdot [\ln K]$$

$$[G] = 1 \cdot J \cdot K^{-1} mol^{-3} \cdot K \cdot 1$$

$$\underline{\underline{[G] = J \cdot mol^{-3}}}$$

G	Gibbsova energie	$[G]$=J·mol^{-3}
R	molární plynová konstanta	$[R]$=J·K^{-1}·mol^{-1}
T	teplota	$[T]$=K

Př.:Při stanovení viskozity kapaliny Höpplerovým viskozimetrem počítáme konstantu *K* ze vztahu $t = \eta \cdot K \cdot (\rho_2 - \rho_1)$. Určete jednotky veličiny *K*, víte-li:

$$[\mathrm{t}] = [\eta] \cdot [K] \cdot [\rho_2 - \rho_1]$$

$$s = 10^{-3} Pa \cdot [K] \cdot kg \cdot m^{-3}$$

Pa...není základní jednotka SI. *Pa*=[*p*]

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot a}{S}$$

$$[p] = \frac{[m] \cdot [a]}{[S]}$$

$$[p] = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2}}{m^2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$

$$\Rightarrow Pa = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$

$$[t] = [\eta] \cdot [K] \cdot [\rho_2 - \rho_1]$$

$$s = 10^{-3} Pa \cdot [K] \cdot kg \cdot m^{-3}$$

$$s = 10^{-3} kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2} \cdot [K] \cdot kg \cdot m^{-3}$$

$$[K] = 10^3 \cdot s^3 \cdot kg^{-2} \cdot m^4$$

t čas, $[t]=s$

η viskozita $[\eta]$=mPa=10^{-3}Pa (milipascal)

ρ_2 hustota kuličky, $[\rho_2]$=kg·m^{-3}

ρ_1 hustota vody, $[\rho_1]$=kg·m^{-3}

Př.: V jakých jednotkách máme dosadit koncentraci *c* do vztahu pro osmotický tlak?

$$\Pi = RTc$$

$$[\Pi] = [R] \cdot [T] \cdot [c]$$

$$[c] = \frac{[\Pi]}{[R] \cdot [T]}$$

$$[c] = \frac{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \cdot K}$$

Π	osmotický tlak	[Π]=kg·m^{-1}·s^{-2}
R	molární plynová konstanta	[*R*]=J·K^{-1}·mol^{-1}
T	teplota	[*T*]=K

J...není základní jednotka SI. *J*=[*W*]

$$W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s$$

$$[W] = kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

$$\Rightarrow J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

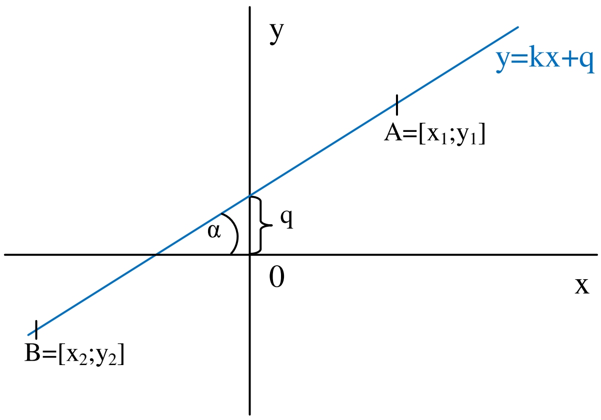
$$[c] = \frac{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \cdot K}$$

$$[c] = \frac{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}} = \underline{\underline{mol \cdot m^{-3}}}$$

2 PŘÍMKA, LINEÁRNÍ REGRESE, LINEARIZACE

2.1 ROVNICE PŘÍMKY (SMĚRNICOVÝ TVAR)

$$\boxed{\begin{array}{l} y = kx + q \\ k = \mathrm{tg}\,\alpha \end{array}}$$



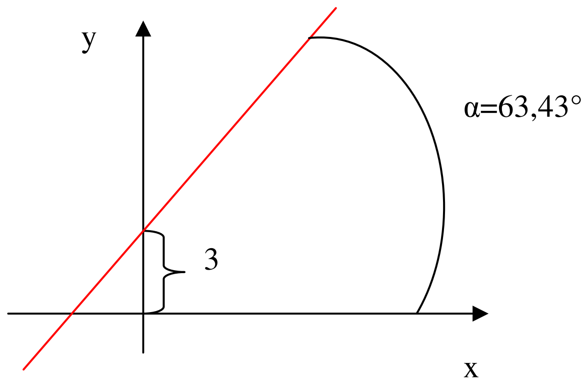
k směrnice přímky

q velikost úseku na ose y

Př.:

$$y = 2x + 3$$
$$\Downarrow$$
$$k = 2$$
$$q = 3$$

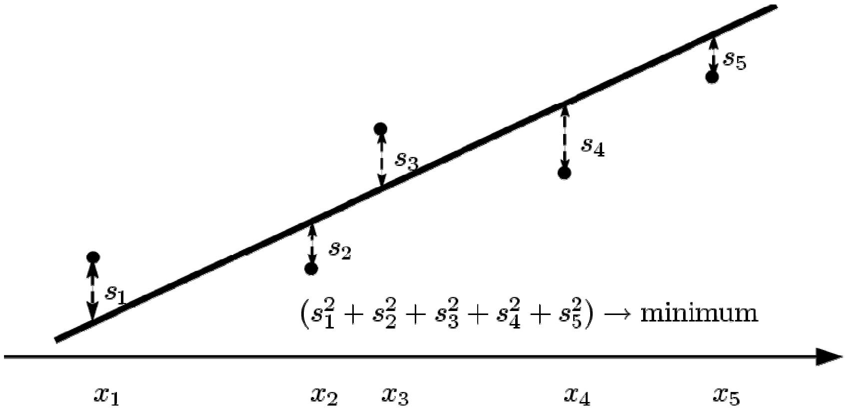
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



2.2 LINEÁRNÍ REGRESE:

Experimentálně zjištěnými body chceme „co nejlépe“ proložit přímku. Jedna z metod lineární regrese je tzv.:

2.2.1 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ:



Experimentálními body prokládáme přímku tak, aby součet druhých mocnin (= čtverců) odchylek k mezi y-souřadnicemi exp.bodů a odpovídajících bodů na hledané přímce (tj. Δy), byl co nejmenší. Tomuto požadavku vyhovuje přímka $y = kx + q$,

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

kde:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Σ suma (součet)

n počet bodů, jimiž je prokládána přímka

$[x_i y_i]$ souřadnice jednotlivých bodů, jimiž je prokládaná přímka.

2.3 LINEARIZACE

= převod vyjádření určité nelineární závislostí na tvar což je rovnice přímky $y = kx + q$

Důvod: lineární (= přímková) závislost se zpracovává snadněji než jiné závislosti.

Postup linearizace: Obecný postup neexistuje.

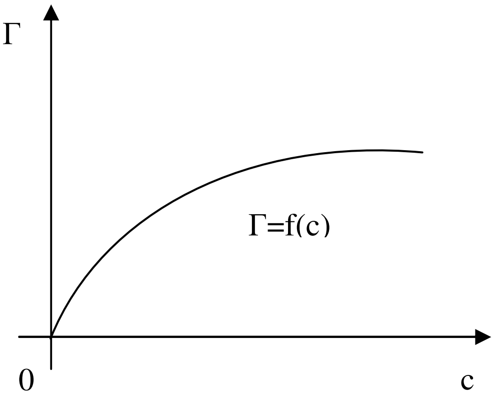
Zavádíme <u>vhodnou substituci:</u>

původní závislost	linearizovaná závislost
výraz obsahující jen nezávislou proměnou a čísla	x
výraz obsahující jen závislou proměnou a čísla	y
výraz obsahující jen konstanty (i neznámé)	k,q

Př.:

1)původní závislost:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{max} \cdot \omega \cdot c}{1 + \omega \cdot c}$$



c nezávislé proměnná (koncentrace)

Γ závislá proměnná

Γ_{max},ω konstany

2) linearizace:

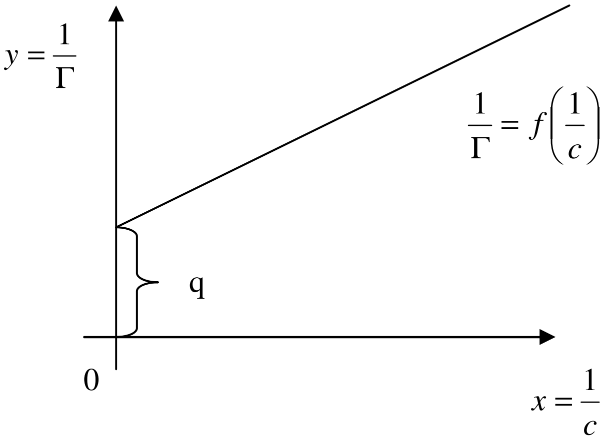
převrácená hodnota obou stran rovnice:

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1 + \omega \cdot c}{\Gamma_{max} \cdot \omega \cdot c}$$

úpravy pravé strany:

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1 + \omega \cdot c}{\Gamma_{max} \cdot \omega \cdot c} + \frac{\omega \cdot c}{\Gamma_{max} \cdot \omega \cdot c}$$

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma_{max} \cdot \omega} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{\Gamma_{max}}$$



3) linearizovaná závislost $y = kx + q$:

substituce: $\frac{1}{\Gamma} = y, \frac{1}{c} = x, \frac{1}{\Gamma_{max} \cdot \omega} = k, \frac{1}{\Gamma_{max}} = q$

Jsou-li dvojce [c,Γ] a tedy i dvojce [x,y] zjištěny experimentálně, lze pak po provedení linearizace zjistit hodnoty k,q například pomocí metody nejmenších čtverců a pak zpětně vypočíst Γ_{max},ω.

Př.: Byly naměřeny dvojice [c,Γ], které mají vyhovovat tzv. Langmanovy izotermě:

$\Gamma = \dfrac{\Gamma_{\max} \cdot \omega \cdot c}{1 + \omega \cdot c}$. Určete hodnoty konstant Γ_{max},ω.

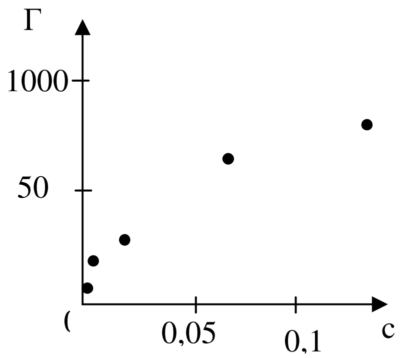
c	Γ	$x = \dfrac{1}{c}$	$y = \dfrac{1}{\Gamma}$
0,001	48	1000	0,0208
0,002	95	500	0,0105
0,005	220	200	0,00455
0,01	300	100	0,00333
0,05	700	20	0,00143
0,1	850	10	0,00115

Z metod nejmenších čtverců: $\dfrac{1}{\Gamma_{\max} \cdot \omega} = k$

$k = 1{,}98 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \omega \doteq \underline{\underline{48}}$

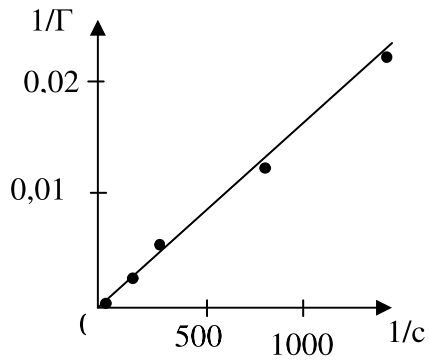
$q = 9{,}47 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \Gamma_{\max} \doteq \underline{\underline{1050}}$

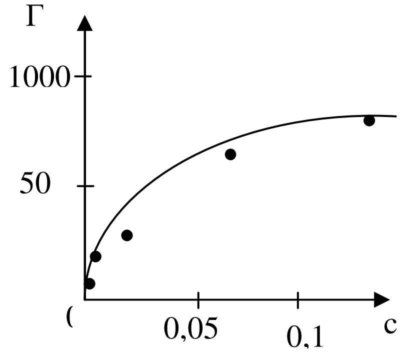
Původní závislost



linearizace

linearizovaná závislost





k,q→výpočet konstant v původní závislosti

3 VEKTORY

Fyzikální veličiny:

skaláry ... veličina, k němuž určení stačí udat jen velikost (hmotnost, čas, hustota, ...)

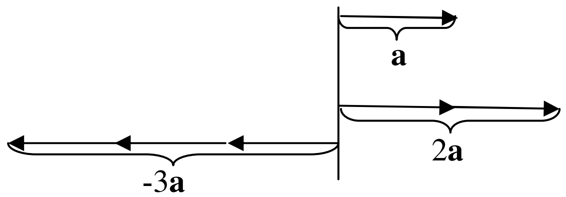
vektory ... je nutno udat velikost a směr (rychlost, zrychlení, síla, dipólový moment, ...)

$\vec{F}$*...vektor*

$|\vec{F}|$ *...velikost vektoru*

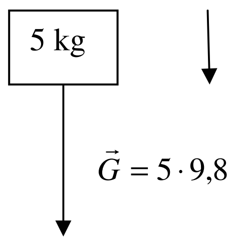
3.1 MATEMATICKÉ OPERACE S VEKTORY

3.1.1 NÁSOBENÍ VEKTORU SKALÁREM



Př:

$\vec{G} = m \cdot \vec{g}$

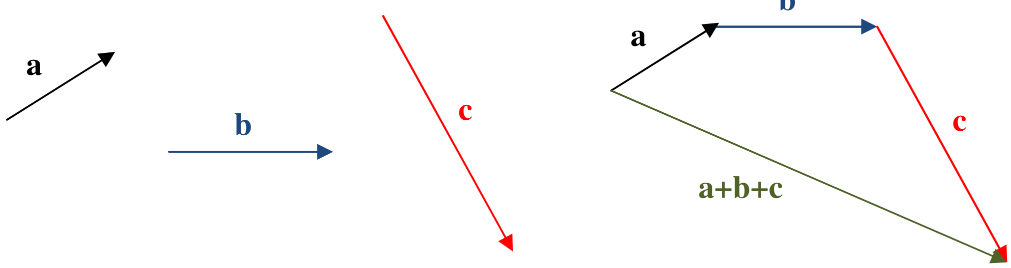


$\vec{g} = 9{,}81\, m \cdot s^{-2}$

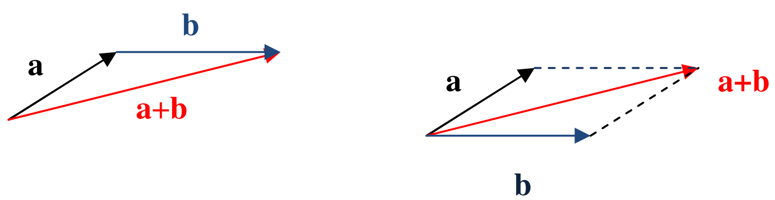
G	tíhová síla	$[G]$=kg·m·s^{-2}
m	hmotnost	$[m]$=kg
g	tíhové zrychlení	$[g]$=m·s^{-2}

$\vec{G} = 5 \cdot 9{,}81 kg \cdot m \cdot s^{-2} = 43{,}0 N$

3.1.2 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ.



Pozn. 2 vektory lze sečíst i pomocí tzv. vektorového rovnoběžníka:



3.1.3 ODEČÍTÁNÍ VEKTORŮ

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$

3.1.4 SKALÁRNÍ SOUČIN DVOU VEKTORŮ (VÝSLEDKEM JE SKALÁR)

Skalárním součinem dvou vektorů se nazývá součin jejich velikostí násoben kosinem úhlu jimi sevřeného: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$

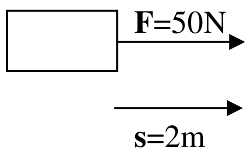
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$a \| b \Rightarrow \varphi = 0° \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

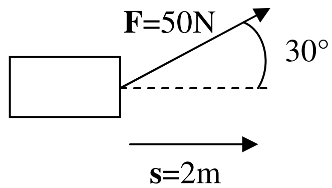
$a \perp b \Rightarrow \varphi = 90° \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \emptyset$

Př: $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$

A	práce (skalár)	[A]=J
F	síla (vektor)	
s	dráha (vektor)	[*s*]=m

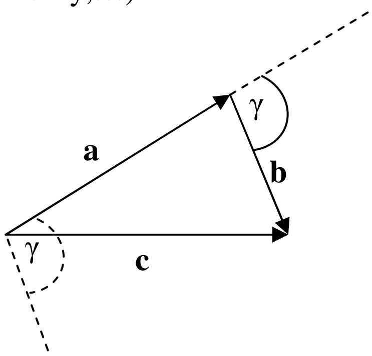


$A = 50 \cdot 2 \cdot \cos 0° = 100J$



$A = 50 \cdot 2 \cdot \cos 30° = 86{,}6J$

Využití skalárního součinu k výpočtu úhlu nebo stran v trojúhelníku (délky vazeb, vazebné úhly,…)

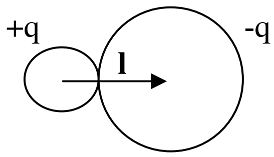


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

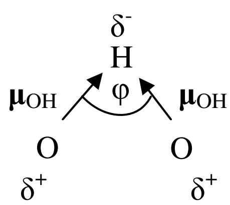
$\vec{c}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{a}\vec{b}$

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\gamma}$

Př. Dipólový moment vody je $6{,}13 \cdot 10^{-30}$Cm. Vypočítejte velikost úhlu H-O-H v molekule vody, víte-li, že dipólový moment skupiny OH je $5{,}04 \cdot 10^{-30}$Cm.



$\vec{\mu} = |q| \cdot \vec{l}$



$\mu_{H_2O} = \mu_{OH}^2 + \mu_{OH}^2 + 2\mu_{OH}^2 \cos\varphi$

$\mu_{H_2O} = 2\mu_{OH}^2 (1 + \cos\varphi)$

$$(6{,}13 \cdot 10^{-30})^2 = 2 \cdot (5{,}04 \cdot 10^{-30})^2 \cdot (1 + \cos\varphi)$$

$$\frac{6{,}13^2 \cdot (10^{-30})^2}{2 \cdot (5{,}04)^2 \cdot (10^{-30})^2} - 1 = \cos\varphi$$

$$\frac{6{,}13^2}{2 \cdot (5{,}04)^2} - 1 = \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \underline{\underline{105{,}09°}}$$

3.1.5 5) VEKTOROVÝ SOUČIN DVOU VEKTORŮ A,B JE TŘETÍ VEKTOR C, KTERÝ:

1) Má velikost rovnou obsahu rovnoběžníka sestrojeného z vektorů **A**,**B**
2) Je kolmý k rovině rovnoběžníka.
3) Vektory **A**,**B**,**C** tvoří pravotočivou soustavu

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

Př:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

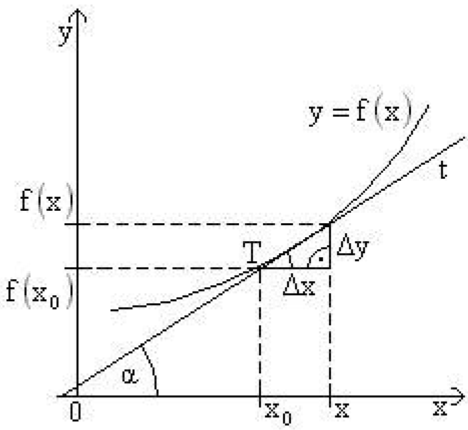
Pozn. 1: Obsah rovnoběžníka: $S = a \cdot b \cdot \sin\varphi$

Pozn. 2: Obsah trojůhelníka: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\varphi$

4 ÚVOD DO MATEMATICKÉ ANALÝZY

4.1 *DERIVACE A DIFERENCIÁL*

Derivace funkce y=f(x) v bodě x=a je rovna směrnici tečny ke křivce v bodě x=a.



$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=y'$$

dx … diferenciál x

dy … diferenciál y

$\frac{dy}{dx}$ … derivace y podle x

Hledání derivace se nazývá derivování funkce.

4.1.1 ZÁKLADNÍ VZORCE PRO DERIVOVÁNÍ

Funkce y	Derivace y podle x
C (c=konst.)	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
ln x	1/x
sin x	cos x
cos x	-sin x
tg x	$1/\cos^2 x$
cotg x	$-1/\sin^2 x$

4.1.2 VÝPOČET DERIVACE SOUČTU, ROZDÍLU, SOUČINU A PODÍLU FUNKCÍ

Uvažujme funkce y=f_1(x) a z=f_2(x). Pak platí:

$$\frac{d(y+z)}{dx}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{d(y-z)}{dx}=\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{d(y\cdot z)}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot z+y\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{d\left(\frac{y}{z}\right)}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}\cdot z-y\cdot\frac{dz}{dx}}{z^2}$$

Pozn.: Je-li a=konst., platí:

$$\frac{d(y+z)}{dx}=\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d(y-z)}{dx}=-\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d(y\cdot z)}{dx}=a\cdot\frac{dy}{dx}$$

4.1.3 VÝPOČET DIFERENCIÁLŮ FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Diferenciál *y* je přímo úměrný diferenciálu *x*. Konstantou úměrnosti je derivace *y* podle *x*.

$$\boxed{dy=\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot dx}$$

Př:

$$y=x^3$$
$$dy=3x^2\cdot dx$$

$$y=a,\ a=konst.$$
$$dy=\left(\frac{da}{dx}\right)\cdot dx=0\cdot dx=0$$

Diferenciál konstanty má hodnotu 0.

4.1.4 DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Př.: Vypočtěte čtvrtou derivaci funkce $y=x^{10}$

Řešení:Derivace počítáme postupně:

1.derivace (derivace 1. řádu)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{10})=\underline{\underline{10x^9}}$$

2. derivace (derivace 2. řádu)

derivujeme výsledek 1. derivování

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(10x^9)=\underline{\underline{90x^8}}$$

3. derivace (derivace 3. řádu)

derivujeme výsledek 2. derivování

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(90x^8) = \underline{\underline{720x^7}}$$

4. derivace (derivace 4. řádu)

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(720x^7) = \underline{\underline{5040x^6}}$$

4.1.5 DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

Nechť *y=f(z)* a *y=f(z))*. Definujme složenou funkci *y=f(g(x))*. Derivace složené funkce se počítá podle vztahu:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}$$

y=f(z) … vnitřní fce

y=f(z) … vnější fce

Př:Vypočítejte 1. derivaci *fce y=sin* (x^2).

Řešení:

Vnitřní funkce: $z=x^3$

Vnější funkce: *y=sin x*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin z)}{dz} \cdot \frac{dx^3}{dx} = \cos z \cdot 3x^2 = \underline{\underline{3x^2 \cos x^3}}$$

4.1.6 PARCIÁLNÍ DERIVACE

Mějme funkci více proměnných např.: *f=f(x,y,z)*. Definujeme derivaci funkce *f* podle *x*: $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Tu vypočteme podle obvyklých pravidel pro derivování tak, že všechny ostatní proměnné kromě *x* při derivování pokládáme za konstanty. V chemii bývá zvykem do závorky za derivaci připsat symboly proměnných, které se při výpočtu mají pokládat za konstanty. Tedy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$$

Funkce *f=f(x,y,z)* má tři parciální derivace prvního řádu:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$$

Př.: $f = 5x^2y^3 + 2z$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = 5y^3 \cdot 2x + 0 = 10y^3 x$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = 5x^3 \cdot 3y^2 + 0 = 15x^2 y^2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} = 0 + 2 = 2$$

4.1.7 VÝPOČET DIFERENCIÁLŮ FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Uvažujme funkci $z = f(x,y)$. Pro tuto funkci definujeme vztah:

$$\boxed{dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy}$$

Diferenciál označený **dz** nazveme **totální diferenciál z**.

Př.: Je dána fce $z=2x^2+y$. Vypočtěte totální diferenciál z.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 4x$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{dz = 4xdx + dy}}$$

Př: Vnitřní energie uzavřené termodynamické soustavy je funkcí entropie S a objemu V. $U=f(S,V)$. Totální diferenciál vnitřní energie pak je: $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS$$

$$-p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV$$ … spojení 1. a 2. věty termodynamické

$$\Rightarrow dU = TdS - pdV$$

4.1.8 PŘÍKLADY POUŽITÍ DERIVACÍ

1) Rychlost a zrychlení

   Nechť $s = f(t)$

   Pak :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

   s … dráha

   v … rychlost

   a … zrychlení

   t … čas

2) Průběh funkcí, maxima a minima funkcí

3) další použití ve fyzice:el. proud: $I = \frac{dQ}{dt}$,

4.2 INTEGRAČNÍ POČET, PRIMITIVNÍ FUNKCE NEURČITÉHO INTEGRÁLU

Až dosud jsme k funkcím hledali jejich derivace. Hledejme nyní naopak k derivaci tu funkci, z niž derivace vznikla. Řekněme, že hledáme *primitivní funkci*.

Př.: Víme, že pro určitou funkci *y=f(x)* platí $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$. O kterou funkci *y=f(x)*se jedná? Řešte pomocí tabulky derivací.

Řešení: Víme (viz. tabulka derivací), že $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$. Avšak také $\frac{d(\ln x + k)}{dx} = \frac{1}{x}$, kde *k*=konst.

Hledaná primitivní funkce je tedy každá funkce??????

4.2.1 VÝPOČET NEURČITÉHO INTEGRÁLŮ

1. Tabulkové integrály (k=konst.)

$$\int 0dx = k$$

$$\int dx = x + k$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + k$$

$$\int \cos x dx = \sin x + k$$

Př:

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + k = \frac{x^4}{4}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

4.2.1.1 DALŠÍ PRAVIDLA PRO INTEGROVÁNÍ:

1) Násobící konstantu lze vytknout před integrál.

$$\int 5 \cdot x^2 dx = 5 \cdot \int x^2 dx = 5 \cdot \frac{x^3}{3} + k = \frac{5}{3} x^3 + k$$

2) Integrál rozdílu je roven rozdílu integrálů

$$\int (x^2 + x)dx = \int x^2 dx + \int x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k$$

3) Integrál součtu je roven součtu integrálů

$$\int (x^2 - x)dx = \int x^2 dx - \int x dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + k$$

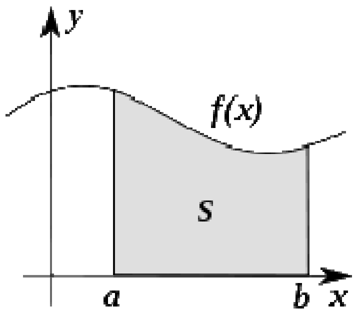
4) Integrál složených funkcí, kde vnitřní fce je typu *v=(ax+b)* se vypočte podle vzorce: $\int f(\underbrace{ax+b}_{v})dx = \frac{1}{a}\int f(v)dv$

Př.:

$$\int e^{(2x+3)}dx = \begin{vmatrix} v = 2x+3 \\ a = 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int e^v dv = \frac{1}{2}e^v + k = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{(2x+3)} + k}}$$

$$\int \frac{1}{7x+5}dx = \begin{vmatrix} v = 7x+5 \\ a = 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\int \frac{1}{v}dv = \frac{1}{7}\ln v + k = \underline{\underline{\frac{1}{7}\ln(7x+5) + k}}$$

4.2.2 URČITÝ INTEGRÁL



Číselná hodnota určitého integrálu je rovna plošnému obsahu obrazce omezeného osou x, grafem fce y=f(x) a čarami x = a a x = b

a … dolní mez

b … horní mez

$$S = \int_a^b y dx$$

4.2.2.1 VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU $\int_a^b y dx$:

1. Vypočteme neurčitý integrál $\int y dx$
2. Do výsledku (1) dosadíme x=b, dostaneme číslo B
3. Do výsledku (1) dosadíme x=a, dostaneme číslo A
4. Určitý integrál $\int_a^b y dx = B - A$
5. Integrační konstantu neuvádíme, odčítáním v (č) se zruší.

Př. Vypočtěte určitý integrál $\int_2^{10} x^3 dx$

Řešení:

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$

2. $B = \frac{10^4}{4}$

3. $A = \frac{2^4}{4}$

4. $\int_2^{10} x^3 dx = \frac{10^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \underline{\underline{2496}}$

Zápis při výpočtu určitého integrálu:

Př.: Vypočtěte $\int_2^{10} x^3 dx$

Řešení:

$$\int_2^{10} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^{10} = \frac{10^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 2496$$

Aplikace určitého integrálu: chemická kinetika, termodynamika, jaderná chemie, mechanika, apod.

4.3 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Mají obrovský význam v matematice, fyzice i chemii.

Jejich *řešením* není číslo, ale *funkce*. Neexistuje obecný návod k jejich řešení. Řešení umíme nalézt jen v některých případech. Proto si ukážeme pouze **řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.**

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu <u>obsahují :</u>

- nezávisle proměnnou *x*
- závisle proměnnou *y*
- derivaci *y* podle *x* $\left(\frac{dx}{dy}\right)$

Řešit diferenciální rovnici *znamená nalézt všechny funkce y=f(x)* takové, aby o jejich dosazení do zadání byla levá strana rovnice rovna pravé

Obyčejná diferenciální rovnice 1.řádu:

- s proměnnými separovanými
- s proměnnými separovatelnými

4.3.1 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S PROMĚNNÝMI SEPAROVANÝMI

A) $dy = f(x)dx$

B) $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Řešení:

1) Typ B převedeme na typ A tím, že obě strany rovnice násobíme diferenciálem *dx*. Tím jsou proměnné separovány (= odděleny). Na jedné straně rovnice je pouze *y*, na druhé straně rovnice je pouze *x*.

2) Obě strany rovnice A integrujeme: $\int dy = \int f(x)dx$

Př.:Řešte diferenciální rovnici $\frac{dy}{dx} = 5x + 1$

Řešení:

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 1 \quad \Big| \cdot dx$$
$$dy = (5x+1)dx \quad \Big| \text{integrace obou stran}$$
$$\int dy = \int (5x+1)dx$$
$$\underline{\underline{y = \frac{5}{2}x^2 + x + k}}$$

zkouška:

$$\mathrm{L} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{2}x^2 + x + k\right) = 5x + 1$$
$$\mathrm{P} = 5x + 1$$
$$\underline{\underline{\mathrm{L} = \mathrm{P}}}$$

C) $g(y)dy = f(x)dx$

D) $g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f(x)$

Řešení:

1) Typ D převedeme na ty C tím, že obě strany rovnice násobíme diferenciálem *dx*.
2) Obě strany rovnice C integrujeme: $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

Př.: Řeště diferenciální rovnici $y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$

Řešení:

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1 \quad \Big| \cdot dx$$
$$ydy = (x+1)dx \quad \Big| \text{integrace}$$
$$\underline{\underline{\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + k}}$$

4.3.2 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S PROMĚNNÝMI SEPAROVATELNÝMI

a) $f(x)dy = g(y)dx$

b) $f(x)\dfrac{dy}{dx} = g(y)$

Řešení:

1) Typ B převedeme na typ A tím, že obě strany rovnice násobíme diferenciálem *dx*. Proměnné nejsou separovány, neboť na obou stranách rovnice A vystupuje *x* i *y*.

2) Provedeme separaci proměnných tak, že obě strany rovnice dělíme funkcemi *f(x)* i *g(x)*. Dostaneme: $\dfrac{1}{g(y)}dy = \dfrac{1}{f(x)}dx$. Proměnné jsou separovány

3) Obě strany rovnice integrujeme: $\displaystyle\int \frac{1}{g(y)}dy = \int \frac{1}{f(x)}dx$

Př.: Řešte diferenciální rovnici $x \cdot \dfrac{dy}{dx} = y$

Řešení:

$x \cdot \dfrac{dy}{dx} = y \quad \Big| \cdot dx$

$x \cdot dy = y \cdot dx \quad \Big| \div x \quad \div y$

$\dfrac{1}{y}dy = \dfrac{1}{x}dx \quad \Big|$integrace

$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$

$\underline{\underline{\ln y = \ln x + k}}$

Dosud jsme hledali *obecná řešení* dif. rovnice, tj. konstanta k mohla mít libovolnou hodnotu.

V chemii však často hledáme hodnotu konstanty k tak, aby řešení vyhovovalo určitým podmínkám (tzv. *počáteční podmínky*).

Postup výpočtu viz. následující příklad:

Př.: Řešte rovnici $2dy = xdx$, víte-li, že pro *x=0* má *y* hodnotu *y=1*.

Řešení:

$$2dy = xdx$$

$$\int_1^y 2dy = \int_0^x xdx$$

$$[2y]_1^y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

$$2y - 2\cdot 1 = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

$$\underline{\underline{2y - 2 = \frac{x^2}{2}}}$$

Použití diferenciálních rovnic v chemii:

termodynamika

$dS = C \cdot \frac{1}{T} dT$ … závislost entropie na teplotě

$\frac{dp}{pdT} = \frac{\Delta H_{m,výp.}}{RT^2}$ … závislost teploty na tlaku (Clausiova - Claeyronova rovnice)

jaderná chemie:

$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$ … zákon radioaktivního rozpadu

chemická kinetika:

$-\frac{dc}{dt} = k$ … reakce nultého řádu

$-\frac{dc}{dt} = k \cdot c$ … reakce prvního řádu

$-\frac{dc}{dt} = k \cdot c^2$ … reakce druhého řádu

5 REPETITORIUM STŘEDOŠKOLSKÉ FYZIKY

5.1 *MECHANIKA*

-kinematika – sleduje změny polohy tělesa v závislosti na čase

- dynamika – jedná se o vzájemné působení těles ke změně jejich pohybového stavu

hmotný bod

- těleso, jehož rozměr a var lze při řešení dané úlohy zanedbat.

Abychom mohli popsat pohyb nějakého tělesa, musíme napřed zvolit těleso, vzhledem k němuž budeme udávat přemístění daného tělesa. Volíme tedy tzv. vztažnou soustavu. Každý pohyb sledujeme vzhledem k určité vztažné soustavě.

5.1.1 POHYB PŘÍMOČARÝ

- hmotný bod se pohybuje po přímce. Pohyb popíšeme pomocí rychlosti *v*.

5.1.1.1 POHYB ROVNOMĚRNÝ: RYCHLOST JE KONSTANTNÍ.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Př.: Vůz se pohyboval rovnoměrně a urazil dráhu 200 m za ¾ min. Vypočtěte jeho rychlost v $m \cdot s^{-1}$ a v $km \cdot h^{-1}$.

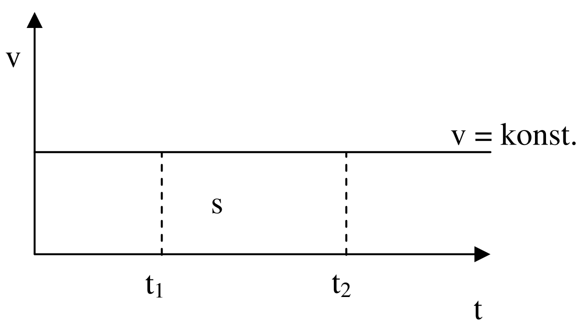
a) Δs = 200m, t = ¾ min=45 s

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200m}{45s} \cong \underline{\underline{4{,}44 m \cdot s^{-1}}}$$

b) Δs = 200m = 0,2 km, t = ¾ min= ¾ ·1/60 hod = 0,0125 hod.

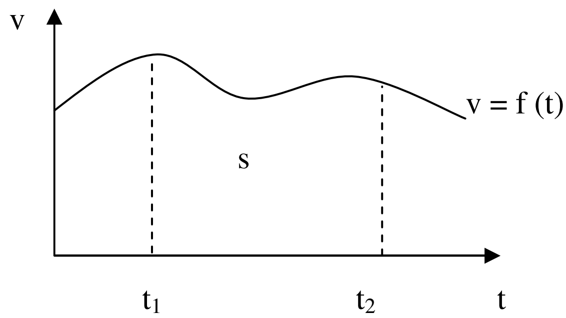
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}2km}{0{,}0125hod} \cong \underline{\underline{16 km \cdot hod^{-1}}}$$

$$\boxed{1m \cdot s^{-1} = 3{,}6 km \cdot hod^{-1}}$$



5.1.1.2 POHYB NEROVNOMĚRNÝ: VELIKOST RYCHLOSTI SE MĚNÍ

určujeme: - průměrnou rychlost: $\bar{v} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$



- okamžitou rychlost: $v = \dfrac{ds}{dt}$

$\Rightarrow ds = vdt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} vdt$

5.1.1.3 POHYB ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ

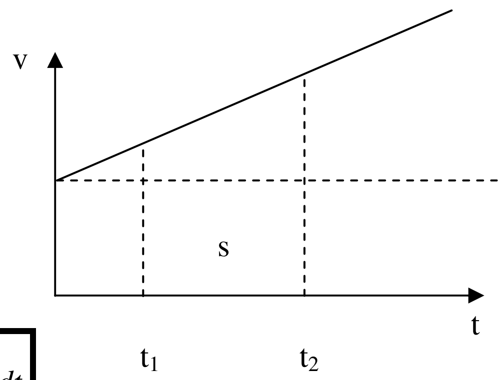
$\boxed{v = v_0 + at}$

v_0 počáteční rychlost

a zrychlení

t čas

v rychlost



a směrnice přímky $v = v_0 + at \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{dv}{at} \Rightarrow v = \int_{t_1}^{t_2} adt}$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} vdt = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at)dt = \left[v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \right]_{t_1}^{t_2} = v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a \cdot (t_2^2 - t_1^2)$$

Př.: Určete počáteční rychlost a konstantní zrychlení cyklisty, který v páté sekundě urazil dráhu 12 m a v desáté sekundě dráhu 16 m.

$$s = v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a \cdot (t_2^2 - t_1^2)$$

$$12 = v_0(5-4) + \frac{a}{2}(5^2 - 4^2)$$

$$16 = v_0(10-9) + \frac{a}{2}(10^2 - 9^2)$$

$$12 = v_0 + \frac{a}{2} \cdot 9$$

$$16 = v_0 + \frac{a}{2} \cdot 19$$

$$4 = 5a$$

$$a = \frac{4}{5} m \cdot s^{-2}, v_0 = 8{,}4 m \cdot s^{-1}$$

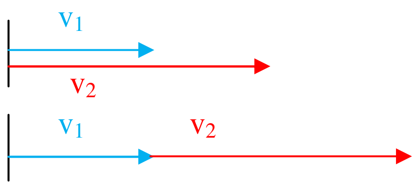
5.1.1.4 RYCHLOST A ZRYCHLENÍ JAKO VEKTORY

Skalár ... veličina, k němuž určení stačí udat jen velikost (hmotnost, čas, hustota, ...)

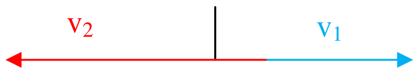
Vektor ... je nutno udat velikost a směr (rychlost, zrychlení, síla, dipólový moment, ...)

5.1.1.4.1 Sčítání vektorů:

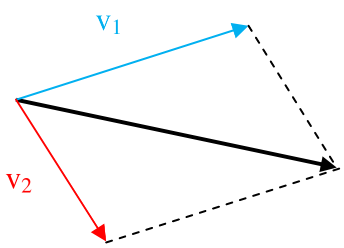
1) stejný směr – sečteme velikosti, směr se zachová.



2) opačný směr – odečteme velikosti. Směr je totožný se směrem vektoru o větší velikosti.



3) vektorový rovnoběžník



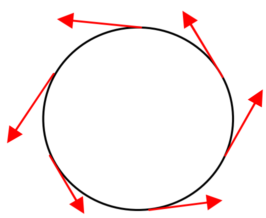
5.1.1.5 POHYB KŘIVOČARÝ

Trajektorie = dráha, po které se hmotný bod pohybuje.

a) trajektorie – přímka = pohyb přímočarý

b) trajektorie – křivka = pohyb křivočarý

U křivočarého pohybu leží vektor rychlosti v každém okamžiku v tečně k trajektorii a míří ve směru pohybu.



Při křivočarém pohybu není vektor rychlosti nikdy konstantní!

5.1.2 POHYB PO KRUŽNICI

Frekvence pohybu *f* – počet otáček za jednotku času. $[f] = s^{-1}$

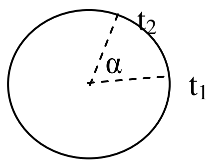
Perioda pohybu *T* – doba, za kterou hmotný bod vykoná jednu otáčku. $[T]=s$

Platí: $f = \dfrac{1}{T}$

Úhlová rychlost pohybu ω – úhel o který se hmotný bod otočí kolem středu kružnice za jednotku času.

$\omega = 2\pi f$

$$\omega = \frac{\alpha}{t_2 - t_1}$$



Úhel vyjde v radiánech

4π rad ... 360°

π rad ... 180°

π/2 rad … 90°

Obvodová rychlost *v* – $v = \omega \cdot r$

r – poloměr kružnice

5.2 SÍLA, PRÁCE, ENERGIE

5.2.1 NEWTONOVY ZÁKONY

1.NEWTONŮV ZÁKON – ZÁKON SETRVAČNOSTI

Těleso setrvává v klidu nebo pohybu rovnoměrně přímočarém, není-li vnějšími silami nuceno tento stav změnit.

Chemická soustava, do níž není zvnějšku zasahováno, po určité době dospěje do rovnováhy a v ní setrvává, pokud není rovnováha vnějším zásahem porušena.

2. NEWTONŮV ZÁKON – ZÁKON SÍLY

Časová změna hybnosti je úměrná působící síle a má s ní stejný tvar.

Hybnost

$\vec{\mathbf{p}} = m \cdot \vec{\mathbf{v}}$ — m hmotnost

$[p] = [m] \cdot [v]$ — $\vec{\mathbf{v}}$ rychlost

$[p] = kg \cdot m \cdot s^{-1}$

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = k \cdot \vec{\mathbf{F}}$$

Pozn. V soustavě SI je $k = 1$

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = m \cdot \vec{\mathbf{a}} \qquad \boxed{\vec{\mathbf{F}} = m \cdot \vec{\mathbf{a}}}$$

Pozn. m= konst. jen pro v < 10^8 m·s^{-1}.

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} = d\vec{p} = \vec{\mathbf{F}} \cdot dt \Rightarrow \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot dt = \vec{\mathbf{I}} \text{ ... 1. věta impulsová}$$

$\vec{\mathbf{I}}$ impuls síly

Je-li $\vec{\mathbf{F}} =$ konst., pak $m \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 - m \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{F}} \cdot (t_2 - t_1)$

Význam: Známe-li $\vec{\mathbf{F}}$ a Δt, můžeme vypočítat změnu rychlosti, aniž známe dráhu.

Důsledek: Hybnost izolované soustavy je konstantní (**Zákon zachování hybnosti** $\Rightarrow \vec{\mathbf{F}} = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}_1$)

3. NEWTONŮV ZÁKON – ZÁKON AKCE A REAKCE

Síly, jimiž na sebe působí dvě tělesa, mají vždy stejnou velikost a opačný směr.

V chemii je obdobou **Le-Chatelierův princip**:

Porušíme-li rovnováhu vnějším zásahem (akcí), proběhne takový děj (reakce), který směřuje proti účinkům vnějšího zásahu.

5.2.2 TLAK

je roven velikosti síly kolmo působící na plochu jednotkové velikosti.

$$\boxed{\begin{array}{l} p = \dfrac{F}{S} \\ [p] = Pa = N \cdot m^{-2} \ (pascal) \end{array}}$$

Hydrostatický tlak

g 9,81 m·s^{-2} $\boxed{p = \rho \cdot g \cdot h}$

ρ hustota kapaliny

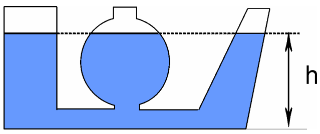
h hloubka pod hladinou

Mechanická podmínka fázové rovnováhy: tlaky dvou spojených soustav jsou při rovnováze stejné.

Důsledek:

- spojené nádoby

$$\rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot h_2$$
$$h_1 = h_2$$



- teplota varu kapaliny je teplota, při níž se tenze par kapaliny rovná vnějšímu tlaku

Archimédův zákon

těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny vytlačené ponořeným tělesem.

Stokesův zákon $F = G \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$

F ... síla, udávajíc velikost odporu, který viskózní prostředí klade pohybujícímu se tělesu (kuličce)

π = 3,14

η viskozita

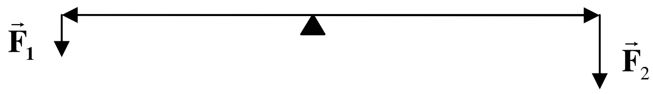
r poloměr kuličky

v rychlost (pádu) kuličky

5.2.3 OTÁČIVÝ POHYB TUHÉHO TĚLESA – MOMENT SÍLY, MOMENT SETRVAČNOSTI

MOMENT SÍLY

$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$



$\vec{\mathbf{M}}$...moment síly

$\vec{\mathbf{r}}$...rameno síly

$\vec{\mathbf{F}}$...síla

$$\vec{\mathbf{M}}_1 = \vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{F}}_1$$

$$\vec{\mathbf{M}}_2 = \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{F}}_2$$

směr určí pravidlo pravé ruky.

Momentová věta:

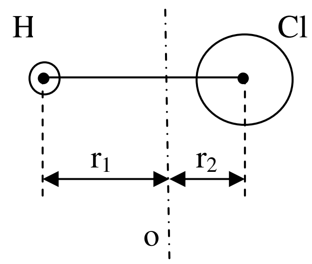
Otáčivý účinek sil působící na těleso otáčivé kolem pravé osy se ruší, jestliže se vektorový součet momentů všech sil vzhledem k ose rovnoběžné nule.

Rovnováha na páce:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

$$r_1F_1 - r_2F_2 = 0$$

$$\boxed{r_1F_1 = r_2F}$$



MOMENT SETRVAČNOSTI:

$$J = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ... + m_nr_n^2$$

Př.: HCl

o osa otáčení

$$J = m_H r_1^2 + m_{Cl} r_2^2$$

→ IR rotační spektroskopie, určování atomových poloměrů, délek vazeb...

5.2.4 ENERGIE

=schopnost konat práci.

Lomonosov (1784) : Energii nelze vytvořit ani jí zničit.

Kinetická energie: $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Potencionální energie: $E = m \cdot g \cdot h$

Tepelná energie:

$\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ pro zahřívání látky v daném skupenství

$\Delta Q = m \cdot l$ pro změnu skupenství při dané teplotě

$\Delta Q = T \cdot \Delta S$ energetická změna související se změnou entropie

definice entropie: $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$

Světelná energie: $E = h \cdot \frac{c}{\lambda}$ $c = 3 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$

Elektrická energie

Chemická energie: reakční teplo, energie vazeb, elektronová afinita, ionizační potenciál, jaderná energie, ...)

Vnitřní energie soustavy:

1. věta termodynamická: $\Delta U = \Delta Q - \Delta A$

ΔU zvýšení vnitřní energie

ΔQ dodané teplo

ΔA práce vykonaná soustavou

$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$

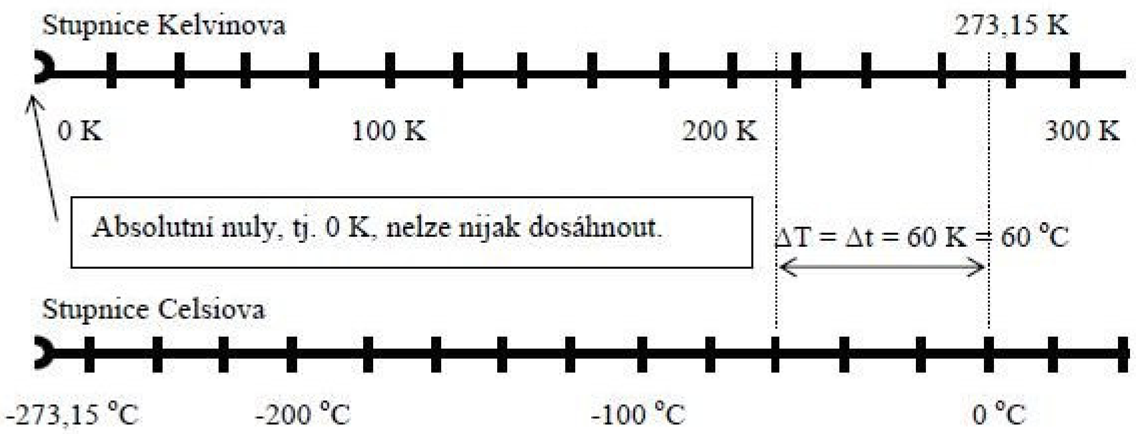
ΔW práce dodaná soustavě

Energie patří mezi *stavové funkce* = ty veličiny, jejichž velikost nemůžeme určit (změnit ani vypočítat), ale můžeme určit jejich *změnu.*

1. věta termodynamická → Energie a práce jsou rovnocenné, mohou na sebe vzájemně přecházet.

5.3 TERMIKA

Srovnání Kelvinovy a Celsiovy teplotní stupnice: Stupně jsou stejně velké, tj. **teplotní rozdíly** jsou v obou stupnicích stejně velké a tudíž **se nepřevádějí**. Stupnice se od sebe liší pouze polohou nuly:



převodní vztah pro teplotu: $\boxed{T = t + 273{,}15}$

T teplota v kelvinech

t teplota ve stupních Celsia

Př.:

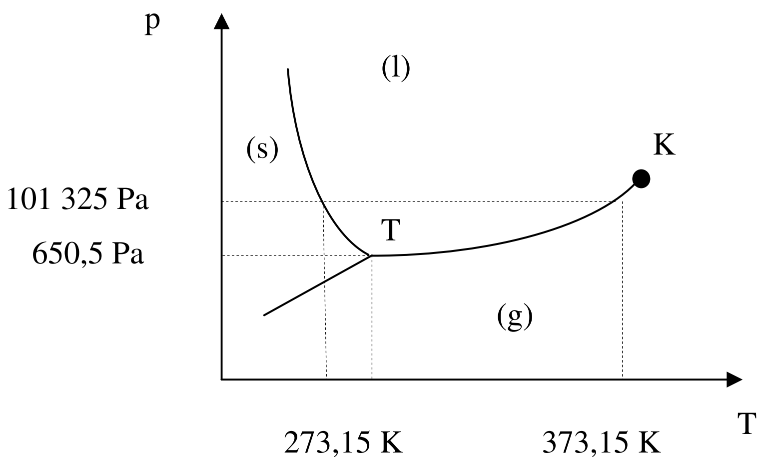
$373{,}15\text{K} = t°\text{C} + 273{,}15$ odtud $t = (373{,}15 - 273{,}15) = 100°$

Teplotní rozdíly se nepřevádějí: $\boxed{\Delta T = \Delta t}$

Př.:

Zahřejeme-li těleso o 60K, je to přesně totéž, jako kdybychom řekli, že jsme je zahřáli o 60°C.

Fázový diagram vody:



(s) pevná fáze (led)

(l) kapalná fáze (kapalná voda)

(g) plynná fáze (vodní pára)

p tlak

T termodynamická teplota (= teplota v Kelvinově stupnici)

v počet stupňů volnosti (= počet intenzivních stavových veličin (např. tlak, teplota, koncentrace), které lze současně nezávisle na sobě měnit, aniž by se tím změnil počet fází v soustavě).

f počet fází (fáze je část soustavy, která má ve všech svých částech stejné vlastnosti. U vody uvažujeme fázi pevnou - led, kapalnou - kapalná voda a plynnou - vodní pára. U jiných látek může být situace složitější. Např. uhlík má tři pevné fáze - amorfní (saze), šesterečnou (grafit) a krychlovou (diamant)).

T trojný bod (rovnováha tří fází - u vody rovnováha led-kapalina, pára), v = 0

K kritický bod (mizí hranice mezi kapalnou a plynnou fází. Při teplotách vyšších než je kritická teplota plyn nelze zkapalnit).

5.3.1 FÁZOVÉ PŘEMĚNY:

(s) → (l) tání

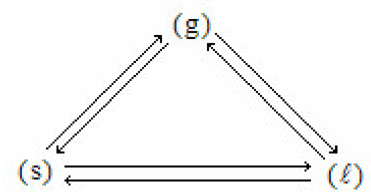
(l) → (s) tuhnutí

(s) → (g) sublimace

(g) → (s) desublimace

(l) → (g) vypařování

(g) → (l) kondenzace



standardní tlak je 101 325 Pa

Budeme-li zahřívat led o počáteční teplotě nižší než 0°C (= teplota tání vody při standardním tlaku) proběhnou tyto děje, k jejichž uskutečnění je zapotřebí teplo Q.

1) zahřívání ledu z 0 K na $T_{tání}$ = 273,15 K

$$Q_1 = m \cdot c_{ledu} \left(T_{tání} - T_{počočáteč}\right)$$

2) tání ledu při $T_{tání}$ = 273,15 K

(dokud led neroztaje, teplota nevzroste nad 273,15 K)

$$Q_2 = m \cdot l_{tání}$$

3) zahřívání vody z $T_{tání}$ = 273,15 K na T_{varu} = 373,15 K

$$Q_3 = m \cdot c_{kapalné\ vody} \left(T_{varu} - T_{tání}\right)$$

4) zahřívání vody při T_{varu} = 373,15 K

(dokud se voda nevypaří, teplota nevzroste nad 373,15 K)

$$Q_4 = m \cdot l_{\text{var}\,u}$$

5) zahřívání vodní páry

$$Q_5 = m \cdot c_{páry}\left(T_{konečon} - T_{\text{var}\,u}\right)$$

l ... skupenské teplo (= teplo, které je nutno dodat jednomu kilogramu látky, aby tento změnil skupenství. Např. teplo, které je zapotřebí k tomu, aby roztál 1 kg ledu). Mluvíme o skupenském teple tání, o skupenském teple vypařování, o skupenském teple sublimace...

c ... měrné teplo (= teplo, které je nutno dodat jednomu kilogramu látky, aby tento zvýšil svou teplotu o 1 K, tedy o 1 oC).

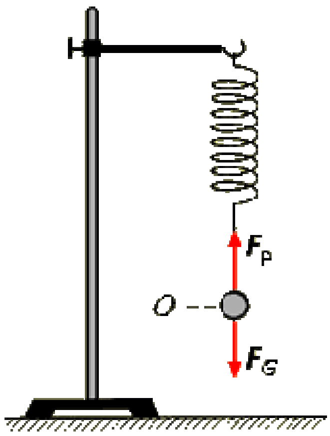
m ... hmotnost zahřívané látky

5.3.2 KALORIMETRICKÁ ROVNICE

Uvedeme-li do styku dvě tělesa o různých teplotách, předává teplejší těleso chladnějšímu teplo. Matematické vyjádření kalorimetrické rovnice předpokládá, že soustava uvažovaných dvou těles je izolovaná, tj. že všechno teplo odevzdané teplejším tělesem (Q_{II}) je rovno teplu přijatému chladnějším tělesem (Q_I), tedy: $\boxed{Q_I = Q_{II}}$

5.4 KMITAVÝ POHYB

5.4.1 SOUSTAVA JE V KLIDU A V ROVNOVÁZE



F_g gravitační síla

F_p síla pružiny (= síla, která nutí pružinu, aby si zachovala svůj původní tvar)

Podmínka klidu (rovnováhy) $F_g + F_p = 0$

5.4.2 TĚLESO BYLO PŮSOBENÍM SÍLY ZÁMĚRNĚ VYCHÝLENO Z ROVNOVÁŽNÉ POLOHY.

Až přestane tato síla působit, začne těleso vykonávat kmity. V ideálním případě by to byly tzv. kmity netlumené, což znamená, že maximální výchylka tělesa z rovnovážné polohy (tzv. amplituda) by byla stále stejná. Ve skutečnosti ovšem působí odpor prostředí (vzduchu), část energie soustavy se mění v teplo (pružina se zahřívá) apod. V důsledku toho jsou kmity ve skutečnosti tlumené, tj. jejich amplituda se s časem zmenšuje.

Těleso vychýlené z rovnovážné polohy je taženo zpět do rovnovážné polohy silovým působením pružiny silou F_p. Je-li síla pružnosti F_p přímo úměrná výchylce, jedná se o tzv. **harmonické kmity**.

Pak platí: $F_p = -k \cdot x$

k ... tuhost pružiny (závisí na tvaru a materiálu, z nějž je vyrobena)

x ... výchylka tělesa z rovnovážné polohy

Záporné znaménko značí, že síla pružiny působí proti výchylce tělesa.

Podle 2. Newtonova zákona uděluje síla pružiny tělesu zrychlení o velikosti a: $F_p = -k \cdot x$

Dosaďme za sílu pružnosti výraz $F_p = -k \cdot x$ a za zrychlení jeho definiční vztah: $a = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

dostaneme diferenciální rovnici 2. řádu (vystupuje v ní 2. derivace): $m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx$.

Uvedená rovnice má toto řešení: $\boxed{x = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right)}$

x	výchylka tělesa v daném okamžiku
t	čas
A	amplituda (maximální výchylka)
φ	počáteční fáze (charakterizuje polohu tělesa v okamžiku, kdy jsme začali měřit čas)
$\sqrt{\frac{k}{m}} = \varpi$	tzv. úhlová rychlost (kruhové frekvence). Její převod pohybu $\omega = 2\pi f$

Okamžitou rychlost pohybu tělesa pak můžeme z rovnice okamžité výchylky vypočíst podle definice rychlosti:

$$\boxed{x = A \cdot \sin(\varpi \cdot t + \varphi)}$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \varpi \cdot \cos(\varpi \cdot t + \varphi)}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \cdot \varpi^2 \cdot \sin(\varpi \cdot t + \varphi) = -\varpi^2 \cdot A \cdot \sin(\varpi \cdot t + \varphi) = -\varpi^2 \cdot x$$

x okamžitá výchylka

v okamžitá rychlost

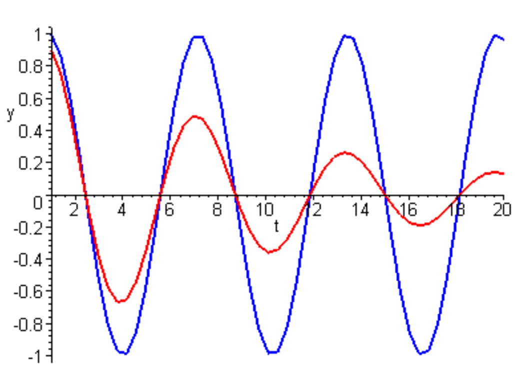
a okamžité zrychlení

→ Zrychlení je přímo úměrné výchylce, ale je orientováno opačně (souhlasí s 2. Newtonovým zákonem; zrychlení musí mít stejný směr jako síla pružnosti).

Příklad závislosti výchylky na čase v případě

a) netlumených kmitů (modrá)

b) tlumených kmitů (červená)



5.5 VLNĚNÍ

Předpokládejme, že hmotný bod koná vynucené kmity (např. kulička zavěšená na provázku kmitá, protože do ní strkáme rukou) a je spojen vazbami (elektrostatické, gravitační, mechanické,...) s okolím (např. naše kulička, do které strkáme rukou a nutíme ji tak kývat se, je spojená provázkem s dalšími visícími kuličkami). Potom všechny hmotné body, se kterými je nuceně kmitající hmotný bod (= zdroj) spojen, konají také vynucené kmity. Vynucující síla (síla naší ruky) dává energii zdroji a ten ji prostřednictvím vazby (provázek) předává hmotným bodům, s nimiž je spojen (další přivázané kuličky).

→ Vlnění je jev, kdy se prostorem přenáší energie. Původní bod se nazývá zdroj nebo zářič.

5.5.1 KLASIFIKACE VLNĚNÍ:

a)

POSTUPNÉ

Vlnění se z jednoho místa šíří dál a dál ...

Př.: Záření vysílané hvězdou do vesmíru. Zvuk hlasu, kterým voláme na otevřeném prostranství. Postup kruhových vln na hladině dříve klidné vody, do níž jsme hodili kámen.

STOJATÉ

Vlnění vyšlo ze zdroje Z a pohybovalo se tak dlouho, až narazilo na překážku P, od níž se odrazilo. Pak se začalo pohybovat směrem zpět ke zdroji. Pokud zdroj neustále vysílá energii, která se odráží a vrací zpět, dochází ke skládání (= tzv. interferenci) původního a odraženého záření. V prostoru mezi zdrojem a překážkou je tzv. stojaté vlnění.

Př.: Světlo uvnitř uzavřené místnosti. Pohyb švihadla při skákání. Pohyb vln na „klidné“ hladině.

b)

PŘÍČNÉ

Body kmitají ve směru kolmém ke směru pohybu vlnění.

Př.: Kruhové vlny na vodní hladině: voda kmitá ve směru svislém (vlny jsou tvořeny pohybem vodní hladiny nahoru-dolů), ale vlny postupují ve směru vodorovném (po hladině od místa dopadu kamene směrem ven). Pohyb těla hada, který se plazí (prohýbání těla pravolevé, ale had leze dopředu ne do boku), ...

PODÉLNÉ

Body kmitají ve směru rovnoběžném se směrem šíření vlnění.

Př.: Pohyb vzduchu při šíření zvuku (tzv. zvukové vlnění): Vzduch se při vlnění zhušťuje a zřeďuje ve stejném směru, v němž se šíří.

Příklady vlnění:

- Elektromagnetické záření (např. světlo) – vlnění příčné
- zvuk – vlnění podélné
- pohyb vodní hladiny – vlnění příčné

5.6 ELEKTROMAGNETICKÉ ZÁŘENÍ (VLNĚNÍ)

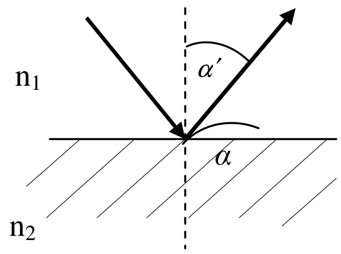
Postupná rychlost (=rychlost šíření vlnění):

ve vakuu ... $c = 3 \cdot 10^8 ms^{-1}$

v jiném prostředí ... $v < c$

Zavádíme index lomu prostředí <u>n</u>: $n = \frac{c}{v}$, protože $v < c$, je $n > 1$ pro každé prostředí kromě vakua. Pro vzduch je přibližně $n = 1$.

5.6.1 ZÁKON ODRAZU: ÚHEL ODRAZU α JE ROVEN ÚHLU DOPADU α', TEDY $\boxed{\alpha = \alpha'}$

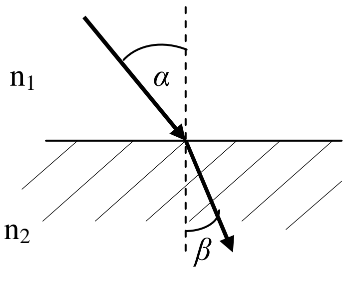


5.6.2 ZÁKON LOMU:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

a) lom ke kolmici $\alpha > \beta$

b) lom od kolmice $\alpha < \beta$

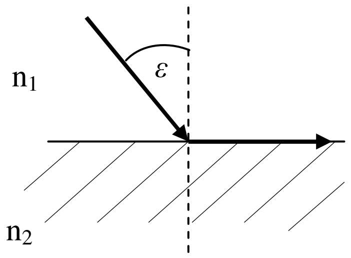


<u>Totální odraz:</u> Nastává-li lom od kolmice, pak pro úhly dopadu $\alpha > \varepsilon$ dochází již pouze k odrazu = tzv. totální odraz.

Úhel ε je tzv. mezní úhel. Vztah pro výpočet mezního úhlu:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin 90°} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin\varepsilon = \frac{n_2}{n_1}, \text{neboť} \sin 90° = 1$$

Užití totálního odrazu: V refraktometrii (=metoda využívající měření indexu lomu např. pomocí totálního odrazu)



Př.: Paprsek dopadá ze vzduchu (index lomu $n_1 = 1{,}000$) pod úhlem $\alpha_1 = 40°$ do prostředí o indexu lomu n_2 a láme se pod úhlem $\alpha_2 = 20°$. Určete index lomu n_2 tohoto prostředí.

řešení: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_2}{n_1} \Rightarrow \dfrac{\sin 40°}{\sin 20°} = \dfrac{n_2}{1{,}000} \Rightarrow \underline{\underline{n_2 = 1{,}879}}$

5.6.3 DUALISMUS VLNA – ČÁSTICE

Elektromagnetické záření má vlastnosti vlnění i vlastností částicové (chová se jako proud částic). Elementární kvantum elektromagnetického záření je foton. Na fotony lze pohlížet jako na částice, současně jim však možné přiřadit vlastnosti vlnové.

Fotonu je možno přiřadit vlnovou délku (jako vlnění), a to vztahem: $\boxed{c = \lambda \cdot \nu}$

c rychlost světla ve vakuu, $c = 3 \cdot 10^8\, ms^{-1}$

λ vlnová délka

ν frekvence vlnění

Pozn. převrácená hodnota vlnové délky je $\dfrac{1}{\lambda} = \tilde{\nu}$ tzv. vlnočet.

Na elektromagnetické záření lze poohlížet také jako na proud částic – fotonů – o energii $E = h \cdot \nu$, kde h je tzv. Plancova konstanta, h = $6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ Js.

Spojení obou náhledů na elektromagnetické záření nám pak umožní určit enrgii fotonu, jež náleží o dané vlnové délce λ: $\boxed{E = h \cdot \dfrac{c}{\lambda}}$

Pozn.: Symbolem E je označena energie jednoho fotonu.

Slovně lze uvedený vztah vyjádřit např. takto:

Energie fotonů je nepřímo úměrná vlnové délce záření. Fotonyzáření s krátkou vlnovou délkou tedy mají vysokou energii, fotony záření s velkou vlnovou délkou tedy mají malou energii

Př.: Viditelné světlo je elektromagnetické záření s vlnovými délkami přibližně mezi 400 nm až 700 nm. Před touto oblastí, při vlnových délkách kratších než 400 nm, se nachází ultrafialová oblast spektra.

5.6.4 BAREVNOST LÁTEK

Látky, které absorbují (= pohlcují) záření ve viditelné oblasti spektra (tedy elektromagnetické záření v oblasti vlnových délek 400 až 700 nm) se jeví jako barevné. Přitom pozorovaná látka má v prošlém i odraženém světle barvu doplňkovou (tzv. komplementární) k té barvě, která byla absorbována.

Příčina: Bílé světlo je vyvážená směs elektromagnetických záření všech vlnových délek z viditelné oblasti. Pokud se tato vyváženost poruší (např. tím, že záření některé vlnové délky je částečně odstraněno absorpcí), převládne záření některých vlnových délek a světlo se pak jeví barevné.

	barva látky (= barva prošlého nebo odraženého světlla	barva absorbovaného světla	vlnová délka absorbovaného světla [nm]
ultrafialová oblast			10 – 400
viditelná oblast	žlutozelená	fialová	400 – 435
	žlutá	modrá	435– 480
	oranžová	zelenomodrá	480 – 490
	červená	modrozelená	490 – 500
	purpurová	zelená	500 – 560
	fialová	žlutozelená	560 – 580
	modrá	žlutá	580 – 595
	zelenomodrá	oranžová	595 – 605
	modrozelená	červená	605 – 750
infračervená oblast			750 – 500 000

Př.: Je-li z bílého světla částečně odstraněna složka o vlnových délkách z rozmezí 435-480 nm (modrá barva), více se projeví se zbývající složky, které dohromady tvoří barvu žlutou (= doplňková barva k modré). Látka, pohlcující modré záření, je tedy žlutá.

Barevnost látek úzce souvisí s jejich strukturou. Příčinou barevnosti látek je interakce molekul, atomů či iontů s elektromagnetickým zářením z viditelné části spektra. Pokud elektromagnetické záření obsahuje fotony s energií právě tak velkou, jako jsou energetické rozdíly mezi obsazenými orbitaly s nejvyšší energií a některými orbitaly s energií ještě vyšší, mohou být tyto fotony látkou pohlceny (= absorbovány) a jejich energie je využita na excitaci elektronů z nejvyšších obsazených orbitalů do orbitalů vyšších. Absorbované fotony (a tedy elektromagnetické záření o odpovídající vlnové délce podle vztahu $\boxed{E = h \cdot \frac{c}{\lambda}}$ jsou tedy z bílého světla částečně odstraněny, látka je tedy barevná.

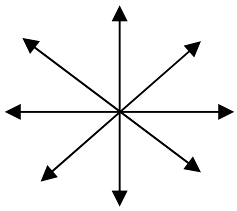
Význam pojmu „orbitaly s nejvyšší energií“ je různý podle toho, jakou látku uvažujeme:
Pokud absorbující látkou mají být **atomy**, jedná se o valenční elektrony ve valenčních atomových orbitalech a o jejich přeskoky do atomových orbitalů s vyšší energií.

Pokud absorbující látkou je **koordinační sloučenina**, jedná se o elektrony v částečně zaplněných d-orbitalech a o jejich přeskoky mezi hladinou t_{2g} a e_g.

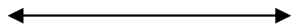
Pokud absorbující látkou je organická sloučenina, jedná se o vazebné π – elektrony nebo σ nevazebné elektrony a o jejich přechody $\pi\rightarrow\pi^*$,$n\rightarrow\pi^*$,$n\rightarrow\sigma^*$ (hvězdičkou je značen antivazebný orbital).Tyto přeskoky jsou umožněny zejména tehdy, obsahuje-li organická látka skupiny nazývané chromofory, např. C=C, N=N, C=O, N=O, NO_2, apod.

5.6.5 POLARIZACE SVĚTLA

Světlo je elektromagnetické vlnění. Elektromagnetické vlnění je vlnění příčné. Za normálních okolností se jedná o tzv. světlo nepolarizované, kdy elektrický vektor kmitá ve všech možných rovinách. Působením vhodného zařízení (= polarizátoru) lze získat světlo polarizované, jehož elektrický vektor kmitá pouze v jedné rovině.



světlo nepolarizované



světlo lineárně polarizovatelné

ZPŮSOBY POLARIZACE SVĚTLA:

a) odrazem na krystale

Po odraze na krystale je světlo částečně až úplně polarizováno v rovině rovnoběžné s rovinou krystalu, na níž se světlo odráželo. K úplné polarizaci dojde tehdy, dopadá-li světlo na krystal pod úhlem α vyhovujícím Brewsterovu zákonu: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{n_2}{n_1}$,kde

n_2 index lomu krystalu

n_1 index lomu prostředí, z nějž paprsek dopadá na krystal (např. vzduch)

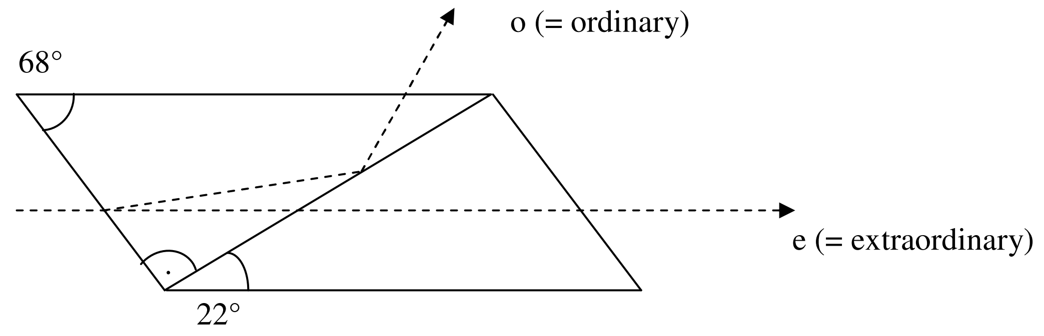
b) průchodem anizotropním prostředím

Průhledné krystaly, které nenáleží krychlové soustavě, jsou pro světlo anizotropním prostředím (tj. v různých směrech mají vůči světelnému paprsku různé vlastnosti). Jsou to dvojlomné krystaly. Příkladem může být islandský vápenec. Dopadá-li na něj paprsek světla, je při průchodu krystalem rozdělen na paprsky dva a to:

- paprsek řádný (ordinary) splňující zákon lomu
- paprsek mimořádný (extraordinary), nesplňující zákon lomu.

Oba paprsky jsou lineárně polarozovány, a to v rovinách navzájem kolmých.

Chceme-li tedy získat lineárně polarizované záření (tedy s jedinou rovinou kmitání), musíme vhodným způsobem tyto paprsky od sebe oddělit. To je vyřešeno např. konstrukcí **Nikolova hranolu**:



Obě části Nikolova hranolu jsou vyrobeny z islandského vápence a jsou slepeny buď kanadským balzámem (ten ale nepropouští UV záření, s takovým hranolem tedy není možno provádět měření v ultrafialové oblasti spektra), nebo glycerinem (umožní měření i v ultrafialové oblasti).

Název „nikol“ se dnes používá nejen pro Nikolův hranol, ale i přeneseně pro každé polarizační zařízení (tedy každý polarizátor).

5.7 ELEKTŘINA

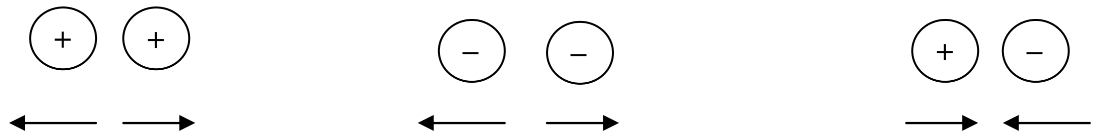
HISTORIE

znalost elektřiny – již starověk: 600 l.př.n.l.: Thálés Milétský: „Předměty se k sobě mohou přitahovat i jinak než na základě síly.“

znalost magnetismu – u města Magnésia (v Malé Asii) byl nalézán pyrit (a bylo známo, že přitahuje železo – tedy měl magnetické vlastnosti).

5.7.1 ELEKTROSTATIKA

Elektrický náboj může být buď kladný, nebo záporný. Souhlasné náboje se odpuzují, nesouhlasné se přitahují:



5.7.2 DRUHY LÁTEK Z HLEDISKA VEDENÍ ELEKTRICKÉHO PROUDU:

a) vodiče

1.druhu (kovy) – elektrický náboj je přenášen elektrony. Jejich elektrická vodivost s rostoucí teplotou mírně klesá.

2. druhu (roztoky a taveniny elektrolytů, např. NaCl) – elektrický náboj je přenášen <u>ionty</u>

b) izolátory

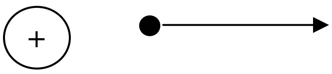
neobsahují volně pohyblivé nosiče elektrického náboje. (sklo, plasty). Nejlepší izolátor je vakuum (!pozor, není to látka!)

c) polovodiče

obsahují určité množství volně pohyblivých nosičů elektrického náboje. Jejich elektrická vodivost silně závisí na teplotě (s rostoucí teplotou roste), na koncentraci příměsi. Příklady polovodičů: Se, Ge, Cu_2O,...)

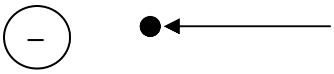
5.7.3 INTENZITA ELEKTRICKÉHO POLE

– je to vektorová veličina. Její velikost je číselně rovna síle, která působí na jednotkový kladný náboj (tj. o velikosti 1 C): $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$



(= směr intenzity)

Q Q_0 (jednotkový kladný náboj, na nějž je působeno)



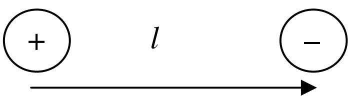
(= směr intenzity

Q Q_0 (jednotkový kladný náboj, na nějž je působeno)

5.7.4 DIPÓLOVÝ MOMENT, DIPÓL

$\boxed{\mu = Q \cdot l}$

Dipólový moment směřuje od kladného náboje k zápornému.



Molekuly:

a) s pernamentním (= stálým) dipólem: H_2O, HCl

b) s indukovaným (= vyvolaným) dipólem

5.7.5 POLARIZOVATELNOST MOLEKULY (ATOMU):

= schopnost tvořit indukovaný dipól, schopnost přesunu částic elektronů v částici. Snadno se polarizují částice se slabě vázanými elektrony, zejména s velkým počtem slabě vázaných elektronů (= daleko od jádra).

Př.:

Li^+ nemá valenční e^- (slaběji vázané). $1s^2$ je blízko u jádra, F ~ $\frac{1}{r^2}$ $\Rightarrow$ silně vázaná, málo polarizovatelná částice

Ag^+ má celkem 46 elektronů, daleko od jádra, slabě vázané, snadno polarizovatelná částice

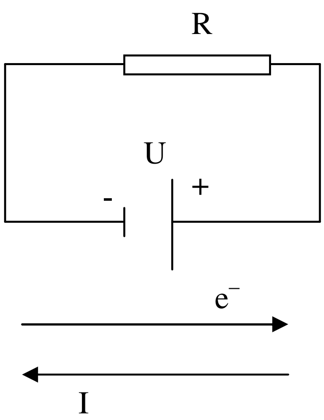
5.7.6 ELEKTRICKÝ POTENCIÁL

= práce potřebná k přemístění jednotkového náboje z nekonečna do daného místa. Nelze ho změřit. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$

5.7.7 ELEKTRICKÉ NAPĚTÍ

= rozdíl elektrických potenciálů mezi dvěma body. Lze ho změřit. $\Delta U = \varphi_2 - \varphi_1$

5.8 PROUD, ODPOR, VODIVOST, OHMŮV ZÁKON



<u>Definice elektrického proudu:</u> množství náboje Q, který projde daným místem vodiče za jednotku času.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Jednotka: [I]=A (ampér)

$$dQ = I \cdot dt$$

$$Q = \int Idt$$

Je-li *I*= konst. pak: $\boxed{Q = I \cdot t}$

V elektrickém obvodu se zdrojem napětí o velikosti *U* probíhá elektrický proud o velikosti *I*. Mezi hodnotami *U* a *I* je vztah přímé úměrnosti (pro vodiče 1. druhu)

OHMŮV ZÁKON: $\boxed{R \cdot I = U}$

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (ohm)}$$

R konstanta úměrnosti (elektrický odpor)

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

l délka vodiče [m]

S průměr vodiče [m^2]

ρ měrný odpor [Ωm]

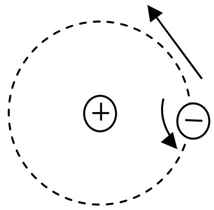
$\frac{1}{R} = G$ vodivost [G]= Ω^{-1}=S (siemens)

$\frac{1}{\rho} = \chi$ měrná vodivost, konduktivita

5.9 *MAGNETISMUS*

magnetické pole = prostor kolem magnetu nebo kolem vodiče s proudem nebo kolem pohybujícího se náboje.

Př.: Atom ^1H obsahuje jeden proton a jeden elektron.



Elektron se pohybuje kolem jádra = orbitální magnetické pole (magnetické kvantové číslo). Kromě toho elektron rotuje kolem své vlastní osy (spin), tedy vzniká malé magnetické pole spinové (ESR – elektronová spinová resonance).

Také protony v jádře se pohybují a vzniká kolem nich magnetické pole. Toho využívá metoda NMR (nukleární magnetická resonance).

5.9.1 DĚLENÍ LÁTEK:

DIAMAGNETICKÉ

zeslabují mag. pole, do něhož jsou vloženy.

He, H_2O, NaCl: elektrony jsou spárovány, magnetické momenty se navzájem ruší

PARAMAGNETICKÉ

mírně zesilují magnet. pole, do něhož jsou vloženy.

Pt, O_2: látky s nespárovanými elektrony → magnet. momenty se nekompenzují.

TERROMAGNETICKÉ

Velmi zesilují mag. pole, do něhož jsou vloženy: Fe

<u>Curieova teplota</u>: Zahřáím na tuto tepotu látka ztrácí své ferromagnetické vlastnosti. Pro Fe je to 770°C (magnet se může přílišným zahřátím zničit).