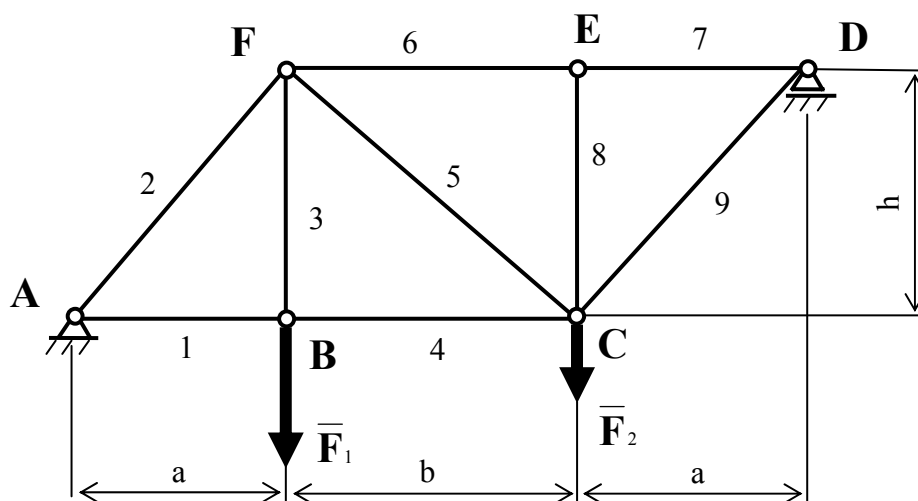


5. PRUTOVÉ SOUSTAVY

Zadání:

U zadané prutové soustavy vypočtete osově síly ve všech prutech. $a = 0,7 \text{ m}$, $b = h = 1 \text{ m}$
 $F_1 = 6 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$



Řešení:

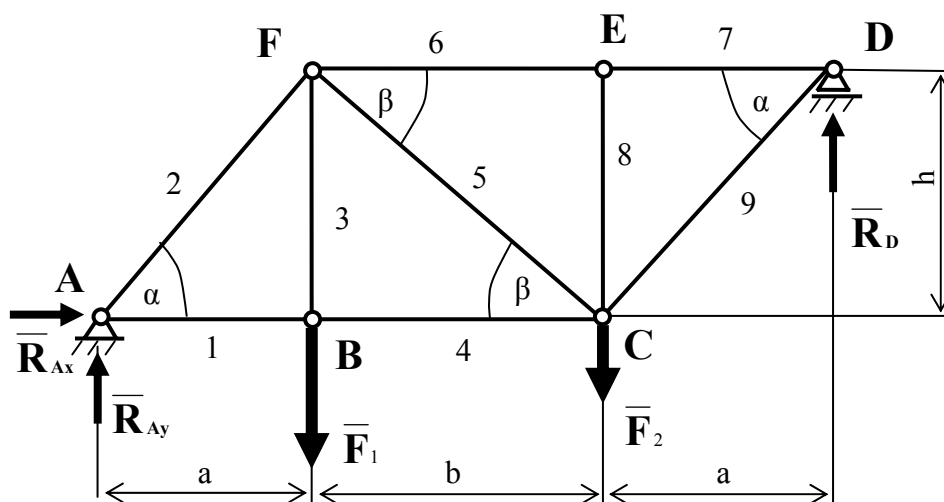
Kontrola statické určitosti (počet prutů + počet složek vnějších reakcí = $2 \times$ počet styčníků):
 V podpoře A jsou dvě složky reakce, v podpoře D je jedna složka reakce.

$$p + m = 2.S$$

$$9 + 3 = 2.6$$

$$12 = 12 \dots \text{podmínka je splněna}$$

Před výpočtem osových sil zavedeme a vypočteme reakce:



$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} = 0 &\Rightarrow R_D \cdot (2a + b) - F_2 \cdot (a + b) - F_1 \cdot a = 0 \Rightarrow R_D = \frac{F_2 \cdot (a + b) + F_1 \cdot a}{2a + b} = \\ &= \frac{4 \cdot (0,7 + 1) + 4 \cdot 0,7}{2 \cdot 0,7 + 1} = 4,58 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iD} = 0 &\Rightarrow -R_{Ay} \cdot (2a + b) + F_1 \cdot (a + b) + F_2 \cdot a = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{F_1 \cdot (a + b) + F_2 \cdot a}{2a + b} = \\ &= \frac{6 \cdot (0,7 + 1) + 4 \cdot 0,7}{2 \cdot 0,7 + 1} = 5,24 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrola:

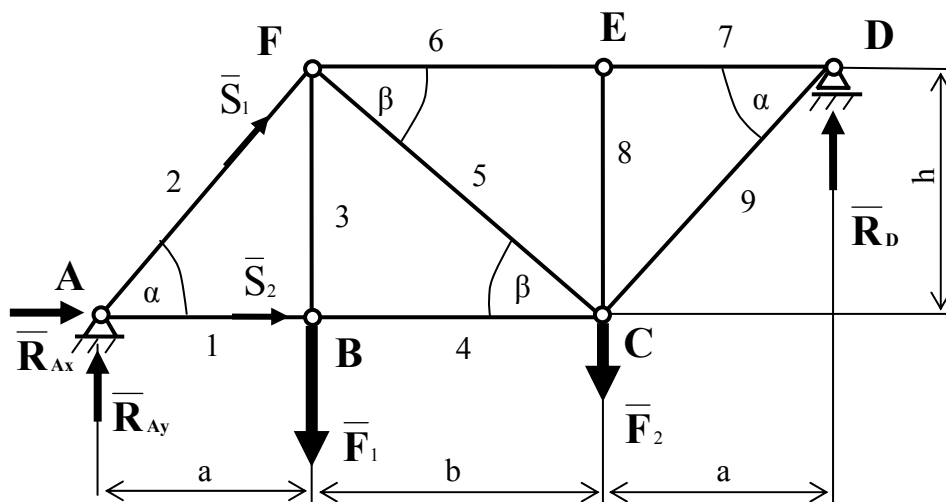
$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow -R_{Ay} - F_1 - F_2 + R_D = 5,42 - 6 - 4 + 4,58 = 0$$

Nyní vypočteme potřebné úhly prutů a jejich goniometrické funkce:

$$\alpha = \arctg \frac{h}{a} = \arctg \frac{1}{0,7} = 55,01^\circ \quad \cos \alpha = 0,573 \quad \sin \alpha = 0,819$$

$$\beta = \arctg \frac{h}{b} = \arctg \frac{1}{1} = 45^\circ \quad \cos \beta = \sin \beta = 0,707$$

Následuje vlastní výpočet osových sil:



Výpočet začneme tzv. dvojným styčným tj. styčným A, ze kterého myšleně zavedeme ven orientované osově síly S_1 a S_2 v prutech 1 a 2.

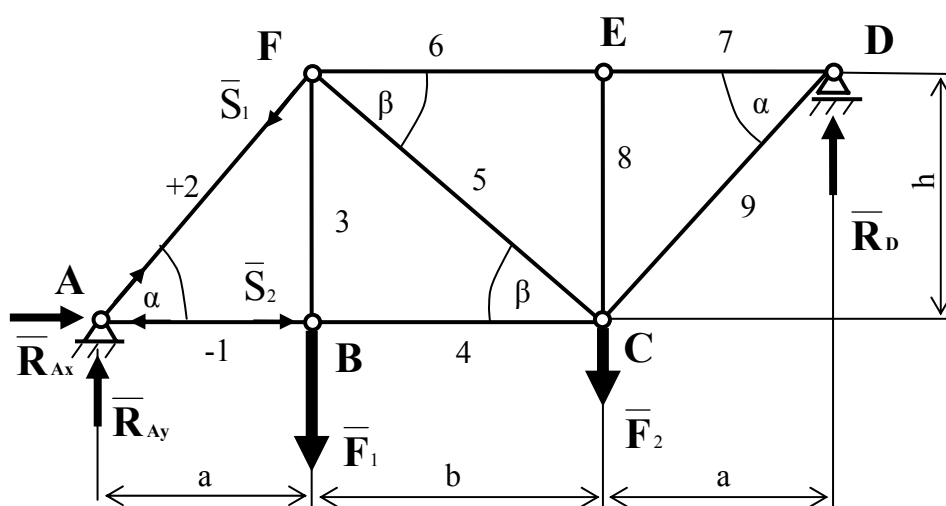
Pro styčník A sestavíme rovnovážné rovnice v ose x a v ose y :

$$\mathbf{A:} \quad S_1 + S_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$R_{Ay} + S_2 \cdot \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \text{Po dosazení: } S_1 = + 3,792 \text{ kN} \quad S_2 = - 6,618 \text{ kN}$$

(Při řešení vzniklé soustavy rovnic po vypočtení jedné neznámé dosazujeme do zbývajících rovnic výsledek včetně znaménka.)

Osová síla S_1 vyšla s *kladným znaménkem*, její skutečná orientace je tedy shodně se zavedenou, tedy ze styčnicku = *tah*. Osová síla S_2 vyšla se *záporným znaménkem*, její skutečná orientace je opačná, tedy do styčnicku = *tlak*. Skutečné orientace osových sil zakreslíme do obrázku včetně protilehlého styčnicku s respektováním zákona akce a reakce → je-li osová síla na jednom konci orientována do styčnicku, na konci protilehlém je rovněž orientována do styčnicku. Analogicky to platí při orientaci ze styčnicku. U čísel prutů uvedeme také znaménka osových sil.

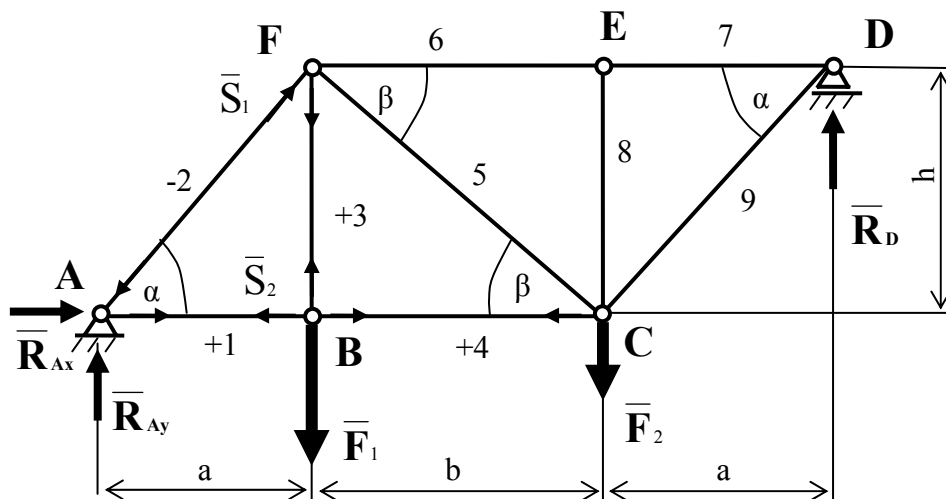


Nyní pokračujeme analogicky (opět v příslušných prutech zavedeme myšleně osově síly ven ze styčnicku) styčnickem, kde jsou neznámé nejvýše dvě osově síly tj. styčnickem **B**. Při dosazování *již vypočtených osových sil dosazujeme jejich absolutní hodnoty*, znaménka jsou dána v sestavených rovnicích.

$$\mathbf{B: } S_1 + S_4 = 0$$

$$-F_1 + S_3 = 0 \quad \Rightarrow \text{Po dosazení: } S_4 = + 3,792 \text{ kN} \quad S_3 = + 6 \text{ kN}$$

Analogicky jako v případě styčnicku **A** zakreslíme vypočtené osově síly do obrázku a uvedeme jejich znaménka:

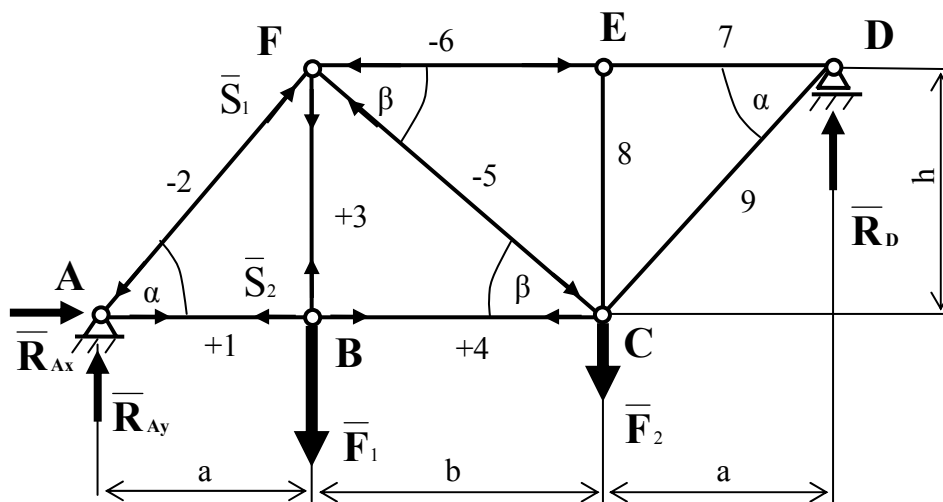


Dále pokračujeme styčником F:

$$\mathbf{F}: S_2 \cdot \cos \alpha + S_6 + S_5 \cdot \cos \beta = 0$$

$$S_2 \cdot \sin \alpha - S_3 - S_5 \cdot \sin \beta = 0 \quad \Rightarrow \text{Po dosazení: } S_5 = -0,820 \text{ kN} \quad S_6 = -3,212 \text{ kN}$$

Opět zakreslíme vypočtené osové síly do obrázku a uvedeme jejich znaménka:

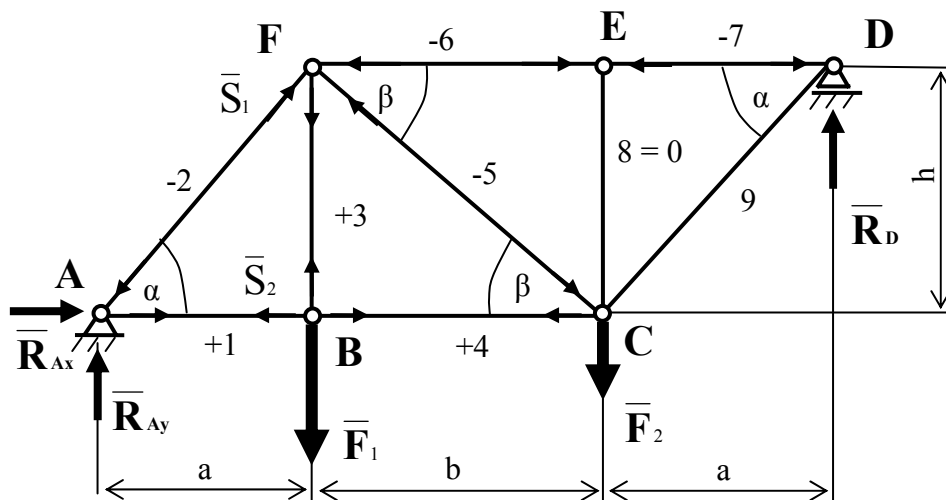


Nyní pokračujeme styčником E:

$$\mathbf{E}: S_6 + S_7 = 0$$

$$S_8 = 0 \quad \Rightarrow \text{Po dosazení: } S_7 = -3,212 \text{ kN} \quad S_8 = 0$$

Zakreslíme vypočtené osově síly do obrázku a uvedeme jejich znaménka:



Pokračujeme styčником C:

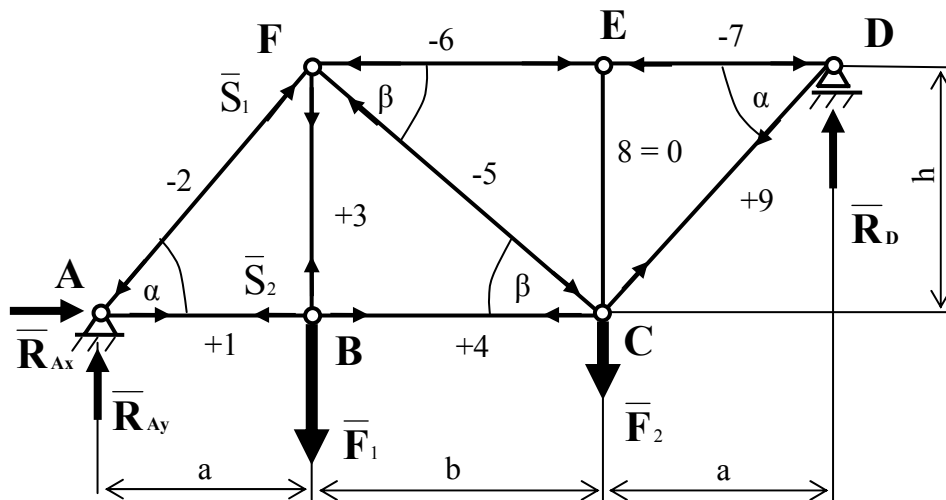
$$\begin{aligned} \text{C: } -S_4 + S_5 \cdot \cos \beta + S_9 \cdot \cos \alpha &= 0 & \Rightarrow \text{Po dosazení: } S_9 = + 5,606 \text{ kN} \\ -S_5 \cdot \sin \alpha - F_2 + S_9 \cdot \sin \alpha &= 0 & \Rightarrow \text{Po dosazení: } S_9 = + 5,592 \text{ kN} \end{aligned}$$

⇓

$$S_9 \cong + 5.60 \text{ kN}$$

Vlivem zaokrouhlení goniometrických funkcí na konečný počet desetinných míst dochází k při každém výpočtu k určité velmi malé chybě, která dále řetězově narůstá. Z tohoto důvodu se výsledky S_9 z rovnováhy ose x a v ose y poněkud liší.

Opět zkreslíme vypočtenou osovou sílu:



Výpočet všech osových sil je hotov a provedeme ještě kontrolu.

Kontrola:

$$\mathbf{D:} \quad S_7 - S_9 \cdot \cos \alpha = 3,212 - 5,60 \cdot 0,573 = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ kN} \cong 0$$

$$R_D - S_9 \cdot \sin \alpha = 4,58 - 5,60 \cdot 0,819 = -6,4 \cdot 10^{-3} \text{ kN} \cong 0$$

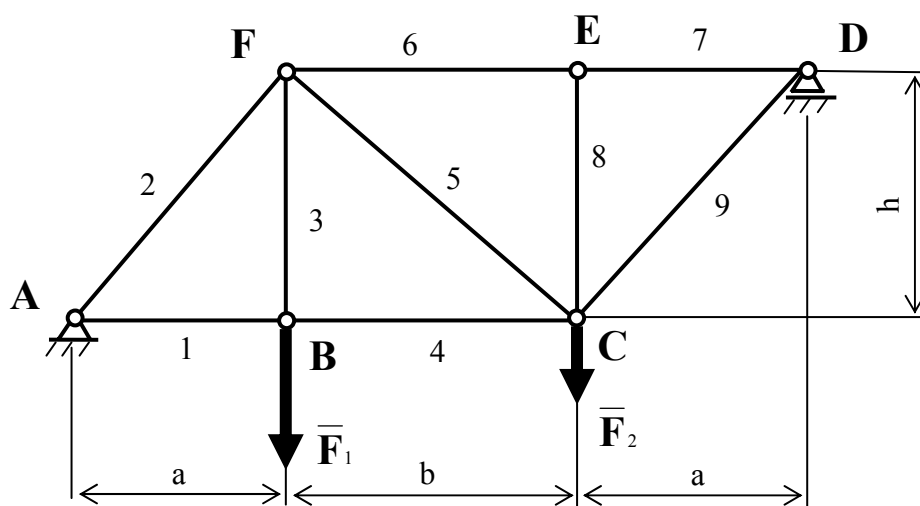
Hodnoty vypočtených osových sil můžeme zapsat do tabulky:

Č. prutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
os. síla [kN]	+ 3,792	-6,618	+6	+3,792	-0,820	-3,212	-3,212	0	+5,60

Zadání:

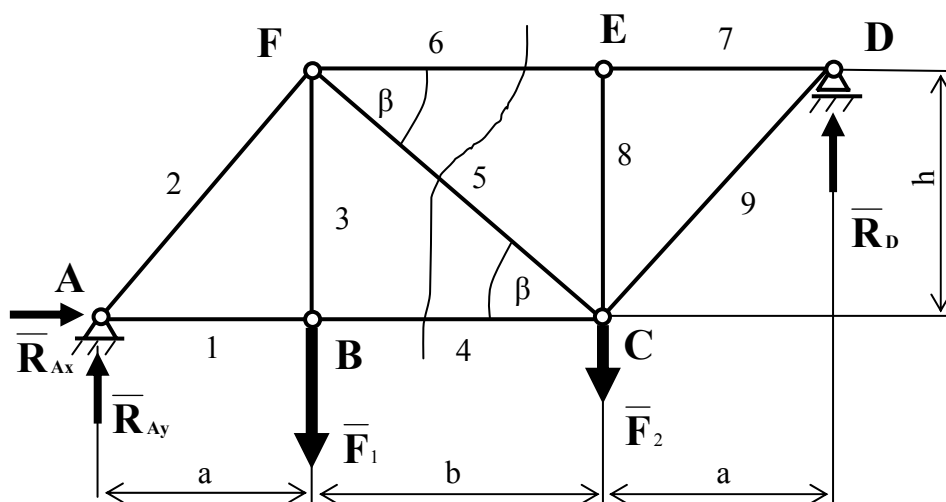
U zadané prutové soustavy vypočtete osově síly v prutech 4, 5, 6. $a = 0,7 \text{ m}$, $b = h = 1 \text{ m}$

$F_1 = 6 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$



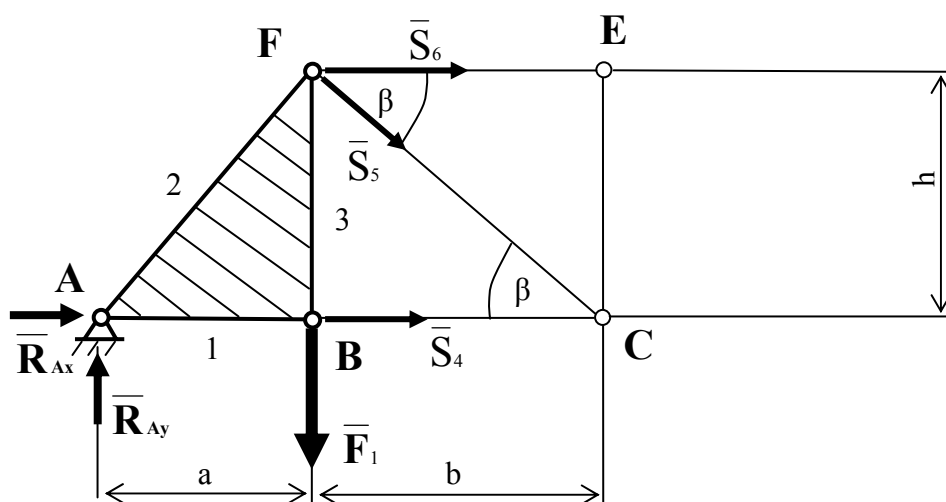
Před výpočtem osových sil zavedeme a vypočteme reakce:

Jedná se o totožnou prutovou soustavu s předchozí, použijeme tedy výsledky reakcí z předchozího zadání: $R_{Ax} = 0$ $R_{Ay} = 5,42 \text{ kN}$ $R_D = 4,58 \text{ kN}$



Rovněž využijeme již vypočtený úhel β : $\beta = 45^\circ$ $\cos\beta = \sin\beta = 0,707$

Pruty s hledanými osovými silami vedeme myšlený řez a následně si pro výpočet vyberme levou nebo pravou část. V našem případě jsme si vybrali část levou, kterou chápeme *zcela odděleně* od části zbývající a v přerušených prutech zavedeme *tahové síly*. Vybranou část soustavy, kde nebyly přerušeny pruty chápeme jako *tuhou desku*.



Jedná se o rovnováhu obecné soustavy sil v rovině:

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow R_{Ay} - F_1 - S_5 \cdot \sin\beta = 0 \Rightarrow S_5 = \frac{R_{Ay} - F_1}{\sin\beta} = \frac{5,42 - 6}{0,707} = -0,820 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iF} = 0 \Rightarrow S_4 \cdot h - R_{Ay} \cdot a = 0 \Rightarrow S_4 = \frac{R_{Ay} \cdot a}{h} = \frac{5,42 \cdot 0,7}{1} = +3,794 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{IC} = 0 &\Rightarrow -S_6 \cdot h + F_1 \cdot b - R_{Ay} \cdot (a + b) = 0 \Rightarrow S_6 = \frac{F_1 \cdot b - R_{Ay} \cdot (a + b)}{h} = \\ &= \frac{6 \cdot 1 - 5,42 \cdot (1 + 0,7)}{1} = -3,214 \text{ kN}\end{aligned}$$

Kontrolu správnosti výsledků je možné provést sestavením podmínky rovnováhy v ose x: $\sum F_{ix} = 0$

Vypočtené hodnoty osových sil se poněkud liší od hodnot při řešení metodou styčnickovou. Důvodem je vliv zaokrouhlených hodnot goniometrických funkcí, kdy pak malá chyba při metodě styčnickové řetězově narůstá. Hodnoty osových sil vypočtené zde metodou průsečnou jsou tedy poněkud přesnější než podle metody styčnickové.