

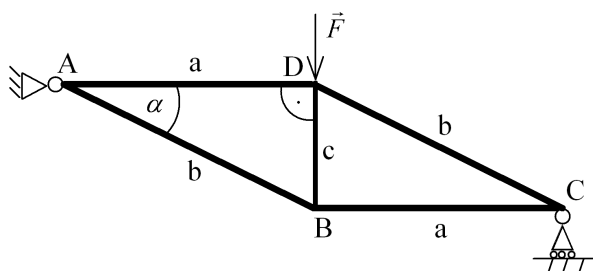
# Statické řešení zadané rovinné prutové soustavy

graficky - užití Cremonova obrazce

Zpracovala: **Ing. Miroslava Tringelová**

## Určení sil v prutech prutové soustavy - graficky

U příkladu viz obr. (1) graficky určete síly v jednotlivých prutech. Rozhodněte, zda je prut namáhán na tah, tlak. Pro grafické řešení sil v prutech prutové soustavy použijeme Cremonův obrazec.



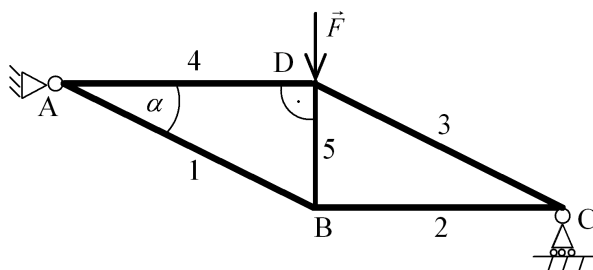
Obrázek 1. Prutová soustava zatížená ve styčnicku D silou  $\vec{F}$ .

Dáno:  $a = 1\text{m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\vec{F} = 10\text{kN}$

**Krok 1.** Pruty očíslovujeme čísly od 1 do  $n$  ve směru kladném, tj. proti hodinovým ručičkám. Začneme pruty vnějšími a pokračujeme pruty vnitřními. ( $n$  určuje počet prutů prutové soustavy.)

**Krok 2.** Úlohu začneme řešit od styčnicku, v kterém působí vnější síla primární a který je spojen pouze dvou prutů. Pokud takový styčník nemáme, musíme nejdříve graficky vyřešit vnější síly sekundární, které jsou dány vazbou prutové soustavy na rám.

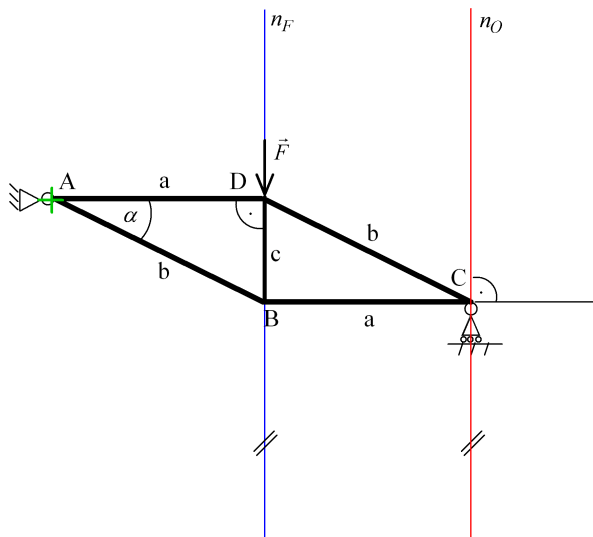
Prutová soustava viz obr. (1) je zatížena ve styčnicku D vnější silou  $\vec{F}$ . Styčník D je spojen třemi pruty. Pro grafické řešení užitím Cremonova obrazce není splněn krok 2. Nejdříve musí být vyřešeny vnější síly sekundární vazby prutové soustavy na rám, síla  $\vec{R}$  rotační vazby v bodě A a síla  $\vec{O}$  obecné vazby v bodě C.



Obrázek 2. Očíslování prutů čísly 1 až 5.

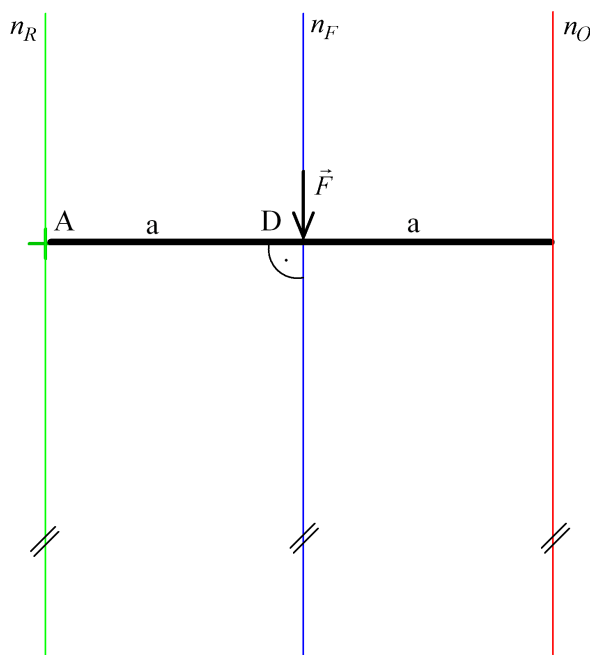
## Grafické řešení vnějších sil sekundárních

Bodem A (styčnickem A) prochází nositelka  $n_R$  síly rotační vazby  $\vec{R}$ . Směr nositelky  $n_R$  neznáme. V bodě C (tj. styčnicku C) je prutová soustava vázána k rámu vazbou obecnou. U obecné vazby známe nositelku  $n_O$  síly  $\vec{O}$ .



Obrázek 3. Zakreslení nositelky  $n_F$  vnější síly primární  $\vec{F}$ , nositelky  $n_O$  vnější síly sekundární  $\vec{O}$  a bodu A, kterým prochází nositelka  $n_R$  vnější síly sekundární  $\vec{R}$ .

Nositelky  $n_F$  síly  $\vec{F}$  a  $n_O$  síly  $\vec{O}$  jsou vzájemně rovnoběžné. (Tři síly působící na těleso (prutová soustava) jsou v rovnováze, pokud se jejich nositelky protínají v jednom bodě.) Nositelka  $n_R$  síly  $\vec{R}$  musí být rovnoběžná s nositelkami  $n_F$  a  $n_O$  viz obr. (4). Úlohu budeme dále řešit metodou vláknového polygonu.

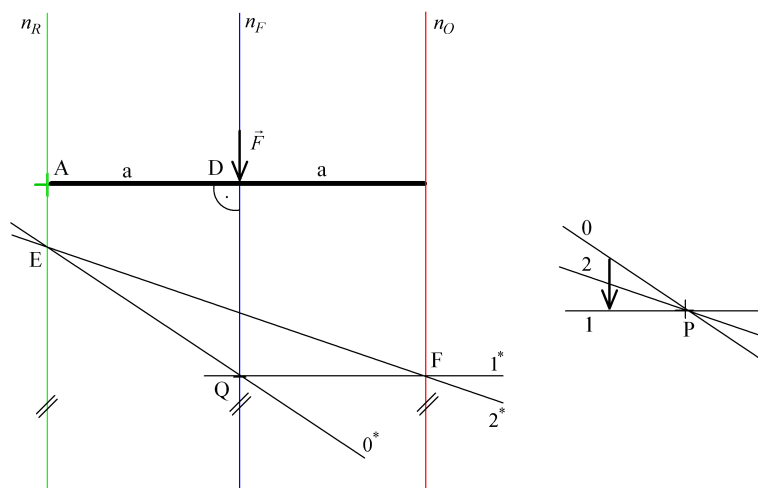


Obrázek 4. Zakreslení nositelek všech vnějších sil; primární síly  $\vec{F}$  a sekundárních sil  $\vec{R}$  a  $\vec{O}$ .

## Metoda vláknového polygonu

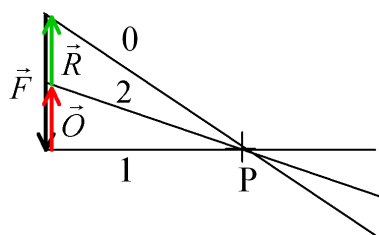
Vektor síly  $\vec{F}$  přeneseme mimo soustavu nositelek sil. Libovolně zakreslíme bod P a Q, který leží na nositelce  $n_F$  viz obr. (5). Počátečním a koncovým bodem vektoru síly  $\vec{F}$  vedeme přímky, které prochází bodem P. Přímky označíme čísly (0, 1).

S přímkami (0, 1) vedeme rovnoběžky ( $0^*$ ,  $1^*$ ), které protínají nositelku  $n_F$  v bodě Q. Společný bod nositelky  $n_R$  a přímky  $0^*$  označíme bodem E. Bodem F označíme společný bod přímky  $1^*$  a nositelky  $n_O$ . Body E a F vedeme přímkou  $2^*$ .



Obrázek 5. Rovnováha tří sil řešená metodou vláknového polygonu.

S přímkou  $2^*$  vedeme rovnoběžku bodem P a označíme ji 2. Přímka 2 vytkne na vektoru síly  $\vec{F}$  dva úseky. (Tři síly působící na těleso jsou v rovnováze, pokud vektory složené za sebou tvoří uzavřený obrazec (trojúhelník) v jednom smyslu). V našem případě tři rovnoběžných sil je obrazcem uzavřená smyčka na jedné nositelce viz obr. (6). Vektor síly  $\vec{R}$  je úsek mezi přímkami (0, 2) (přímky  $0^*$  a  $2^*$  se protínají na nositelce  $n_R$ ), zatímco vektor síly  $\vec{O}$  je úsek mezi přímkami (1, 2) (přímky  $1^*$  a  $2^*$  se protínají na nositelce  $n_O$ ).



Obrázek 6. Uzavřený obrazec sil  $\vec{F}$ ,  $\vec{O}$  a  $\vec{R}$ .

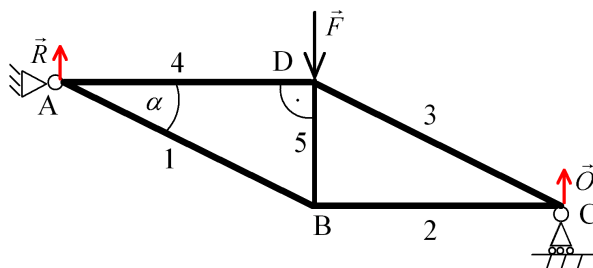
Vektor síly  $\vec{R}$  přeneseme na nositelku  $n_R$  do bodu A. Vektor síly  $\vec{O}$  přeneseme na nositelku  $n_O$  do bodu C viz obr. (7).

Pokud si nakreslíme prutovou soustavu na papír v měřítku

$$1\text{cm na papíře} = 1\text{m ve skutečnosti},$$

$$1\text{cm na papíře} = 10\text{kN ve skutečnosti},$$

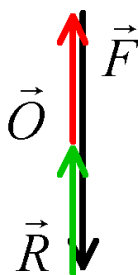
jsou velikosti vektorů sil rovny  $|\vec{R}| = |\vec{O}| = 0,5\text{cm}$  v měřítku na papíře, tj. 5kN ve skutečnosti. Orientace vektorů vnějších sil sekundárních  $\vec{R}$  a  $\vec{O}$  je opačná k orientaci vektoru vnější síly primární  $\vec{F}$ .



Obrázek 7. Vnější sekundární síly  $\vec{R}$  a  $\vec{O}$  vyřešené metodou vláknového polygonu.

### Metoda Cremonova obrazce - pokračování ze strany 1

**Krok 3.** Vnější síly (primární  $\vec{F}$  a sekundární  $\vec{R}$  a  $\vec{O}$ , pokud jsme je museli určit v kroku 2) složíme graficky tak, jak jdou za sebou ve směru kladném (tj. proti hodinovým ručičkám) viz obr. (8). Z důvodu přehlednosti kreslíme síly vedle sebe. Pro přesnost výpočtu je nutné zakreslit vnější síly na jednu nositelku.

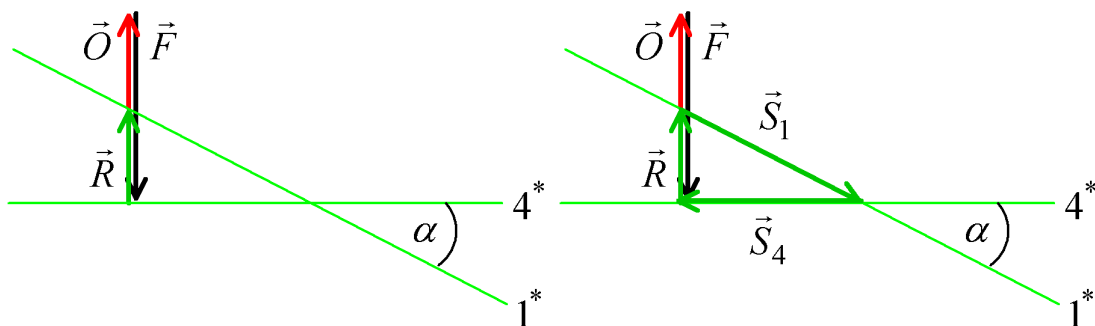


Obrázek 8. Grafické složení vnějších sil  $\vec{R}$ ,  $\vec{O}$  a  $\vec{F}$ .

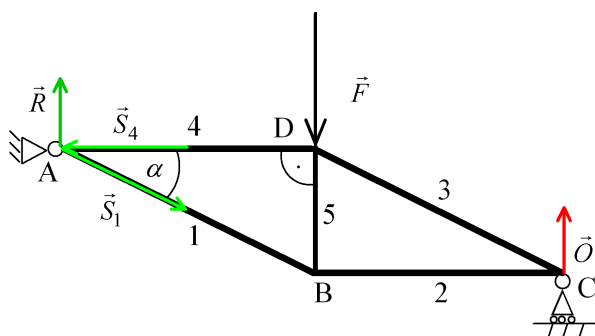
**Krok 4.** Úlohu začneme řešit ze styčnicku A. Styčník A je spojem dvou prutů a působí v něm vnější sekundární síla  $\vec{R}$ . Všimneme si prutu 4, který spojuje styčníky A a D. Ve styčníku D působí vnější primární síla  $\vec{F}$ . Rovnoběžka s prutem 4, označme ji 4\*, musí v Cremonově obrazci procházet společným bodem sil  $\vec{R}$  a  $\vec{F}$  viz obr. (9). Prut 1 spojuje styčníky A a B. Ve styčníku B nepůsobí žádná vnější síla.

Přímky 1\* (resp. 4\*) jsou nositelkami sil  $\vec{S}_1$  (resp.  $\vec{S}_4$ ) a jsou rovnoběžné s pruty 1 (resp. 4). Styčník A je v silové rovnováze, pokud *vektory sil na něj působící tvoří uzavřený obrazec (trojúhelník) v jednom smyslu*. Orientace sil je dána orientací vnější síly sekundární  $\vec{R}$ . Síly  $\vec{S}_1$  (resp.  $\vec{S}_4$ ) zakreslíme zpět do schématického znázornění prutové soustavy viz obr. (10). Z obr. (11) vidíme, že prut 1 je namáhán na tah (vektor síly  $\vec{S}_1$  je orientován ze styčnicku A) a prut 4 je namáhán na tlak (vektor síly  $\vec{S}_4$  je orientován do styčnicku A).

**Krok 5.** Dále pokračujeme s řešením ve směru kladném ve styčníku, u kterého známe jednu sílu (vnější nebo vnitřní) a nanejvýš dvě neznámé síly. Pokračujeme tedy styčníkem B. Vektory sil v prutech  $\vec{S}_1$  (resp.  $\vec{S}_4$ ) otočíme při přechodu ze styčnicku A na styčník B (resp.

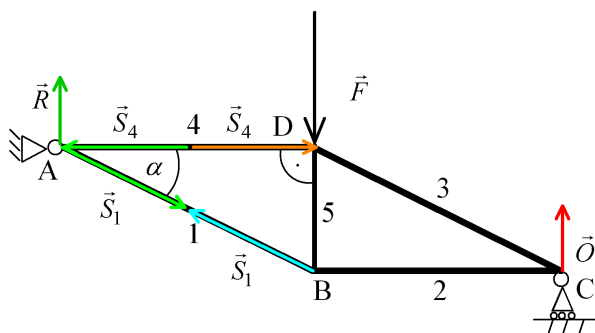


Obrázek 9. Sílový trojúhelník pro řešení sil v prutech styčníku A.



Obrázek 10. Zakreslení sil  $\vec{S}_1$  (resp.  $\vec{S}_4$ ) zpět do schématického znázornění prutové soustavy.

D). V Cremonově obrazci nesmíme zapomenout na opačnou orientaci sil při přechodu ze styčníku A na B (resp. D).

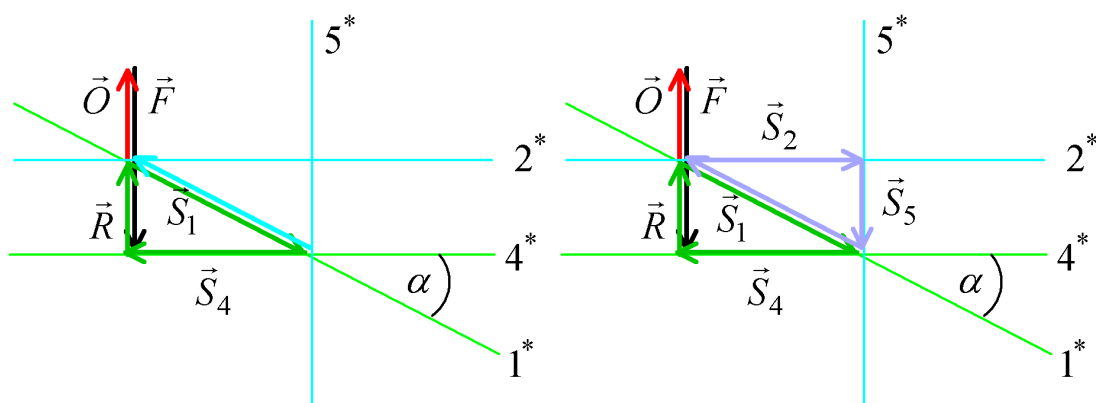


Obrázek 11. Zakreslení sil  $\vec{S}_1$  (resp.  $\vec{S}_4$ ) s opačnou orientací při přechodu ze styčníku A na styčník B (resp. D).

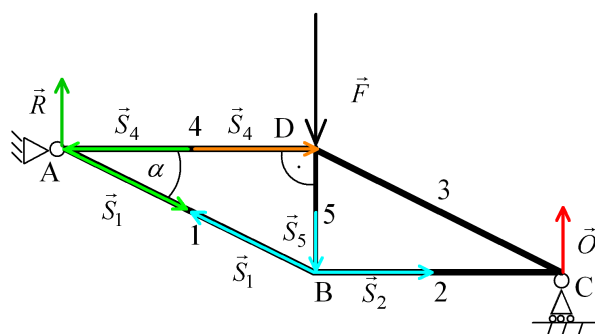
Prut 2 spojuje styčníky B a C. Přímka 2\*, která je rovnoběžná s prutem 2, musí procházet společným bodem síly  $\vec{O}$  a  $\vec{S}_1$  v Cremonově obrazci.

Prut 5 spojuje styčníky B a D. Nositelka síly v prutu 5  $\vec{S}_5$  je rovnoběžná s nositelkou síly  $\vec{F}$  v Cremonově obrazci a totožná s nositelkou síly  $\vec{F}$  ve schématickém znázornění prutové soustavy, viz obr. (12) modrá barva.

Síly  $\vec{S}_2$  (resp.  $\vec{S}_5$ ) zakreslíme zpět do schématického znázornění prutové soustavy viz obr. (13). Z obr. (13) vidíme, že prut 2 je namáhán na tah (vektor síly  $\vec{S}_2$  je orientován ze styčníku B) a prut 5 je namáhán na tlak (vektor síly  $\vec{S}_5$  je orientován do styčníku B).

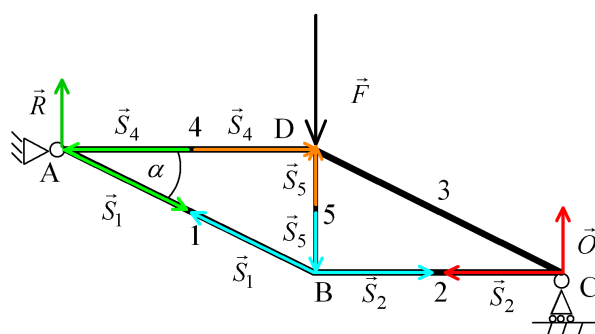


Obrázek 12. Sílový trojúhelník pro řešení sil v prutech styčníku B.



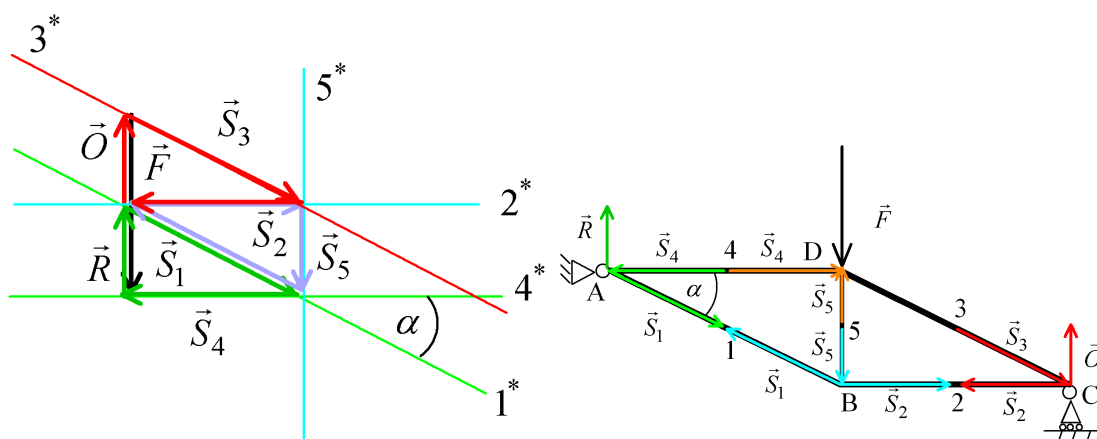
Obrázek 13. Vyřešená silová rovnováha styčníku B.

**Krok 6.** Krok 5 opakujeme pro styčník C. Styčník D je posledním neřešeným styčníkem. Styčník D již neřešíme, protože po vyřešení předposledního styčníku (tj. styčníku C) známe všechny síly v jednotlivých prutech prutové soustavy. Poslední styčník nám poslouží jako kontrola správnosti řešení. Pokud jsme postupovali bez chyby, uzavře se sílový obrazec i pro styčník D.



Obrázek 14. Zakreslení sil  $\vec{S}_2$  (resp.  $\vec{S}_5$ ) s opačnou orientací při přechodu ze styčníku B na styčník C (resp. D).

Kontrola správnosti řešení. U styčníku D musí dojít k uzavření sílového obrazce viz obr. (16). Z obr. (16) poznáme zatížení jednotlivých prutů na tah či tlak. Pruty (1, 2) jsou namáhány na tah, zatímco pruty (3, 4, 5) jsou namáhány na tlak. Provedeme-li grafické řešení ve vhodném měřítku

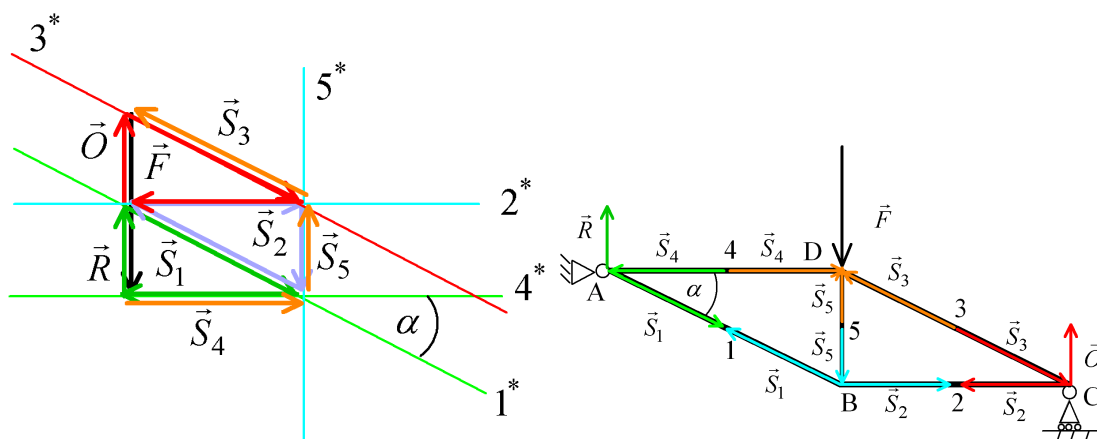


Obrázek 15. Sílový trojúhelník pro řešení sil v prutech styčníku C a vyřešená silová rovnováha styčníku C (červená barva).

$$1\text{cm na papíře} = 1\text{m ve skutečnosti,}$$

$$1\text{cm na papíře} = 10\text{kN ve skutečnosti,}$$

a budeme-li přesní, pak zjistíme odměřením z pravítka velikosti jednotlivých sil v prutech.



Obrázek 16. Vyřešená silová rovnováha styčníku D (oranžová barva). Kontrola správnosti řešení.

Určili jsme síly v prutech prutové soustavy a síly ve vazbách uložení prutové soustavy na rám.

$$S_1 = 10\text{kN tah} \quad (1)$$

$$S_2 = 9\text{kN tah} \quad (2)$$

$$S_3 = 10\text{kN tlak} \quad (3)$$

$$S_4 = 9\text{kN tlak} \quad (4)$$

$$S_5 = 5\text{kN tlak} \quad (5)$$

$$O = 5\text{kN orientace kladná ve směru osy } y \quad (6)$$

$$R = 5\text{kN orientace kladná ve směru osy } y \quad (7)$$