Neurčitý a určitý integrál funkce

Příklad 1. Vypočtěte metodou per partes:

a) $\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x$.
b) $\int (x^2+2x+17)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $(x^2+17)\mathrm{e}^x$;
c) $\int x^2 \mathrm{arctg}\, x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(x^2+1)$.
d) $\int \ln x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $x(\ln x - 1)$.
e) $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$.
f) $\int \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\frac{1}{x}(\ln x + 1)$.
g) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-x\mathrm{cotg}\, x + \ln|\sin x|$.
h) $\int x\ln x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$.
i) $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$.
j) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\sqrt{x}(2\ln^2 x - 8\ln x + 16)$.
k) $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.
l) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2)$.
m) $\int x^2 \sin(2x) \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$.
n) $\int x\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\mathrm{e}^{-x}(-x-1)$.
o) $\int x^3 \cos x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $(x^3-6x)\sin x + (3x^2-6)\cos x$.
p) $\int \mathrm{arctg}\, x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $x\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
q) $\int \cos(\ln x) \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$.
r) $\int \sqrt{x^2+1} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}|)$.

Příklad 2. Vhodnou substitucí vypočtěte následující triviální integrály:

a) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x$, (substituce: $\mathrm{tg}\, x = t$).
b) $\int \frac{1}{x\ln x} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\ln|\ln x|$, (substituce: $\ln x = t$).
c) $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\, x}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\mathrm{arctg}\, x)^4}$, (substituce: $\mathrm{arctg}\, x = t$).
d) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $x\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \mathrm{arctg}\sqrt{x}$, (substituce: $x = t^2$).
e) $\int \frac{1}{\sqrt{4x+9}} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{2}\sqrt{4x+9}$, (substituce: $4x+9 = t$).
f) $\int \frac{1}{\sin^2(3x-7)} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\frac{1}{3}\mathrm{cotg}(3x-7)$, (substituce: $3x-7 = t$).
g) $\int \frac{1}{7x-9} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{7}\ln|7x-9|$, (substituce: $7x-9 = t$).
h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{9+4x^2}$; *Výsledek:* $\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{2x}{3}$, (substituce: $2x = 3t$).
i) $\int \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\sin(\mathrm{e}^x)$, (substituce: $\mathrm{e}^x = t$).
j) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+2\cos x}} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+2\cos x)^2}$, (substituce: $1+2\cos x = t$).
k) $\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, (substituce: $\frac{1}{x} = t$).
l) $\int \frac{3^x}{5+3^x} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{\ln 3}\ln|5+3^x|$, (substituce: $5+3^x = t$).
m) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{4}\arcsin x^4$, (substituce: $x^4 = t$).
n) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\cos\frac{1}{x}$, (substituce: $\frac{1}{x} = t$).
o) $\int 2x\sqrt{x^2+1} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{2}{3}(x^2+1)^3$, (substituce: $x^2+1 = t^2$).
p) $\int \frac{x+(\mathrm{arctg}\, x)^{-1}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|\mathrm{arctg}\, x|$,
q) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\ln|\ln(\ln x)|$,
r) $\int \sin^7 x\cos x \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{8}\sin^8 x$, (substituce: $\sin x = t$).
s) $\int \frac{2^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+4^x}}$; *Výsledek:* $\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x + \sqrt{1+4^x})$, (substituce: $2^x = t$).

Příklad 3. Vypočtěte rychle integrály z funkcí racionálně lomených:

a) $\int \frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $x - 3\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + 5\ln|x-2|$.
b) $\int \frac{5}{(2x-3)^3} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\frac{5}{4}\frac{1}{(2x-3)^2}$.
c) $\int \frac{27\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2}x-5}$; *Výsledek:* $\frac{27}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}x-5\right|$.
d) $\int \frac{8x-31}{x^2-9x+14} \,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $3\ln|x-2| + 5\ln|x-7|$.
e) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)^2}$; *Výsledek:* $\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)}$.

f) $\int \frac{11x^2-2x-33}{x^2-3}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\ln|x-\sqrt{3}|-\ln|x+\sqrt{3}|+11x$.
g) $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^3(2x-5)^3}{2x+3}\right|$.
h) $\int \frac{4-4x}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\ln|2x-1|+\frac{1}{2x-1}$.
i) $\int \frac{6x+6}{2x^2+3x}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\ln|2x^3+3x^2|$.
j) $\int \frac{3x^4+x^3-5x+2}{x^5-x^4-2x^3}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\ln|x(x-2)^3(x+1)^2|-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}$.
k) $\int \frac{2+2x+x^2-x^3}{2-x^2}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{x^2}{2}-x+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|$.

Příklad 4. Pečlivě zintegrujte:
a) $\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$, (subs.: $\cos x=t$).
b) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x$, (substituce: $\sin x=t$).
c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x-7\cos x-7}$; *Výsledek:* $\frac{1}{4}\ln|4\mathrm{tg}\frac{x}{2}-7|$, (substituce: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$).
d) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\cos x-2\mathrm{arctg}(\cos x)$, (substituce: $\cos x=t$).
e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos(2x)}$; *Výsledek:* $\frac{1}{2}\ln|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{-1+\sqrt{2}\cos x}\right|$, (substituce: $\cos x=t$).
f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$; *Výsledek:* $-\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}-\frac{1}{3\mathrm{tg}^3 x}$, (substituce $\mathrm{tg}\,x=t$).
g) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\mathrm{arctg}(\sin^2 x)$, (substituce: $\sin x=t$).

Příklad 5. Zintegrujte následující iracionální funkce:
a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\frac{4}{3}(x^{\frac{3}{4}}-\ln|x^{\frac{3}{4}}+1|)$, (substituce: $x=t^4$).
b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $2(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x+1}\right|)$, (substituce: $x=t^2$).
c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}}$; *Výsledek:* $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$, (substituce: $2x+1=t^2$).
d) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $-\frac{3}{10}\sqrt[3]{(1-x)^{10}}+\frac{6}{7}\sqrt[3]{(1-x)^7}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}$, (substituce: $1-x=t^3$).
e) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{x(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[6]{x}+12\sqrt[12]{x}+24\ln|\sqrt[12]{x}|-\frac{24}{\sqrt[12]{x}}-\frac{12}{\sqrt[6]{x}}-36\ln|\sqrt[12]{x}+1|$, (substituce: $x=t^{12}$).
f) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $2\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}}$, (substituce: $x=t^6$).
g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$; *Výsledek:* $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln|\sqrt[4]{x}+1|$, (substituce: $x=t^4$).
h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; *Výsledek:* $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, (substituce: $x=\sin t$).
i) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x$; *Výsledek:* $\sqrt{x^2-4}+2\arcsin\frac{2}{x}$, (substituce: $x=\frac{2}{\sin t}$).