Rozvoj matematických představ 1.

Helena Durnová

říjen 2011

Přehled okruhů - RMP 1

1. Výrok. Negace výroku. Složené výroky (logické spojky: konjunkce, disjunkce, ostrá disjunkce, implikace, ekvivalence). Výroková forma. Výroková formule, pravdivostní ohodnocení výrokových formulí. Kvantifikované výroky: obecný a existenční kvantifikátor, negace kvantifikovaných výroků.

2. Množina. Podmnožina. Doplněk množiny. Sjednocení dvou množin. Průnik, rozdíl, symetrický rozdíl dvou množin. Využití množinových diagramů k řešení úloh. Kartézský součin dvou množin.

3. Binární relace z množiny do množiny. Binární relace na množině, Uspořádání množiny. Ekvivalence na množině a rozklad množiny. Zobrazení z množiny do množiny. Typy zobrazení: prosté, vzájemně jednoznačné.

4. Přirozená čísla: zavedení a základní vlastnosti. Operace s přirozenými čísly. Vytváření pojmu přirozeného čísla. Přirozená čísla a předškoláci.

V následujícím textu najdete stručné shrnutí látky a příklady k procvičení. Hvězdičkou (*) jsou označeny obtížnější příklady.

Literatura

Základní:

1 Růžena Blažková: *Rozvoj matematických pojmů a představ u dětí předškolního věku.*

http://is.muni.cz/elportal/?id=893208

Doporučená:

2 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy. Č. 1.* 1. vyd. Brno: UJEP Brno, 1987. 97 s.

3 Hejný, Milan - Stehlíková, Naďa, *Číselné představy dětí.* Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 1999. 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

4 Hejný, Milan - Kuřina, František. *Dítě, škola a matematika :konstruktivistické přístupy k vyučování.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2001. 187 s. ISBN 80-7178-581-4.

5 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena. *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty).* Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2002. 84 s. ISBN 80-210-3022-4.

6 Zuzana Kolláriková - Branislav Pupala, eds., *Predškolská a elementárna pedagogika.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2001. 455 s. ISBN 80-7178-585-7.

7 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena, *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy.* Brno: Paido, edice pedagogické literatury, 2007. 96 s. Dotisk 1. vydání. ISBN 80-85931-89-3.

8 Drábek, Jaroslav - Viktora, Václav, *Základy elementární aritmetiky: pro učitelství 1. stupně ZŠ a.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. 223 s.

Kapitola 1

Výroky

Definice 1 Výrok *je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, že je pravdivé nebo že pravdivé není.*

Negace výrokuA: $\neg A$

Konjunkce (A a zároveň B): $A \wedge B$

Disjunkce (A nebo B): $A \vee B$

Implikace (když A, pak B): $A \Rightarrow B$

Ekvivalence (A právě tehdy když B): $A \Leftrightarrow B$

Tautologie: výrok, který je vždy pravdivý

Kontradikce: výrok, který není nikdy pravidvý

Tabulka pravdivostních hodnot složených výroků

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Příklad 2 Uveďte příklad jednoduchého výroku.

Příklad 3 Uveďte příklad složeného výroku - konjunkce.

Příklad 4 Uveďte příklad složeného výroku - disjunkce.

Příklad 5 Uveďte příklad složeného výroku - implikace.

Příklad 6 Uveďte příklad složeného výroku - ekvivalence.

Příklad 7 Vyslovte negace předchozích výroků.

Příklad 8 Uveďte příklad výroku, který je vždy pravdivý (tautologie).

Příklad 9 Uveďte příklad výroku, který nikdy není pravdivý (kontradikce).

Příklad 10 Napište negace následujících výroků:

1. Neexistují neomylní učitelé.

   [Existuje alespoň jeden neomylný učitel.]

2. Každý učitel je omylný.

   [Alespoň jeden učitel je neomylný.]

3. Žádný učitel není neomylný.

   [Alespoň jeden učitel je neomylný. (Všimněte si, že předchozí tři výroky jsou stejné.)]

4. Jen omylní lidé jsou učitelé.

   [Alespoň jeden neomylný člověk je učitelem.]

5. Žádný učitel není omylný.

   [Existuje alespoň jeden omylný učitel.]

6. Existují omylní učitelé.

   [Všichni učitelé jsou neomylní.]

7. Jen ti lidé, kteří jsou učiteli, mohou být omylní.

   [Existue alespoň jeden člověk, který není učitelem a je omylný.]

8. Nejen omylní lidé jsou učiteli.

   [Žádný neomylný člověk není učitelem.]

Příklad 11 Sestavte tabulku pravdivostních hodnot následujících složených výroků:

(D) $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(\neg B \vee \neg A)$

(E) $\neg(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$

(F) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

(G) $(A \vee B) \wedge C$

(H) $(A \wedge C) \vee B$

(J) $[(A \vee B) \wedge C] \Rightarrow [(A \wedge C \vee B)]$

(K) $A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$

(L) $\neg(B \wedge C)$

(M) $[A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)] \Leftrightarrow [\neg(B \wedge C)]$

(N) $[(A \Rightarrow B) \wedge B] \Rightarrow A$

(P) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(Q) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

Řešení:

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Příklad 12 Napište negace následujících výroků (s kvantifikátory):

1. Všechna zvířata mají čtyři nohy.

   [Alespoň jedno zvíře nemá čtyři nohy.]

2. Existuje ryba, která mluví.

   [Žádná ryba nemluví.]

3. Existuje nejméně 5 druhů sladkovodních ryb.

   [Existují nejvíce 4 druhy sladkovodních ryb.]

4. Aspoň jeden jehličnatý strom na zimu opadává.

   [Žádný jehličnatý strom na zimu neopadává.]

5. V Evropě rostou alespoň dva druhy borovic.

   [V Evropě roste nejvýše jeden druh borovice.]

6. Duha obsahuje všechny základní barvy.

   [Alespoň jedna základní barva není obsažena v duze.]

7. Každou barvu lze namíchat ze základních barev.

   [Alespoň jednu barvu nelze namíchat ze základních barev.]

8. Všichni ptáci mají právě dvě nohy.

   [Existuje alespoň jeden pták, který nemá právě dvě nohy (má nejvýše jednu nebo alespoň tři nohy).]

9. Všechny paní učitelky jsou hodné.

   [Alespoň jedna paní učitelka není hodná.]

10. Týden má (právě) sedm dní.

    [Týden má nejvýše šest nebo alespoň osm dní.]

Kapitola 2

Množiny a operace s nimi

Definice 13 *Soubor prvků nazýváme* množinou*. Množiny označujeme zpravidla velkými písmeny latinské abecedy.*

x je prvkem A: $x \in A$;

A je podmnožinou B: $A \subset B$;

A je podmnožinou nebo je rovno B: $A \subseteq B$;

Sjednocení dvou množin: $A \cup B$;

Průnik dvou množin: $A \cap B$;

Rozdíl dvou množin: $A \setminus B$;

Doplněk množiny A vzhledem k množině M (platí $A \subseteq M$: $\overline{A} = M \setminus A$);

Kartézský součin dvou množin A, B: $A \times B$ (kartézský součin je množina uspořádaných dvojic, v nichž první prvek je z množiny A a druhý prvek z množiny B).

Příklad 14 Nechť $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, e, i, o, u\}, C = \{b, c, d, f, g\}$. Uveďte, jaké prvky obsahují následující množiny:

1. $A \cup B$
2. $A \cup C$
3. $B \cup C$
4. $A \cap B$
5. $A \cap C$
6. $B \cap C$
7. $A \setminus B$
8. $A \setminus C$
9. $B \setminus C$
10. $B \setminus A$

11. $C \setminus B$
12. $C \setminus A$
13. $A \times B$
14. $A \times C$
15. $B \times C$
16. $B \times A$
17. $C \times A$
18. $C \times B$
19. $A \times A$
20. $B \times B$
21. $C \times C$

Příklad 15 Určete všechny podmnožiny množin A, B a C z předchozího příkladu.

Rozhodněte, zda pro množiny A, B a C z předchozího příkladu platí následující tvrzení:

1. $A \subseteq B$
2. $B \subseteq C$
3. $A \subset B$
4. $C \subset B$

Příklad 16 Ukažte, že platí následující tvrzení (pomocí Vennových diagramů):

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

Příklad 17 Rozhodněte,která z následujících množinových inkluzí platí:

1. $A \setminus (B \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$
2. $A \setminus (B \cup C) \subset A \setminus (B \setminus C)$
   [platí 2.]

Příklad 18 Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

* $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$, pokud $C \subset A$
* $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

Kapitola 3

Relace a zobrazení

Definice 19 Relací *na množině A nazýváme podmnožinu kartézského součinu* $A \times A$*; tj. prvky relace jsou některé uspořádané dvojice prvků množiny A:* $R \subseteq A \times A$

Vlastnosti relace

Relace symetrická: pro $\forall a, b \in A$ *platí:* $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$

Relace reflexivní: pro $\forall a \in A$ *platí:* $(a, a) \in R$

Relace antisymetrická: pokud $(a, b) \in A \wedge (b, a) \in A)$*, pak:* $a = b$

Relace tranzitivní: pro $\forall a, b, c \in A$ *platí:* $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Leftrightarrow (a, c) \in R$

Relaci, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní nazýváme uspořádání*. Tuto relaci lze zakreslit* hasseovským diagramem*.*

Relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní nazýváme ekvivalence*. Ke každé ekvivalenci přísluší* rozklad*.*

Příklad 20 Relaci na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zadanou výčtem zapište do tabulky a určete, zda je

(a) reflexivní,

(b) symetrická,

(c) antisymetrická,

(d) tranzitivní,

(e) uspořádání,

(f) ekvivalence.

V případě, že se jedná o uspořádání, nakreslete hasseovský diagram zadané relace; v případě, že se jedná o ekvivalenci, najděte příslušný rozklad.

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$;

[reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranziivní, uspořádání, ekvivalence, rozklad: jednoprvkové množiny 1,2,3,4,5,6]

$S = R \cup \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3)\}$;

[reflexivní, symetrická, tranziivní, ekvivalence, rozklad: dvouprvkové množiny 14, 25, 36]

$T = R \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)\}$

[reflexivní, antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

$P = R \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$

[reflexivní, antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

$Q = R \cup \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$

[reflexivní antisymetrická, tranziivní, uspořádání]

Definice 21 *Relace $f \subset A \times B$ se nazývá zobrazením, pokud je každému prvku množiny A přiřazen nejvýše jeden prvek množiny B (tj. žádný prvek množiny A nelze zobrazit na dva různé prvky).*

Zobrazení se nazývá

prosté*, pokud má každý prvek množiny B právě jeden vzor;*

"na"*, pokud má každý prvek množiny B alespoň jeden vzor;*

vzájemně jednoznačné*, pokud má každý prvek množiny A právě jeden obraz a každý prvek množiny B právě jeden vzor.*

Příklad 22 Určete, která z následujících zobrazení jsou vzájemně jednoznačná; která jsou prostá; a která jsou 'na'. Nakreslete názorný obrázek.

$A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,3,4,5\}, f = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,2)\}$

[prosté]

$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}, f = \{(1,1),(2,3),(3,4)\}$

[prosté]

$A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c,d\}, f = \{(1,d),(2,a),(3,c),(4,b)\}$

[prosté a na, tj. vzájemně jednoznačné]

Kapitola 4

Přirozená čísla a operace s nimi

Definice 23 *Binární operace* $+$ *a* $\cdot$ *na množině přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *jsou*

komutativní, tj. platí $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$*;*

asociativní, tj. platí $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*;*

Dále platí distributivní zákon: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$*.*

Příklad 24 *Sečtěte následující čísla ve dvojkové soustavě*

1. $10101 + 1011$
   [100000]
2. $10111 + 10101$
   [101100]
3. $11001 + 10001$
   [101010]
4. $11111 + 11111$
   [111110]

Příklad 25 Zapište následující čísla vyjádředná římskými číslicemi v poziční desítkové soustavě:

1. XLIII
   [43]
2. MCM
   [1900]
3. MDCCCLIV
   [1854]
4. MXMIX
   [1999]
5. MDCXVIII
   [1618]