Reciproké rovnice

Reciprokou rovnicí rozumíme algebraickou rovnici, která je zadaná ve tvaru, jenž popisují níže uvedené definice. Její název je odvozen z vlastnosti jejích kořenů, pro které platí, že existují-li, pak pouze nenulové a je-li číslo x kořenem reciproké rovnice, pak je jejím kořenem také číslo $\frac{1}{x}$ (reciproká hodnota čísla x).

- **Definice I:**

  Reciprokou rovnicí n-tého stupně I. druhu s neznámou x rozumíme rovnici:

  $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

  kde $n \in \mathbf{N}$, $a_n \neq 0$ a kde $a_i \in \mathbf{Z}$ a platí, že $a_k = a_{n-k}$, kde $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Příkladem takové reciproké rovnice I. druhu je např. rovnice:

$$5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$$

- **Definice II:**

  Reciprokou rovnicí n-tého stupně II. druhu s neznámou x rozumíme rovnici:

  $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2}$$

  kde $n \in \mathbf{N}$, $a_n \neq 0$ a kde $a_i \in \mathbf{Z}$ a platí, že $a_k = -a_{n-k}$, kde $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Příkladem takové reciproké rovnice II. druhu je např. rovnice:

$$12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0$$

Pro reciproké rovnice sudého stupně ($n = 2m$) zřejmě platí, že v rovnici I. druhu může být koeficient a_m libovolný, zatímco v rovnici II. druhu musí být $a_m = 0$.

Postup řešení reciproké rovnice I. druhu:

A. Je-li stupeň rovnice sudé číslo $n = 2m$ ($m \in \mathbf{N}$):

1. Vydělíme rovnici číslem x^m.
2. Z prvního a posledního členu, druhého a předposledního členu atd. vytkneme jejich společný koeficient.
3. Zavedeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$ a rovnici dořešíme.

B. Je-li stupeň rovnice liché číslo $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbf{N}$):

1. Rovnice má vždy jeden kořen $x = -1$.
2. Pomocí Hornerova schematu snížíme stupeň zadané rovnice a získáme reciprokou rovnici I. druhu sudého stupně.
3. Rovnici dořešíme viz bod A.

Postup řešení reciproké rovnice II. druhu:

1. Rovnice má vždy jeden kořen $x = 1$.
2. Pomocí Hornerova schematu snížíme stupeň zadané rovnice a získáme reciprokou rovnici I. druhu.
3. Rovnici dořešíme viz body A. a B. pro řešení reciproké rovnice I. druhu.

Poznámka k zavedení substituce $y = x + \frac{1}{x}$:

Je zřejmé, že při zavedení substituce také platí:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$$