10. Neurčitý a určitý integrál

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

Osnova:

1 Neurčitý integrál

2 Geometrická interpretace

3 Základní vzorce pro integrování

4 Určitý integrál

5 Užití integračního počtu

   5. 1 Obsah rovinného útvaru

   5. 2 Další příklady využití

1 Neurčitý integrál

Funkce F se nazývá primitivní k funkci *f* na intervalu (a;b), jestliže pro každé x ϵ (a;b) platí:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci *f* nazýváme **neurčitým integrálem funkce f** a zapisujeme:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c.}$$ přičemž $$\boxed{F'(x) = f(x), c \in R.}$$

Integrační znak

Integrovaná funkce

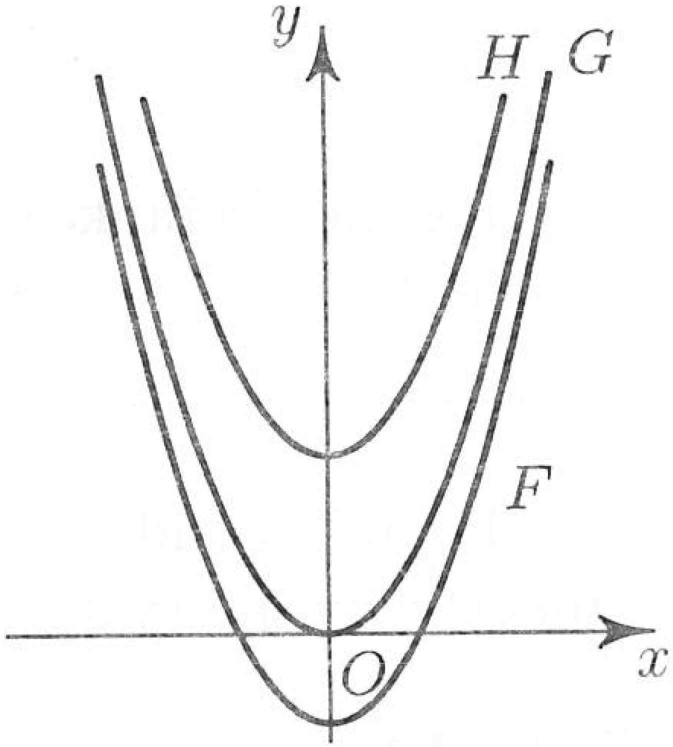
Integrační proměnná

Integrační konstanta

Výpočet neurčitého integrálu $\int f(x)dx$ = integrování funkce f

2 Geometrická interpretace

Známe-li graf jedné primitivní funkce F k funkci *f* na intervalu J, pak grafy všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu J dostaneme posunutím grafu funkce F ve směru osy y.



$$G(x) = F(x) + C$$
$$H(x) = F(x) + C'$$

Na obrázku jsou uvedeny grafy některých primitivních funkcí k funkci f(x) = 2x. Všechny tyto primitivní funkce k funkci f(x) lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{F(x) = x^2 + C}$, kde C є R.

3 Základní vzorce

Funkce f: $y = f(x)$	Vzorec pro neurčitý integrál $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in R$	Podmínky platnosti vzorce ($x \in D(F)$)
$y = 0$	$\int 0\,dx = c\ (c \in R)$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = 1$	$\int dx = x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^n,\ n \in N$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^k,\ k \in Z,\ k \neq -1$	$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$ pro $k > 0$ ($k \in N$) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ pro $k < 0$
$y = x^r,\ r \in R,\ r \neq -1$	$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$	$x \in \bigcup_{k \in Z} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$
$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \in \bigcup_{k \in Z} (k\pi, (k+1)\pi)$

Existují-li v otevřeném intervalu J primitivní funkce k funkcím f(x), g(x) a jsou-li c_1, c_2 libovolné konstanty, pak platí následující vztahy:

$$\int c_1 f(x)dx = c_1 \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

4 Určitý integrál

Nechť ***F*** je primitivní funkce k funkci **f** v intervalu ***I***. Rozdíl ***F(b) – F(a)*** funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu se nazývá **určitý integrál funkce f** v mezích od ***a*** do ***b*** a značí se:

Horní mez

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dolní mez

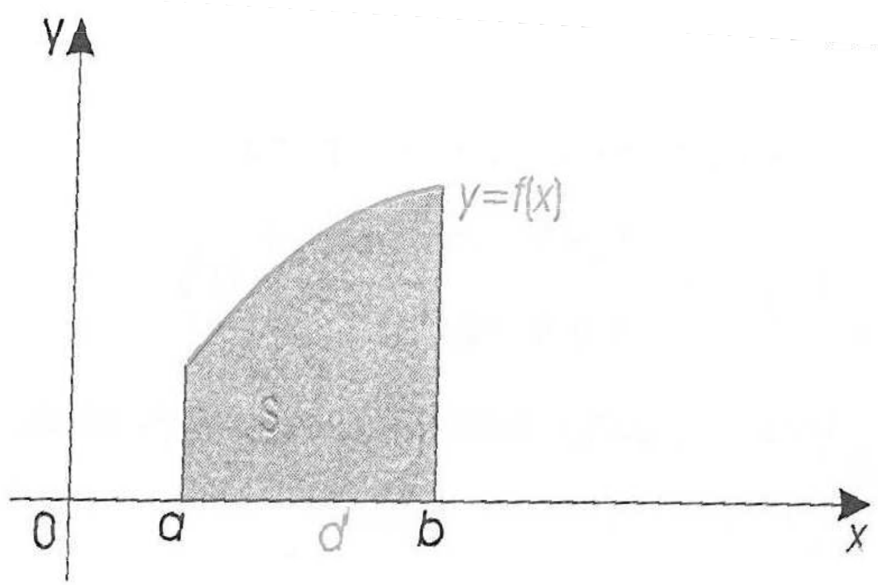
Při výpočtu integrálu zpravidla využíváme tento způsob zápisu:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

5 Užití integračního počtu

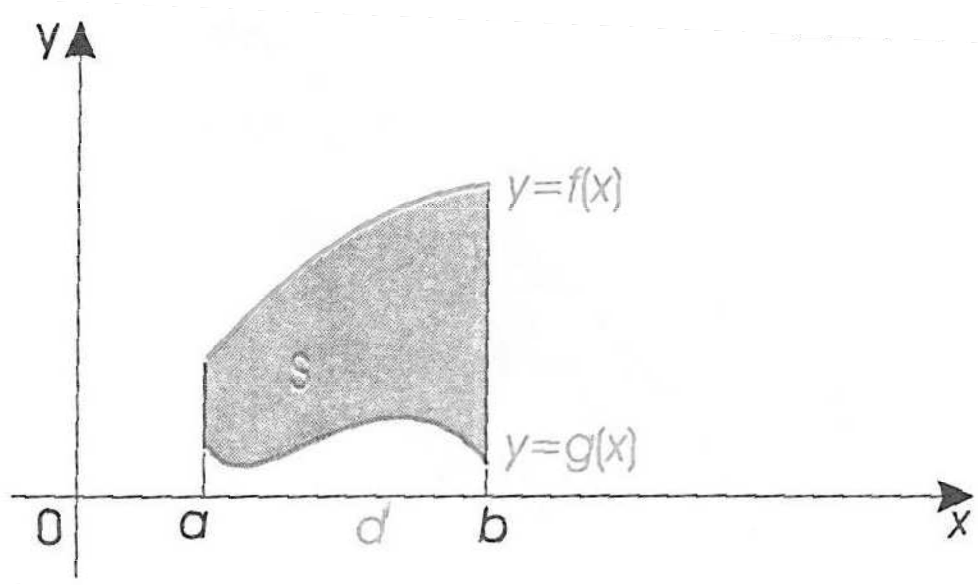
5. 1 Obsah rovinného útvaru

a) Obsah křivočarého lichoběžníku:



$$s = \int_a^b f(x)dx$$

b) Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí f(x) a g(x):



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

5 Užití integračního počtu

5. 2 Další příklady využití

a) Objem rotačního tělesa

b) Obsah pláště rotačního tělesa

c) Fyzikální aplikace (dráha přímočarého pohybu, práce)

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.