

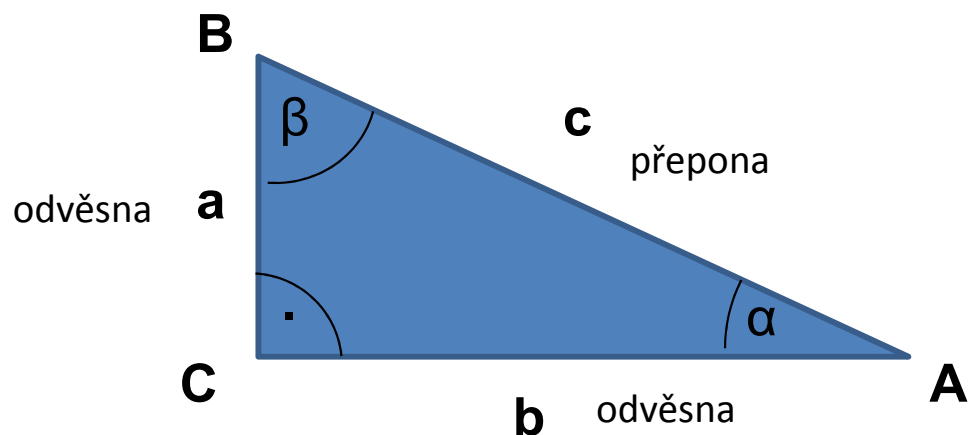
Goniometrické funkce a rovnice

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

1 GONIOMETRICKÉ FUNKCE OSTRÉHO ÚHLU



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

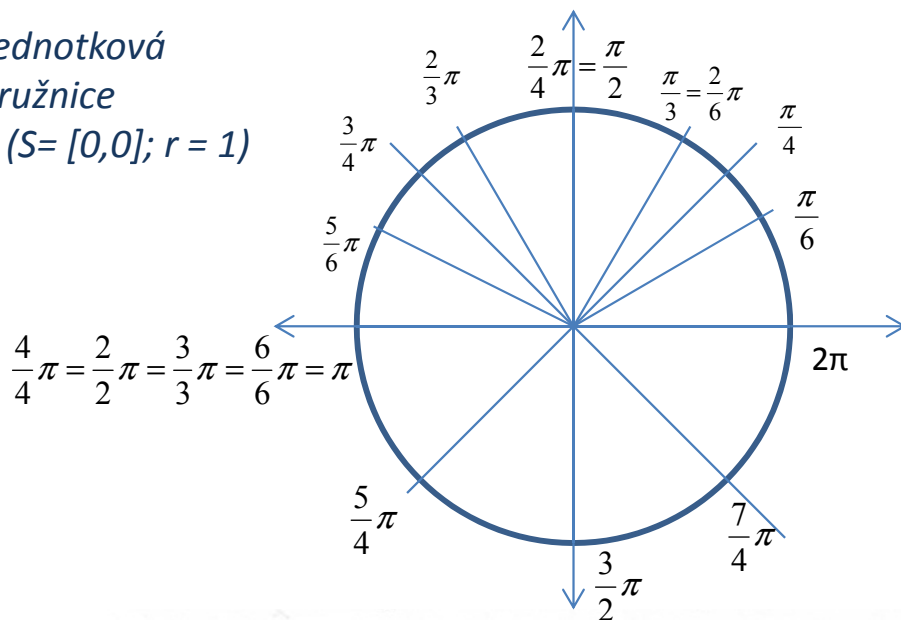
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přilehlé odvěsny}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka protilehlé odvěsny}}$$

2 Velikost úhlů v obloukové a stupňové míře

Jednotková
kružnice
 $k(S=[0,0]; r=1)$



$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57^\circ 17'$$

$$\frac{x \cdot 180^\circ}{\pi} = \alpha^\circ$$

$$\frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = x$$

α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$x \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Úlohy

Př.1: Vyjádřete v míře obloukové:

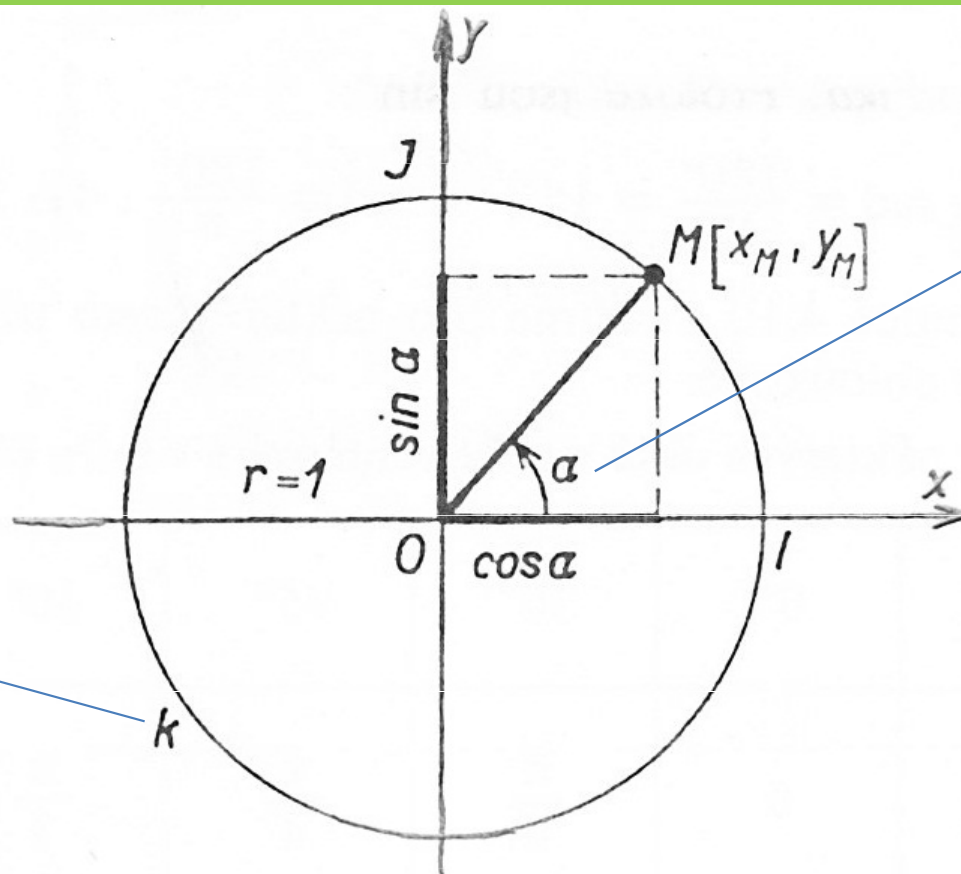
- a) $\alpha = 40^\circ$
b) $\alpha = 150^\circ$

Př.2: Vyjádřete v míře stupňové:

- a) $x = \frac{9}{10}\pi$
b) $x = \frac{7}{2}\pi$

3 GONIOMETRICKÉ FUNKCE SINUS A KOSINUS

Definice:



Jednotková
kružnice
 $k(0; r = 1)$

Orientovaný úhel α v základní poloze.
Ke každému $\alpha \in \mathbb{R}$ lze přiřadit
1! orientovaný úhel velikosti α
(v obloukové míře), jehož počáteční
rameno je polopřímka OI .

Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sin \alpha = y_M, \cos \alpha = x_M$$

Funkční předpisy:

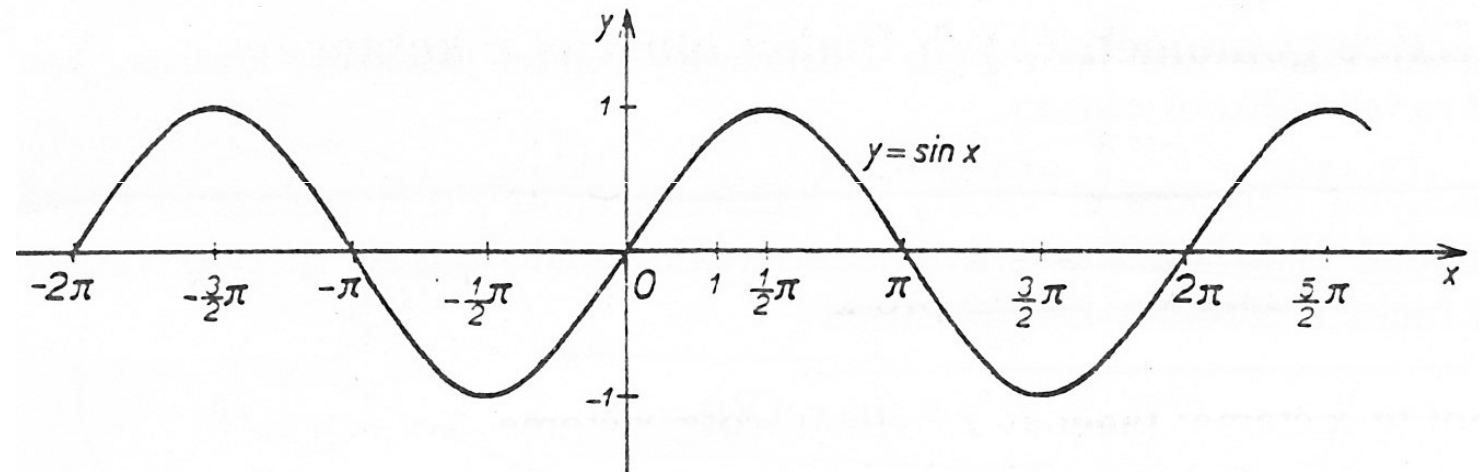
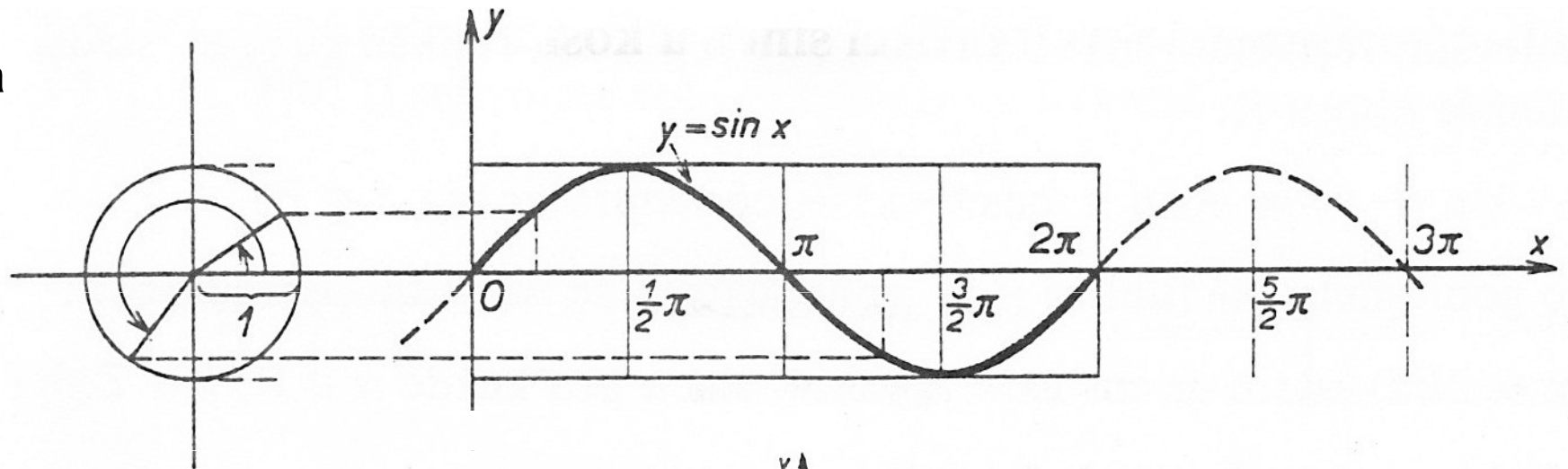
$$f : y = \sin x, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$f : y = \cos x, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

3.1 Graf funkce sinus

$$f : y = \sin x$$

= sinusoida



Vlastnosti:

$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1; 1 \rangle$$

Je **lichá**: $\sin(-x) = -\sin x$.

Je **rostoucí** pro $x \in \langle -\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Je **klesající** pro $x \in \langle \pi/2 + 2k\pi; 3\pi/2 + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Omezená v celém definičním oboru shora i zdola.

Maximum $[\pi/2 + 2k\pi, 1]$, **minimum** $[3\pi/2 + 2k\pi, -1]$.

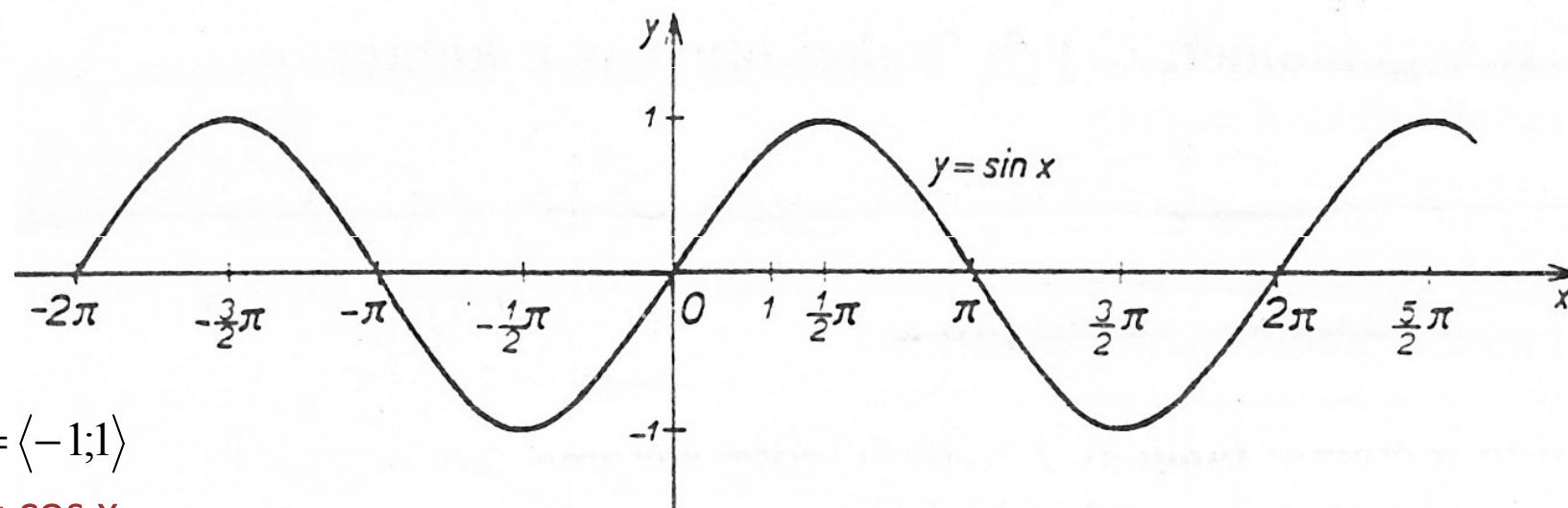
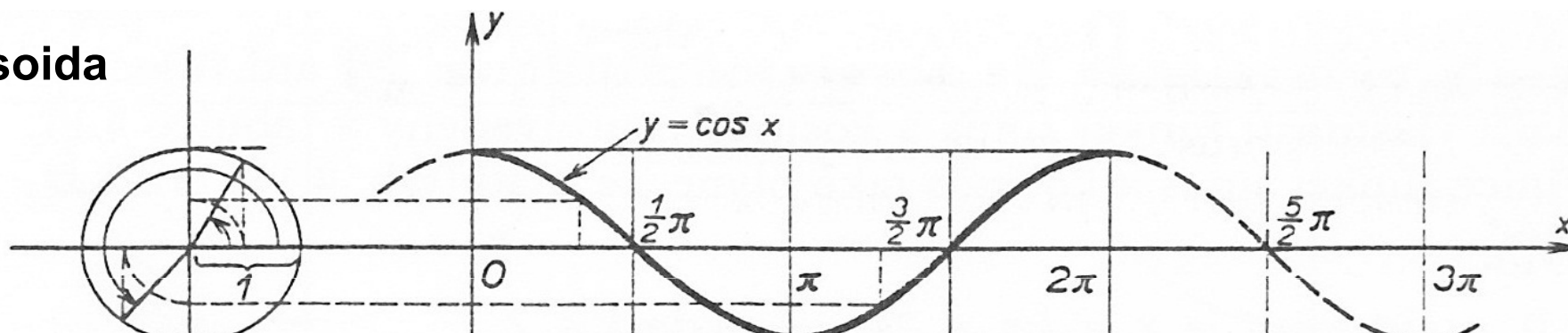
Perioda 2π : $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Je **spojitá** v \mathbb{R} .

3.2 Graf funkce cosinus

$$f : y = \cos x$$

= cosinusoida



Vlastnosti:

$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1; 1 \rangle$$

Je **sudá**: $\cos(-x) = \cos x$.

Je **rostoucí** pro $x \in \langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Je **klesající** pro $x \in \langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Omezená v celém definičním oboru shora i zdola.

Maximum $[2k\pi, 1]$, **minimum** $[\pi + 2k\pi, -1]$.

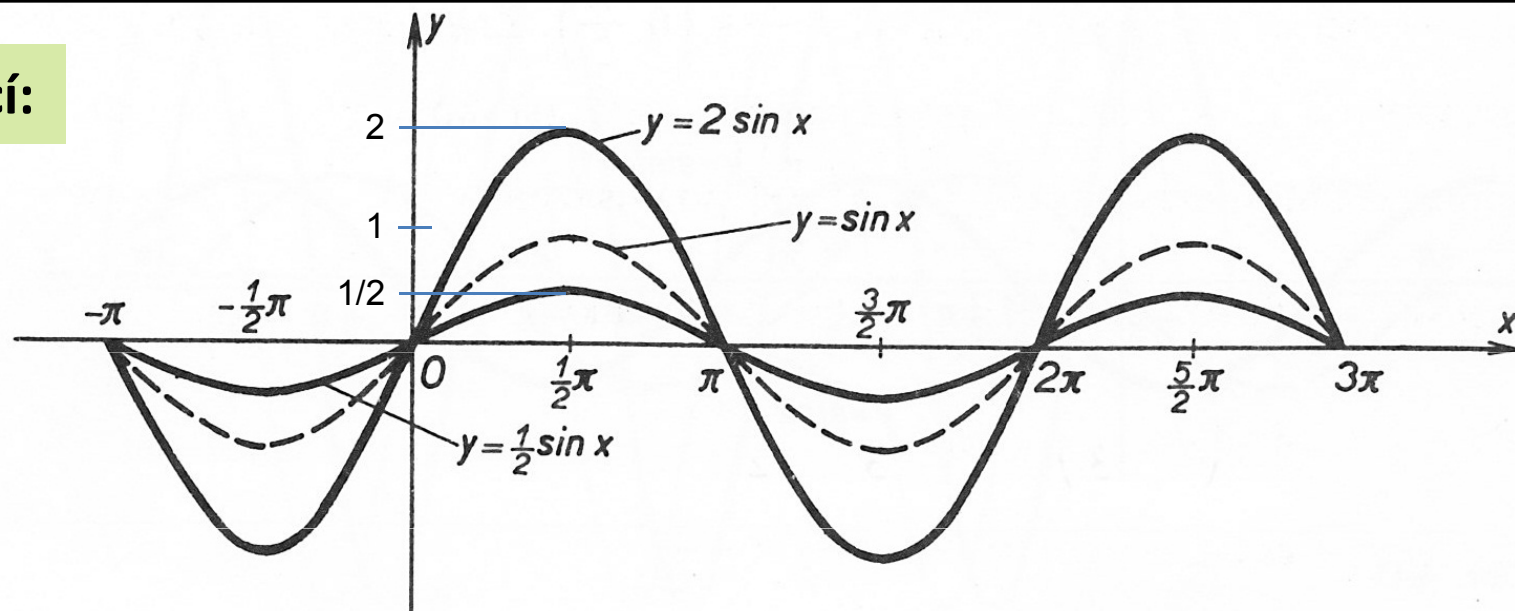
Perioda 2π : $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Je **spojitá** v \mathbb{R} .

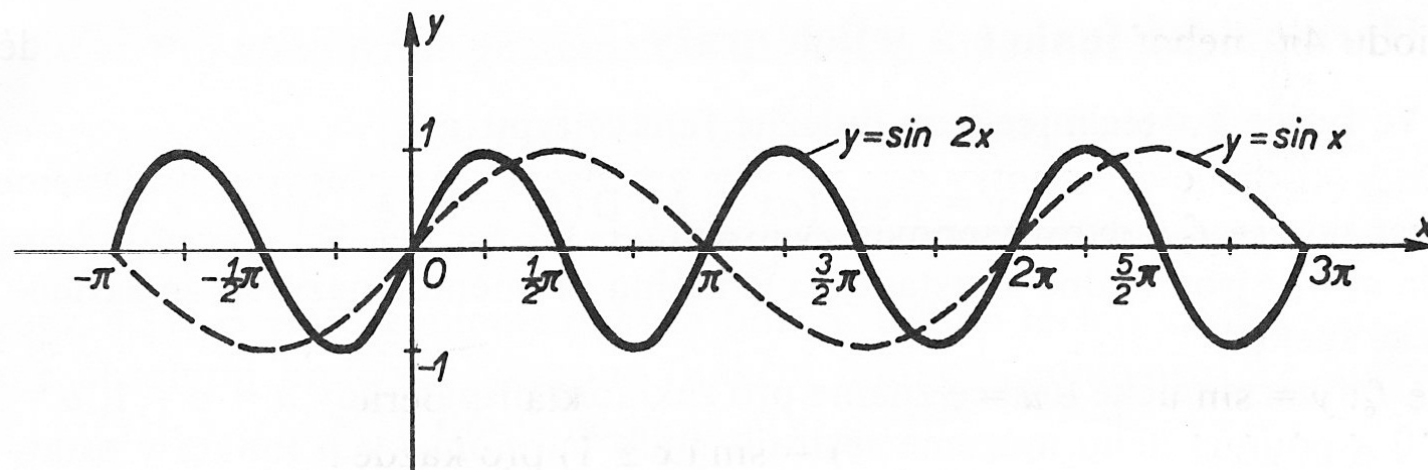
Příklady grafů funkcí:

$$f: y = 2 \sin x$$

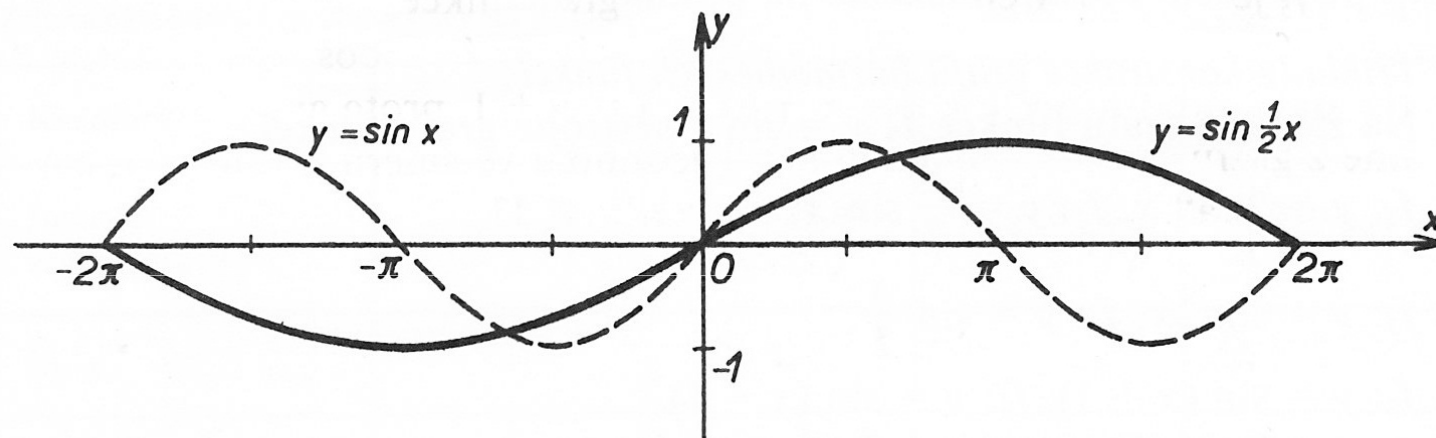
$$f: y = \frac{1}{2} \sin x$$



$$f: y = \sin 2x$$

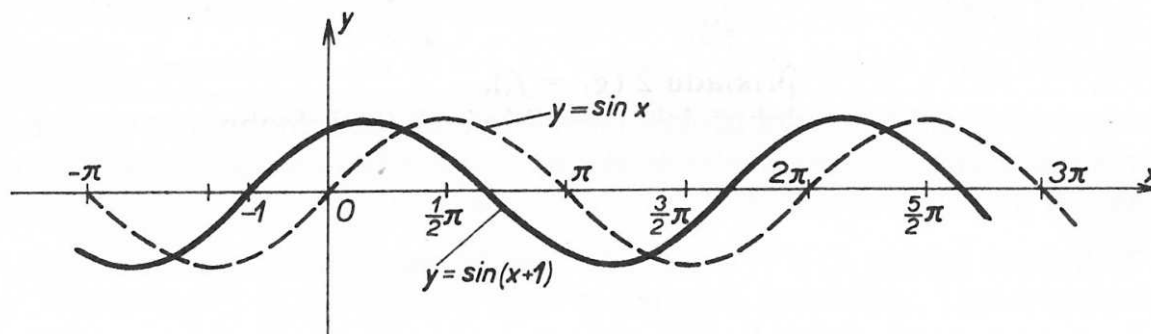


$$f: y = \sin \frac{1}{2} x$$

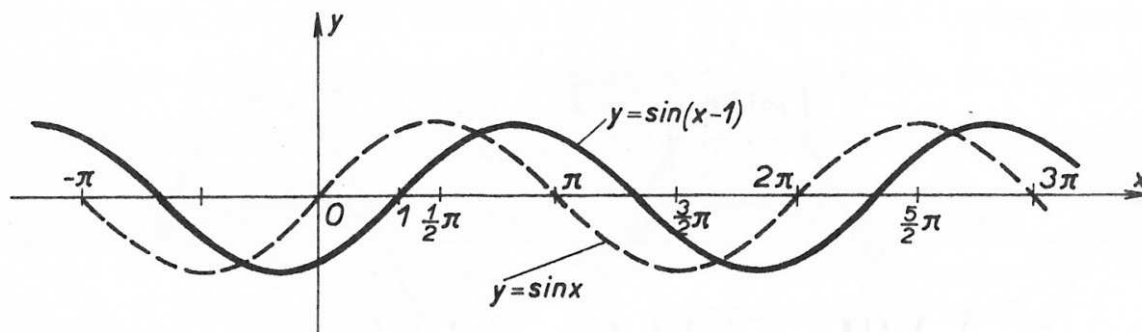


Příklady grafů funkcí:

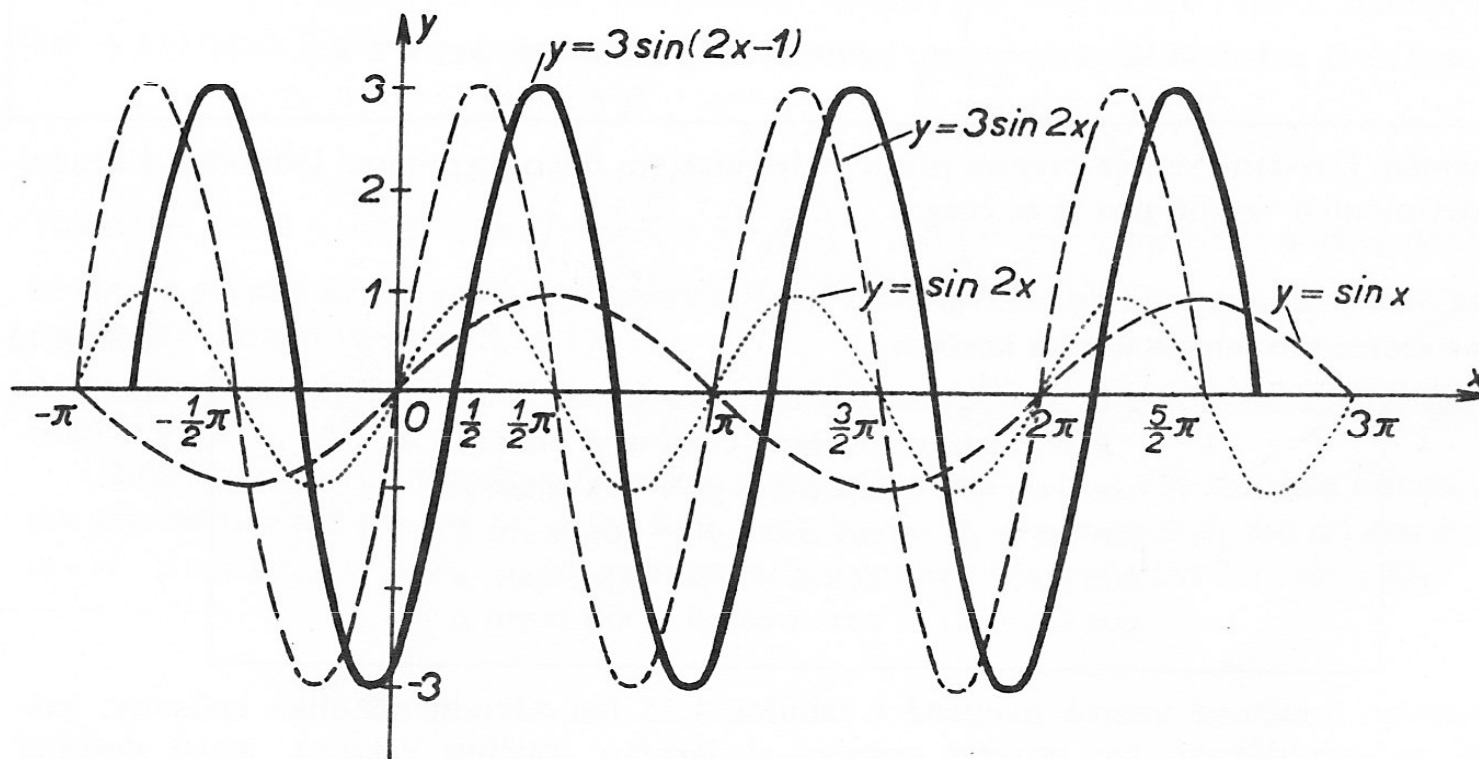
$$f : y = \sin(x+1)$$



$$f : y = \sin(x-1)$$



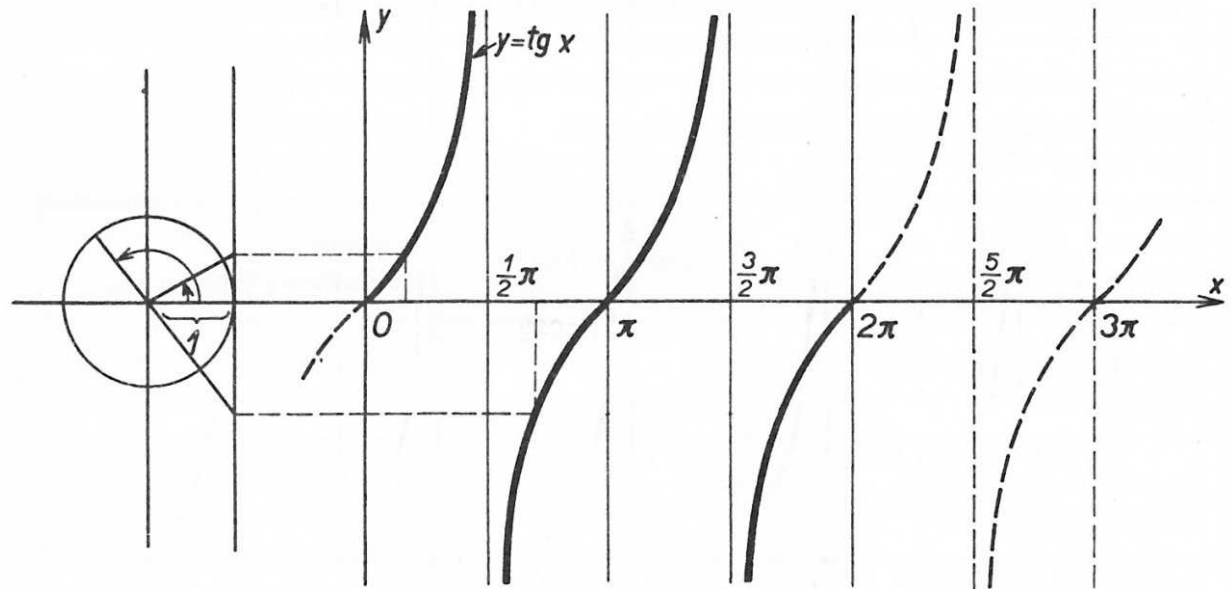
$$f : y = 3 \sin(2x-1)$$



4 Graf funkce tangens

$$f : y = \operatorname{tg} x$$

= tangentoidea



Vlastnosti:

$$D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}, H(f) = \mathbb{R}$$

Je **lichá**: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

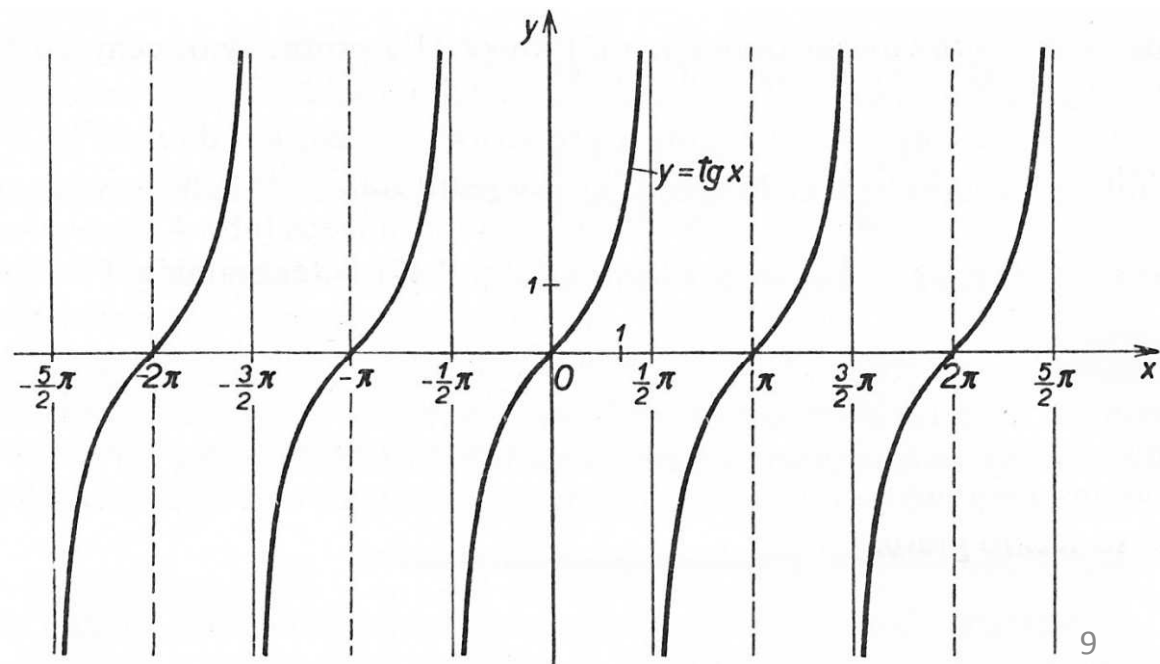
Je **rostoucí** pro $x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Není omezená shora ani zdola.

Maximum ani minimum
neexistuje.

Perioda π : $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

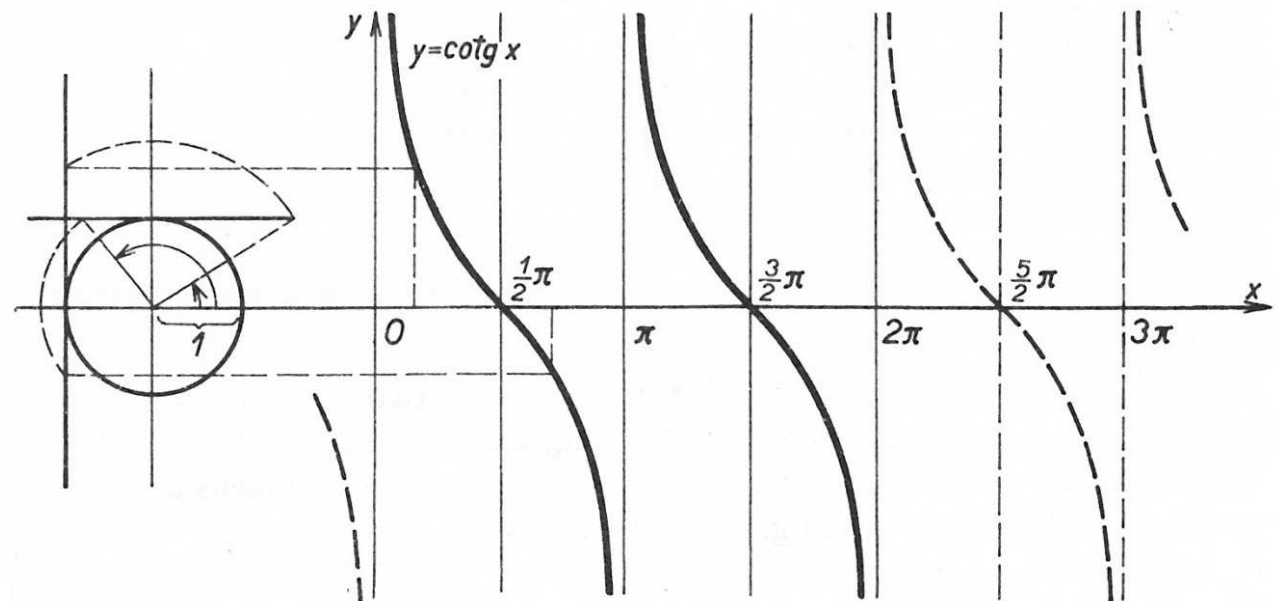
Spojitosť: Není definována pro
 $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.



5 Graf funkce cotangens

$$f : y = \cotg x$$

= cotangentoida



Vlastnosti:

$$D(f) = R - \{k\pi\}, k \in Z, H(f) = R$$

Je **lichá**: $\cotg(-x) = -\cotg x$.

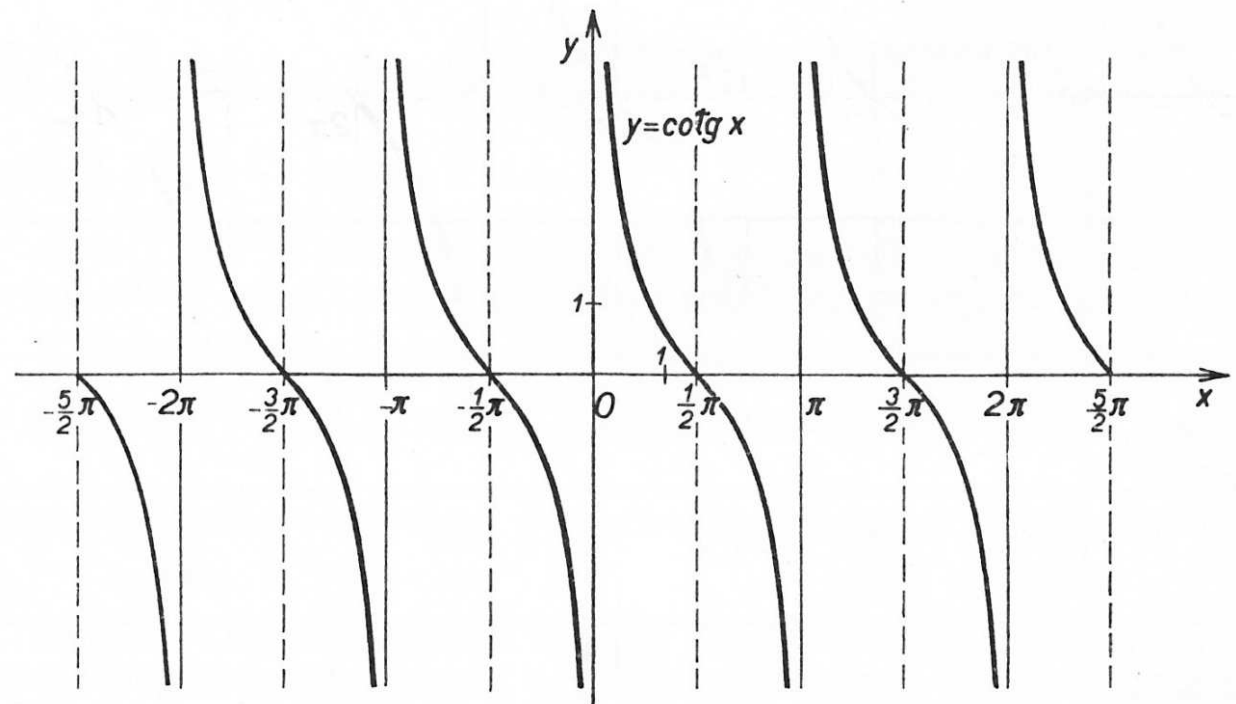
Je **klesající** pro $x \in (k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

Není omezená shora ani zdola.

Maximum ani minimum neexistuje.

Perioda π : $\cotg x = \cotg(x + k\pi)$, $k \in Z$.

Spojitosť: Není definována pro $x = 2k\pi/2$, $k \in Z$.



6 Důležité hodnoty goniometrických funkcí

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\operatorname{cotg} x$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

7 Znaménka hodnot goniometrických funkcí

Kvadrant	I.	II.	III.	IV.
Interval argumentu x	$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

Úlohy

Př.: Vypočítejte:

$$a) \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$b) \cos \frac{7}{6} \pi =$$

$$c) \cos \frac{13}{4} \pi =$$

$$d) \sin \frac{14}{3} \pi =$$

$$e) \cos \left(-\frac{2}{3} \pi \right) =$$

$$f) \sin \left(-\frac{21}{4} \pi \right) =$$

$$g) \operatorname{tg} \left(-\frac{19}{6} \pi \right) =$$

8 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Základní vzorce:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

8 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Vztahy pro dvojnásobek a polovinu argumentu:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}\end{aligned}$$

Součtové vzorce:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Úlohy

Př.: Zjednodušte goniometrické výrazy:

$$a) \sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x =$$

$$b) \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} =$$

$$c) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x} =$$

$$d) \frac{1 + \cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x} =$$

$$e) \frac{1 + \cot^2 x}{\cot^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} =$$

9 GONIOMETRICKÉ ROVNICE

9.1 Základní goniometrické rovnice - jsou dány ve tvaru:

některá z goniometrických
funkcí \sin , \cos , tg , cotg

$$g(x) = a$$

reálné číslo

Úlohy

Př.1: a) $\sin x = -0,5$

d) $\operatorname{cotg} x = 1$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\sin x = -1$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

f) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.2 Složitější goniometrické rovnice – řešíme převedením na základní goniometrické rovnice (pomocí substituce, nebo s použitím vzorců pro goniometrické funkce).

Úlohy

Př.1: Řešte užitím substituce:

a) $2 \sin(3x + \pi) = -1$

b) $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$

Př.2: Řešte užitím goniometrických vzorců:

a) $\cos x + \operatorname{cotg} x = 1 + \sin x$

10 Další využití goniometrických funkcí: TRIGONOMETRIE

Sinová věta:

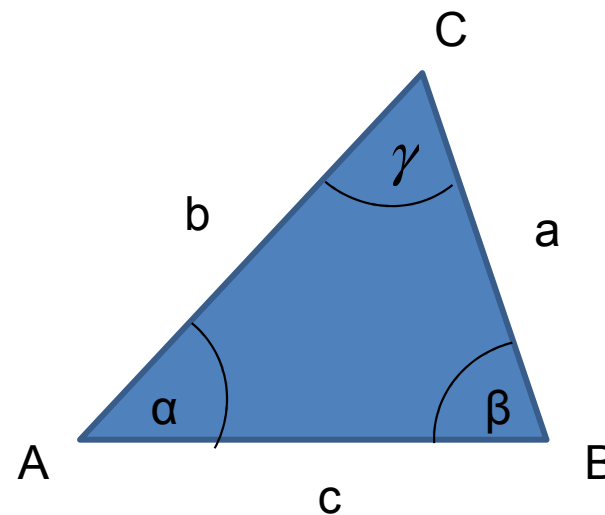
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Kosinová věta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Užití sinové a kosinové věty:

Např.: Při výpočtu výslednice dvou sil, které spolu svírají úhel α .

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Matematika pro gymnázia – Goniometrie. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.