# 9. Derivace funkce

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

# Osnova:

1 Pojem derivace

2 Geometrický význam derivace funkce

3 Derivace základních funkcí

4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

5 Aplikace – vyšetřování průběhu funkce

   5. 1 Monotónnost funkce

   5. 2 Extrémy funkce

# 1 Pojem derivace

Je-li funkce *f* definována v okolí bodu $x_o$ a existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Potom tuto limitu označujeme ***f`(x<sub></sub>***$_o$***)*** a nazýváme ji **derivací funkce f v bodě** $\boldsymbol{x_o}$**.**

## Derivace funkce *f* v bodě $x_o$ je tedy číslo:

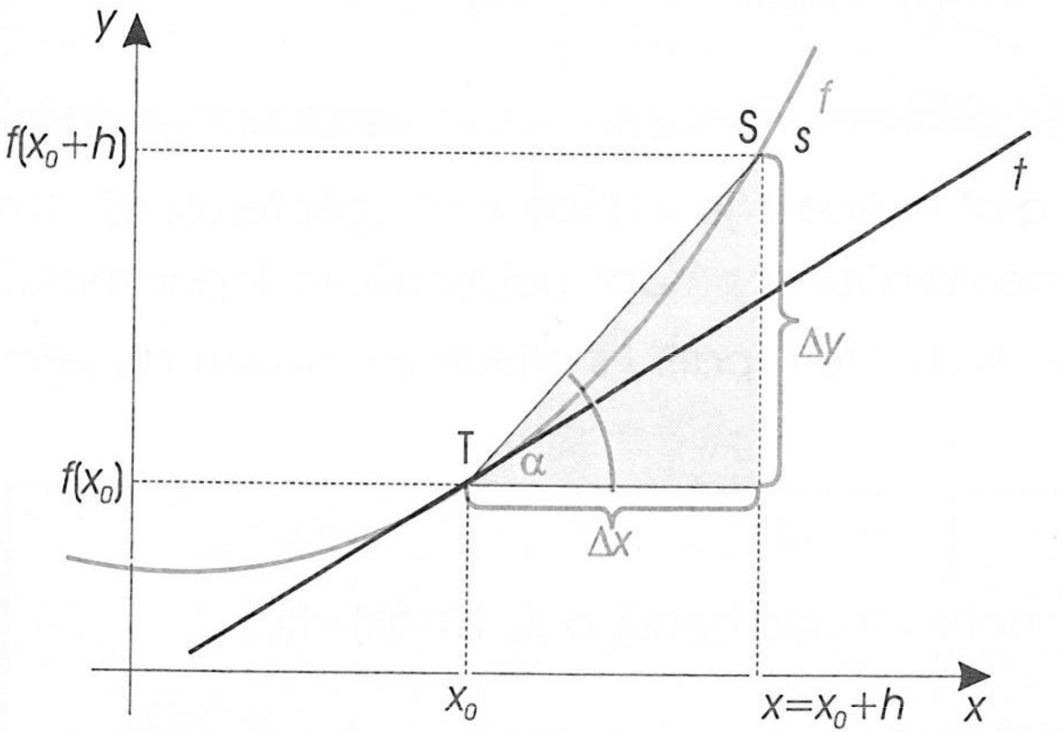
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pozn.: Při označení $x = x_o + h$ a $x - x_o = h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# 2 Geometrický význam derivace funkce

Pro **směrnici tečny $k_T$** ke grafu funkce ***f*** v bodě **T [$x_o$,$y_o$]** platí: $k_T = f'(x_0)$




Platí totiž: směrnice sečny ST je

$$k_S = tgx = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pokud se bude bod S přibližovat k bodu T, bude se poloha sečny „blížit“ poloze tečny v bodě T [$x_o$, $y_o$].

Pro směrnici tečny tedy dostaneme:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

**Rovnici tečny** pak můžeme psát ve tvaru: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

# 3 Derivace základních funkcí

| Funkce $f$: $y = f(x)$ | Vzorce pro derivaci funkce $f$ | Podmínky platnosti vzorce ($x \in \mathrm{D}(f')$) |
|---|---|---|
| $y = c \; (c \in \mathrm{R})$ | $y' = 0$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = x^n, \; n \in \mathrm{N}$ | $y' = nx^{n-1}$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = x^k, \; k \in \mathrm{Z}$ | $y' = kx^{k-1}$ | $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| $y = x^r, \; r \in \mathrm{R}$ | $y' = rx^{r-1}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \mathrm{e}^x$ | $y' = \mathrm{e}^x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = a^x \; (a > 0, \; a \neq 1)$ | $y' = a^x \ln a$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \log_a x \; (a > 0)$ | $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \mathrm{tg}\, x$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left( (2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \right)$ |
| $y = \mathrm{cotg}\, x$ | $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ |

# 4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce f: u = f(x), g: v = g(x) mají derivaci v každém bodě x є M, pak pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí platí pro všechna x є M (u podílu g (x) ≠ 0) následující vzorce:

a) $(u + v)' = u' + v'$,

b) $(u - v)' = u' - v'$,

c) $(uv)' = u'v + uv'$,

d) $(cu)' = cu'$, $c \in \mathrm{R}$,

e) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $\quad v \neq 0$.

# 5 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

## 5. 1 Monotónnost funkce

Nechť funkce f je spojitá na intervalu <a,b> a má v každém bodě x ϵ (a; b) derivaci f\`($x_o$). Pak platí:

- Je-li f\`($x_o$) > 0 pro každé x ϵ (a;b) ⟹ f je **rostoucí** na <a,b> .
- Je-li f\`($x_o$) < 0 pro každé x ϵ (a;b) ⟹ f je **klesající** na <a,b> .

# 5 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

## 5. 2 Extrémy funkce

Má-li funkce f v bodě $x_o$ derivaci a je-li f\`($x_o$) = 0, pak $x_o$ nazýváme **stacionárním bodem**. V tomto bodě $x_o$ může, ale nemusí mýt funkce lokální extrém – jedná se o bod „podezřelý “ z extrému.

Nechť f\`($x_o$) = 0 a nechť existuje v bodě $x_o$ druhá derivace. Pak:

- Je-li f\`\`($x_o$) < 0 ⇨ má funkce f v bodě $x_o$ ostré **lokální maximum**.
- Je-li f\`\`($x_o$) > 0 ⇨ má funkce f v bodě $x_o$ ostré **lokální minimum**.

# Literatura


- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.