

7. Vektory

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

Ivana Vaculová

Osnova:

1 Orientovaná úsečka

1.1 Velikost a střed orientované úsečky

2 Vektor

3 Sčítání vektorů

4 Násobení vektoru číslem

5 Lineární kombinace vektorů

6 Velikost vektoru

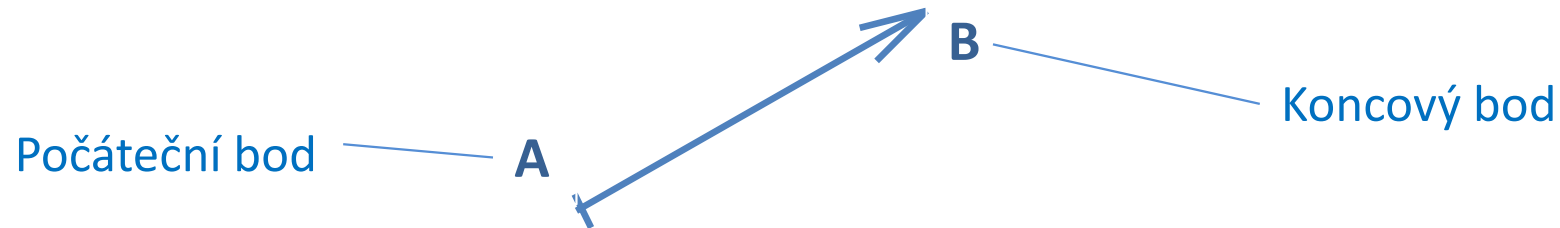
7 Skalární součin vektorů

8 Úhel dvou vektorů

9 Vektorový součin

1 Orientovaná úsečka

- Orientovaná úsečka **AB** = úsečka, u níž je určen počáteční a koncový bod.



Nulová orientovaná úsečka = úsečka, jejíž počáteční bod je totožný s koncovým bodem.

Aplikace

- Např. :** Pro znázornění síly, která působí na těleso
- směr úsečky udává směr působení síly
 - velikost úsečky udává velikost působící síly

1.1 Velikost a střed orientované úsečky

Velikost orientované úsečky **AB** = vzdálenost bodů **A, B**:

V rovině:

- A $[a_1, a_2]$ a B $[b_1, b_2]$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

V prostoru:

- A $[a_1, a_2, a_3]$ a B $[b_1, b_2, b_3]$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Střed S úsečky **AB**:

V rovině:

- A $[a_1, a_2]$, B $[b_1, b_2]$

$$S[s_1, s_2], \text{ kde}$$
$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

V prostoru:

- A $[a_1, a_2, a_3]$ a B $[b_1, b_2, b_3]$

$$S[s_1, s_2, s_3], \text{ kde}$$
$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Úlohy

Př.1: Vypočítejte vzdálenost bodů A [3,1,5] a B[1,2,3].

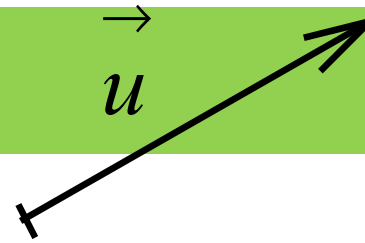
Př.2: Jsou dány body A, B. Vypočítejte souřadnice středu S úsečky AB, jestliže:

a) A [1, -1, 2], B [0, 3, 1]

b) A [1, -3, -1], B [2, 5, 1]

Př.3: Jsou dány body A [1, -1, 3], S[2, 1, 0]. Určete bod B tak, aby bod S byl střed úsečky AB.

2 Vektor



- **Nenulový vektor** = množina všech orientovaných úseček, které mají **stejnou velikost** a **stejný směr**.
- **Nulový vektor** = množina všech **nulových** orientovaných úseček.

Souřadnice vektoru

V rovině:

- je-li vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ určen orientovanou úsečkou **AB**, nazývají se čísla u_1, u_2 souřadnice vektoru \mathbf{u} a platí pro ně tyto vztahy:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1 \\ u_2 &= b_2 - a_2 \end{aligned}$$

V prostoru:

- je-li vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ určen orientovanou úsečkou **AB**, nazývají se čísla u_1, u_2, u_3 souřadnice vektoru \mathbf{u} a platí pro ně tyto vztahy:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1 \\ u_2 &= b_2 - a_2 \\ u_3 &= b_3 - a_3 \end{aligned}$$

Úlohy

Př.1: Jsou dány body A, B. Určete vektor $\mathbf{u} = B - A$, je-li

a) A [1, 3], B [-1, 2]

b) A [-1, -1, -3], B [-2, -4, 1]

Př.2: V prostoru je dán bod B [1, 3, 3] a vektor $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$.
Určete bod A tak, aby platilo $\mathbf{u} = B - A$.

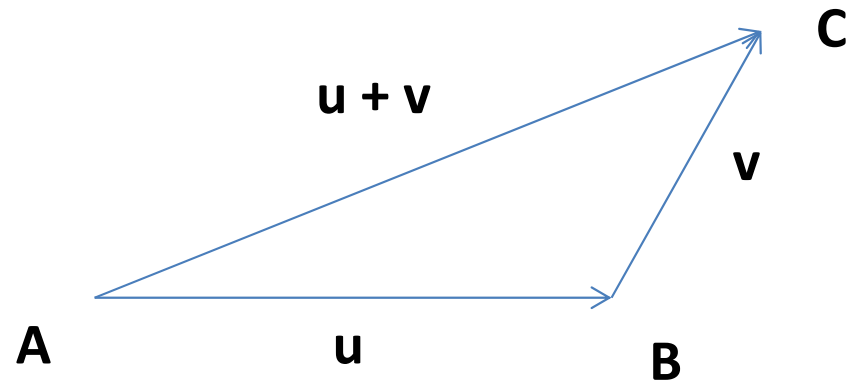
3 Sčítání vektorů

Součet vektorů $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$$

→ je vektor $\mathbf{C} - \mathbf{A}$.

Zapisujeme: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$



V rovině:

➤ $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

➤ Pro každé dva vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} platí:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

V prostoru:

➤ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

➤ Pro každé tři vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} platí:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

Př.1: Vypočítejte součty a rozdíly vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} , je-li

a) $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 1)$

b) $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$

4 Násobení vektoru číslem

V rovině:

- Pro každý vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ v rovině a každé číslo k platí:

$$k\mathbf{u} = (ku_1; ku_2)$$

V prostoru:

- Pro každý vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ v prostoru a každé číslo k platí:

$$k\mathbf{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$$

Dále pro každé dva vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} a každá čísla k, l platí:

$$0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$$

Nulový vektor

$$(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$$

Opačný vektor

$$k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$$

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

$$(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

Úlohy

Př.1: Vypočítejte souřadnice vektoru $\mathbf{u} = 2(3, -1, 1) + 2(1, 2, 5)$.

Př.2: Vypočítejte souřadnice vektoru $\mathbf{w} = 5\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$, je-li

a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$

b) $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$

5 Lineární kombinace vektorů

- Vektor $au + bv + cw$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, se nazývá **lineární kombinace** vektorů u, v, w .
- Samozřejmě můžeme vytvořit lineární kombinaci i dvou, čtyř, pěti atd. vektorů.
- Lineární kombinace jednoho vektoru je jeho násobek.

Př.2: Zjistěte, zda vektor \mathbf{w} je lineární kombinací vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} :

a) $\mathbf{w} = (-2, 4, -6)$, $\mathbf{u} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$

b) $\mathbf{w} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u} = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 3)$

6 Velikost vektoru

- **Velikost vektoru u** je velikost kterékoliv orientované úsečky **AB** určující vektor u
- **Velikost vektoru u** označujeme symbolem $|u|$.

V rovině:

Pro každý vektor $u = (u_1, u_2)$ platí:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

V prostoru:

Pro každý vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ platí:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Dále platí:

- Jestliže $|u| = 1$, nazývá se vektor u **jednotkový vektor**
- $u = \mathbf{o} \Leftrightarrow |u| = 0$

Úlohy

Př.1: Vypočítejte velikost vektoru $\mathbf{u} = (4, -3)$.

Př.2: Vypočítej velikost vektoru \mathbf{AB} , je-li A $[-1, 3, -2]$, B $[0, 5, -3]$.

7 Skalární součin vektorů

- Velikost vektoru u je velikost kterékoliv orientované úsečky AB určující vektor u
- Velikost vektoru u označujeme symbolem $|u|$.

V rovině:

Skalární součin dvou vektorů
 $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ je číslo:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2$$

V prostoru:

Skalární součin dvou vektorů
 $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ je číslo:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Dále platí:

$$u \cdot u = u^2 = u_1^2 + u_2^2$$

$$u \cdot u = u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

- Pro každé vektory u, v, w (v rovině nebo v prostoru) a každé $c \in \mathbf{R}$ platí:

$$uv = vu$$

$$(cu)v = c(uv)$$

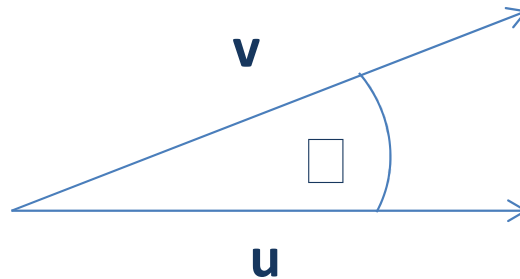
$$w(u+v) = wu + wv$$

Př.1: Vypočítejte skalární součin vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} , pro které platí:

a) $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 1)$

b) $\mathbf{u} = (3, -2, -4)$, $\mathbf{v} = (-1, 3, -2)$

8 Úhel dvou vektorů



Pro **velikost úhlu** vektorů u, v platí následující vztahy:

V rovině:

$$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$$

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

V prostoru:

$$u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) :$$

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$



$$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$$

Př.1: Vypočítejte úhel dvou vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} , pro které platí:

a) $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 1)$

b) $\mathbf{u} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-2, 4, 2)$

Př.2: Je dán vektor \mathbf{v} . Určete vektor \mathbf{u} tak, aby platilo $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$

a) $\mathbf{v} = (1, 3)$

b) $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$

8 Vektorový součin

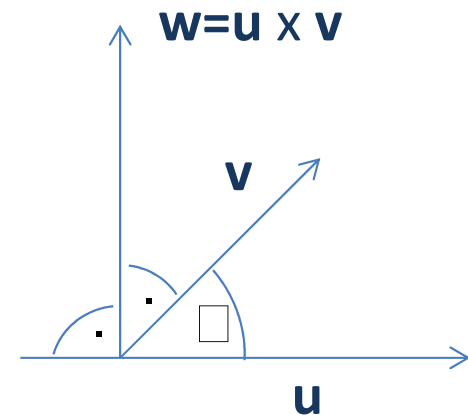
-> provádíme, pokud chceme ke dvěma vektorům \mathbf{u} , \mathbf{v} , které neleží na jedné přímce, najít vektor kolmý k oběma vektorům.

➤ Jestliže $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, pak vektor k oběma vektorům kolmý je vektor

$$\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$$

➤ Pro velikost vektoru \mathbf{w} platí:

$$w = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha$$



Pozn.: Mnemotechnická pomůcka pro výpočet vektorového součinu:

$$\begin{array}{cc} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{array} \rightarrow u_2v_3 - u_3v_2$$

$$\begin{array}{cc} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{array} \rightarrow u_3v_1 - u_1v_3$$

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \rightarrow u_1v_2 - u_2v_1$$

Př.1: Vypočítejte souřadnice vektorového součinu $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, je-li:

a) $\mathbf{u} = (2, -2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$

b) $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, -2)$

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Kočandrlle, M. Boček, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Praha: Prometheus, 1995.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.