STATIKA A KINEMATIKA

STROJE A ZAŘÍZENÍ – ČÁSTI A MECHANISMY STROJŮ

ÚVOD

Základní pojmy z Fyziky – hmotnost, síla, hmotný bod apod.

Ve statice (a dynamice) se uplatňují ještě další tvrzení:

- síla je vektor;

- pro součet dvou sil platí zákon rovnoběžníka;

- platí Newtonův zákon setrvačnosti (pokud je výslednice sil působících na hmotný bod = 0, hmotný bod zůstává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu);

- platí zákon akce a reakce;

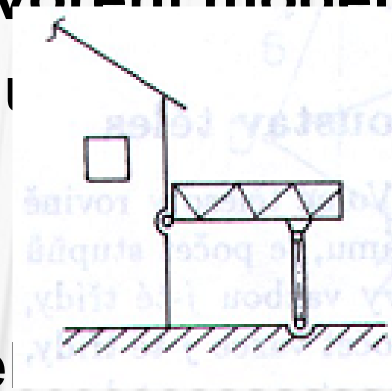
- účinek síly se nemění, pokud tuto sílu posunujeme po nositelce.

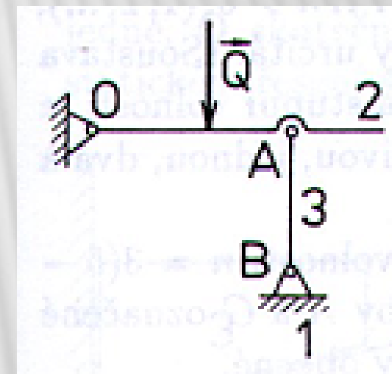
Úlohy ve statice lze řešit graficky, analyticky nebo

STATIKA

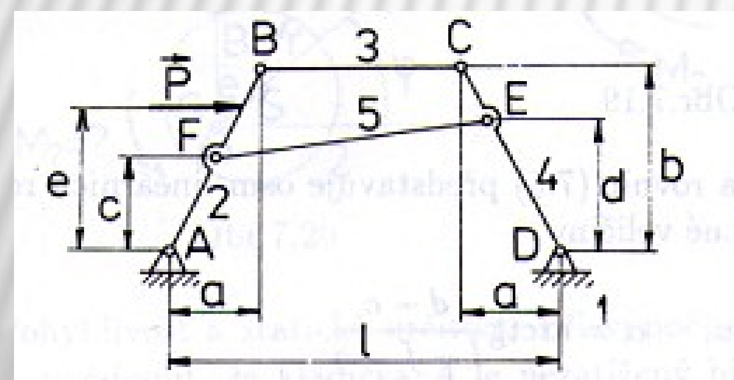
K řešení reálných systémů se využívá modelování. Modelování vede k vytvoření modelu:

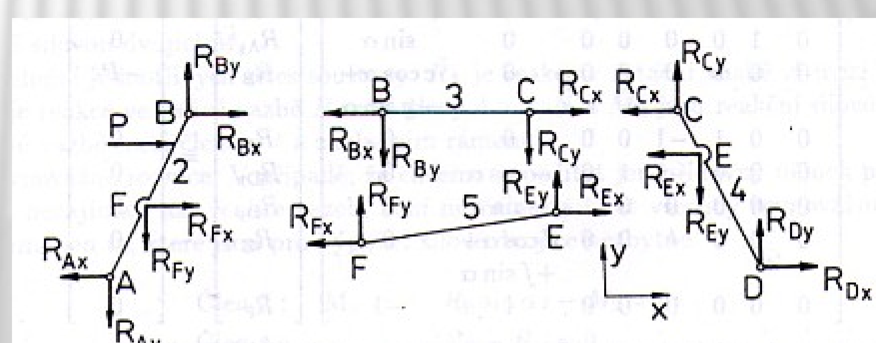
- mechanického model



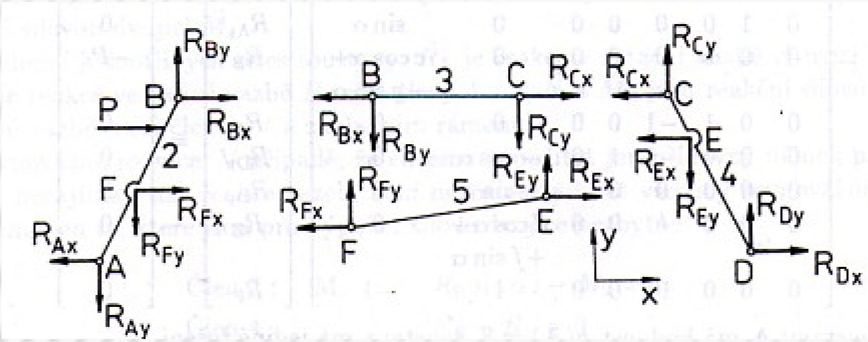


- matematického model





MATEMATICKÝ MODEL



Rovnice rovnováhy:

$$
\begin{aligned}
\text{Člen } 2: \quad & x: && R_B + R_F\cos\alpha - R_{Ax} + P = 0 \\
& y: && R_{Ay} + R_F\sin\alpha = 0 \\
& M_A: && R_B b + Pe + R_F c\cos\alpha - R_F g\sin\alpha = 0 \\
\text{Člen } 3: \quad & && R_B - R_C = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Člen } 4: \quad & x: && -R_C - R_E\cos\alpha + R_{Dx} = 0 \\
& y: && -R_E\sin\alpha + R_{Dy} = 0 \\
& M_D: && R_C b + R_E d\cos\alpha + R_E f\sin\alpha = 0 \\
\text{Člen } 5: \quad & && R_E - R_F = 0
\end{aligned}
$$

Maticový přepis:

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha \\
0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c\cos\alpha + \\
 & & & & & & & -g\sin\alpha \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\cos\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sin\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & d\cos\alpha + & 0 \\
 & & & & & & +f\sin\alpha & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_B \\ \\ R_C \\ R_{Dx} \\ R_{Dy} \\ R_E \\ \\ R_F
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-P \\ 0 \\ -Pe \\ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ 0
\end{bmatrix}
$$

SÍLA

Síly ve statice se dělí na:

- Vnější (jejich původ je mimo zkoumanou soustavu těles).

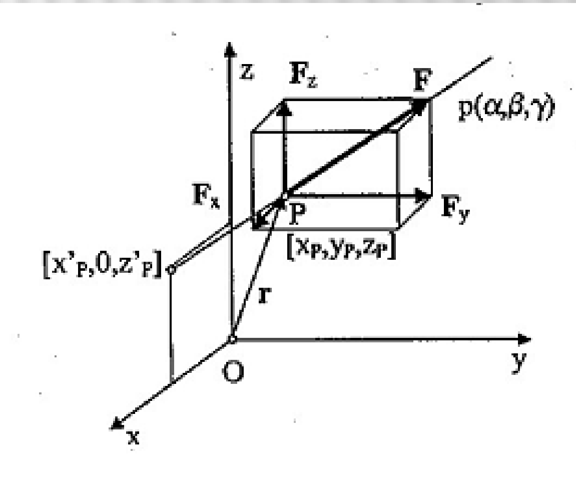
- Vnitřní (ty které působí mezi jednotlivými tělesy).

Více silových účinků tvoří silovou soustavu.

Platí ekvivalence silových soustav tj.:

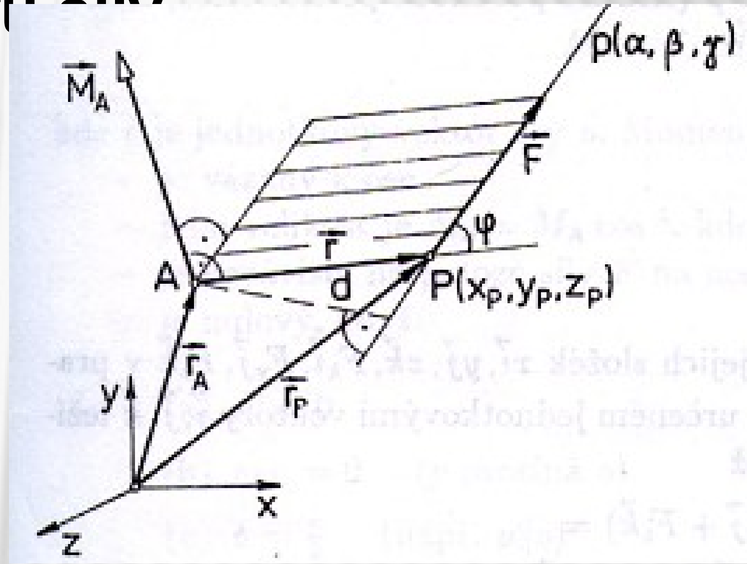
- zjednodušování (dvě síly v jedné výslednicí);

- rozklad (sílu nahradíme jejími složkami



MOMENT SÍLY

Moment síly **F** je definován jako vektorový součin polohového vektoru **r**, kteréhokoliv bodu nositelky síly vzhledem k bodu **A** a vektoru síly.



$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$$

Moment síly je vektor a má následující vlastnosti:

- je vázaný k bodu **A** a kolmý k rovině vektorů **r**, **F**;

MOMENT SÍLY

− jeho orientace je určena požadavkem, aby vektory – r, F, M_A tvořily pravotočivou soustavu;

- moment síly je nezávislý na poloze síly F na nositelce p;
- Moment síly je nulový, poku

(a) $F = 0$

(b) $r = 0$

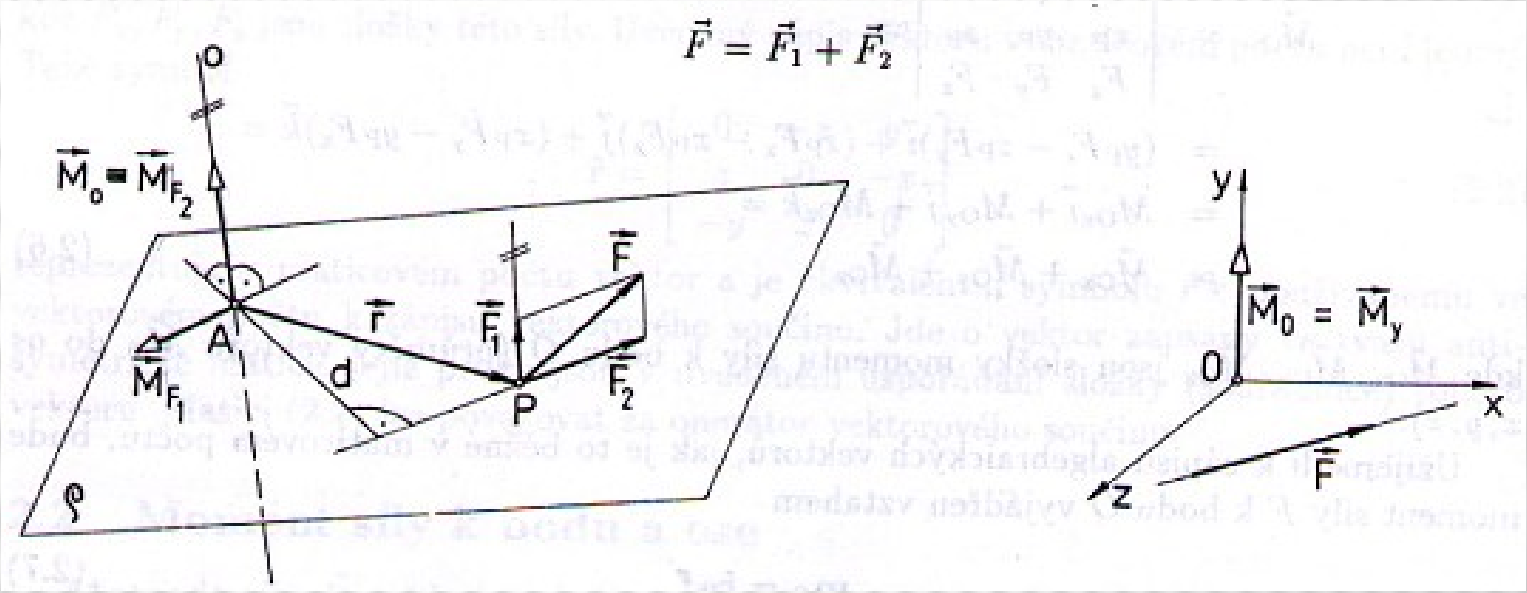
(c) $\varphi = 0$ $(\vec{r}, \vec{F}$ jsou kolineární$)$

Varignonova věta:

Moment síly k nějakému bodu je součtem momentů jejich složek k témuž bodu.

MOMENT SÍLY

Moment síly k ose – graficky.



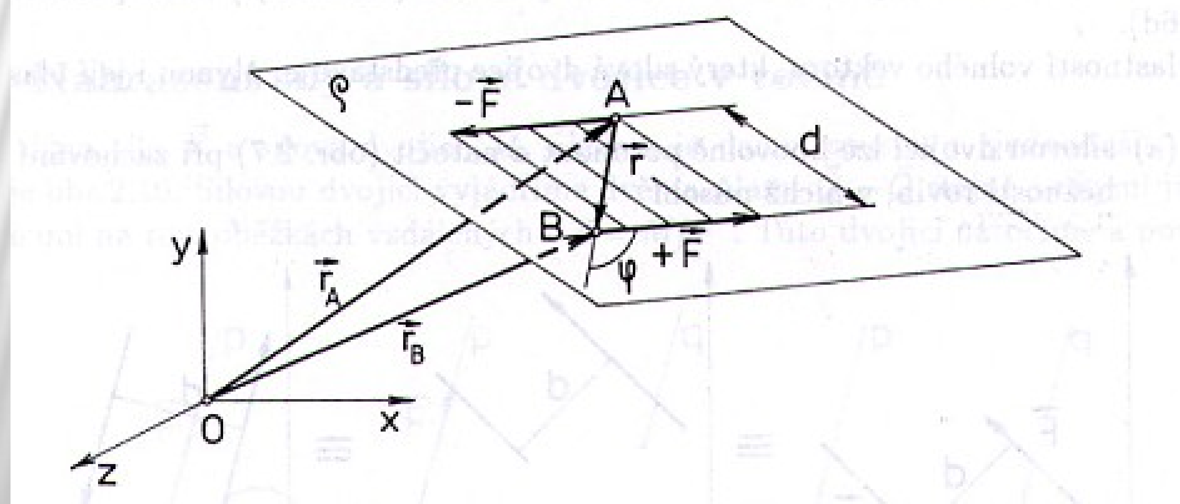
SILOVÁ DVOJICE

Silová dvojice je silový útvar tvořený dvěma silami stejné velikosti a směru, ale opačně orientovanými a neležící na stejné nositelce.

V praxi se vyskytuje u točivého magnetického pole, vrtule letadla, vrtáku vnikajícího do materiálu.

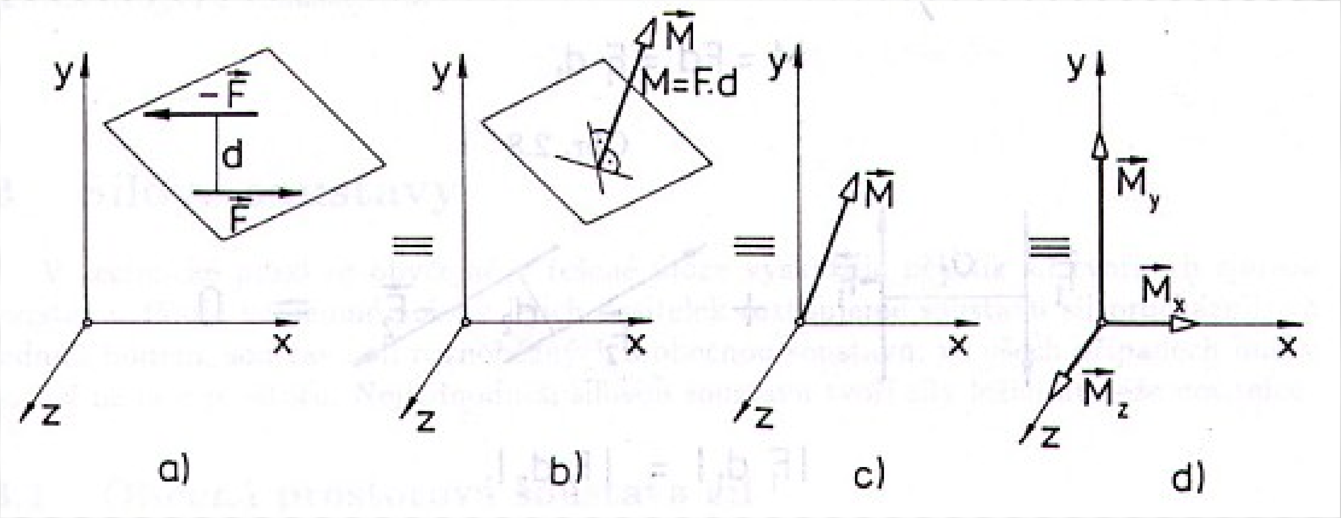
Vyjadřuje se momentem:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$



SILOVÁ DVOJICE

Moment silové dvojice:

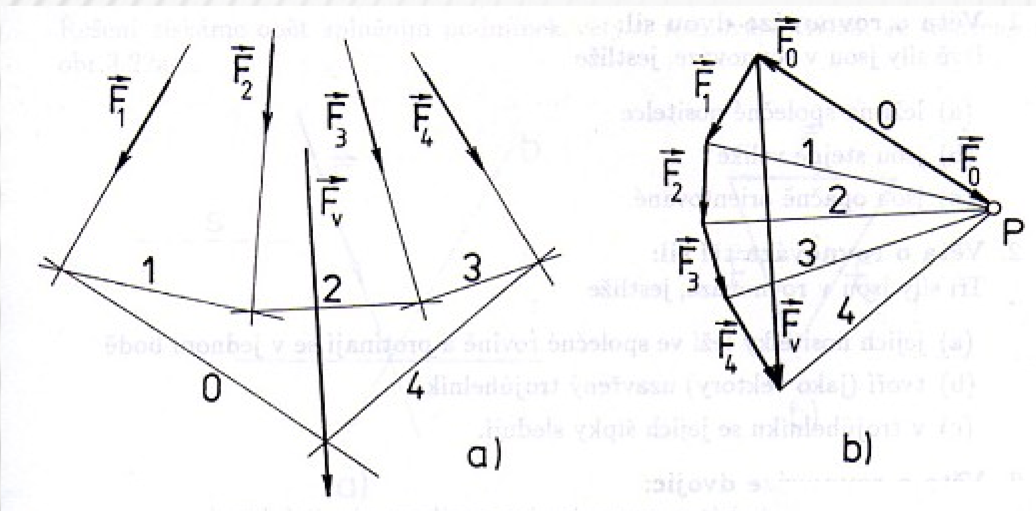


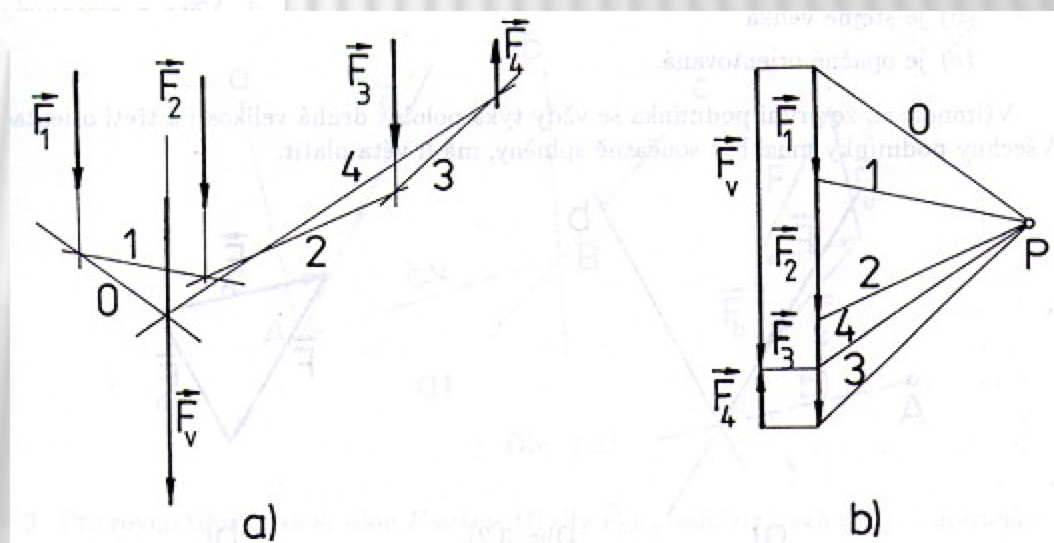
Jeho velikost se vypočte:

$$M = F r \sin\varphi = F d$$

ROVINNÉ SOUSTAVY SIL

Grafické řešení (nalezení výslednice sil):



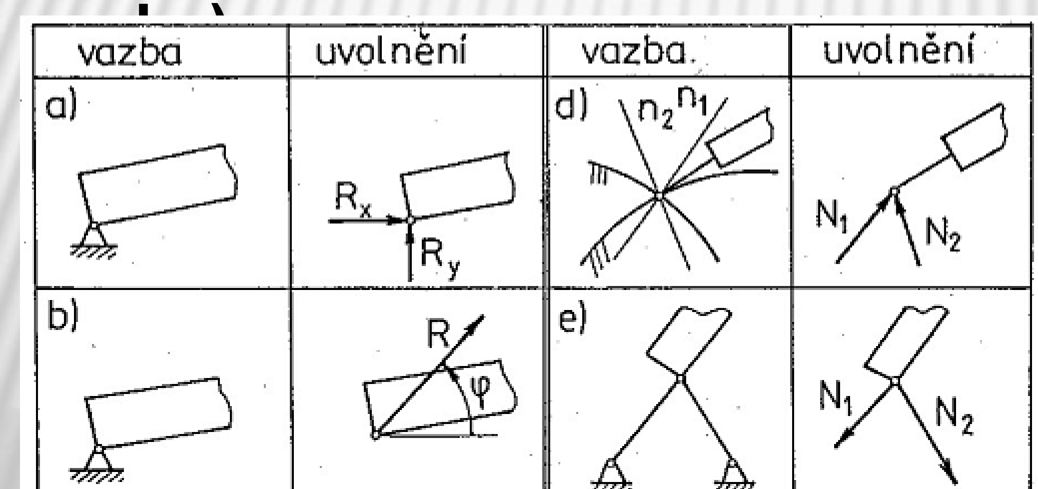


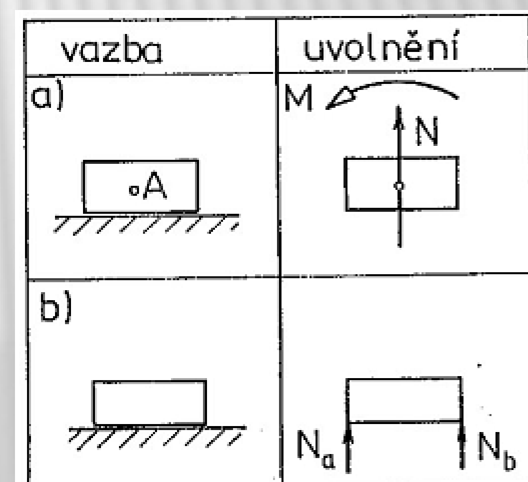
ULOŽENÍ

V technické praxi se málokdy vyskytuje volný bod, většinou je volnost bodu omezena tzv. vazbami.

Pohyblivost se charakterizuje stupněm volnosti i (v prostoru s 3 nezávislými souřadnicemi je i=3).

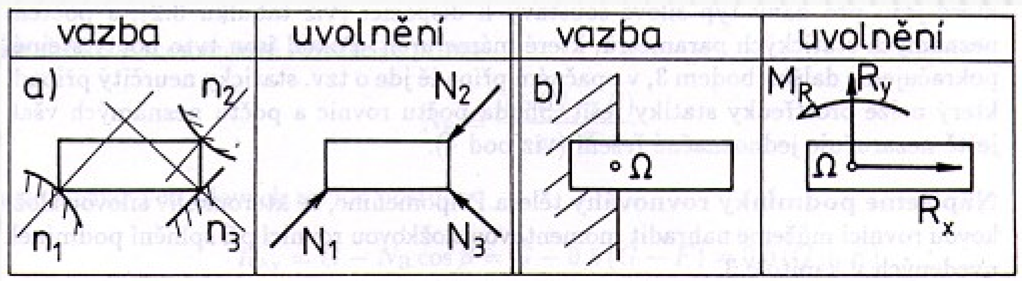
Příklad vazby a její uvolnění (rotační nebo posuvná vazba)





ULOŽENÍ, METODA UVOLŇOVÁNÍ

Pevná vazba:



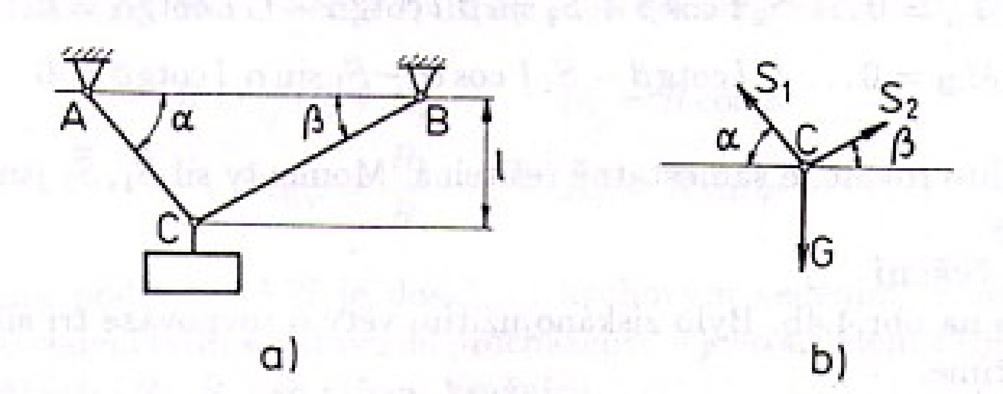
Metoda uvolňování, postup:

1) **Zvolí se bod, který se bude uvolňovat.**
2) **Tento bod se nakreslí jako izolovaný volný.**
3) **Akční síly se překreslí jako vektory s působištěm v daném bodě.**
4) **Stejným způsobem se rozkreslí reakční síly.**

METODA UVOLŇOVÁNÍ

Uvolňování lze chápat jako proces, kterým se mechanický model transformuje na silovou soustavu.

Př. Uvolnění tělesa zavěšeného na laně.



Pokud jde o analytické řešení, rovnováha soustavy se vyjádří rovnovážnými rovnicemi.

Rovnovážné rovnice budou řešitelné pokud budou nezávislé a budou-li obsahovat stejný počet neznámých jako bude rovnic.

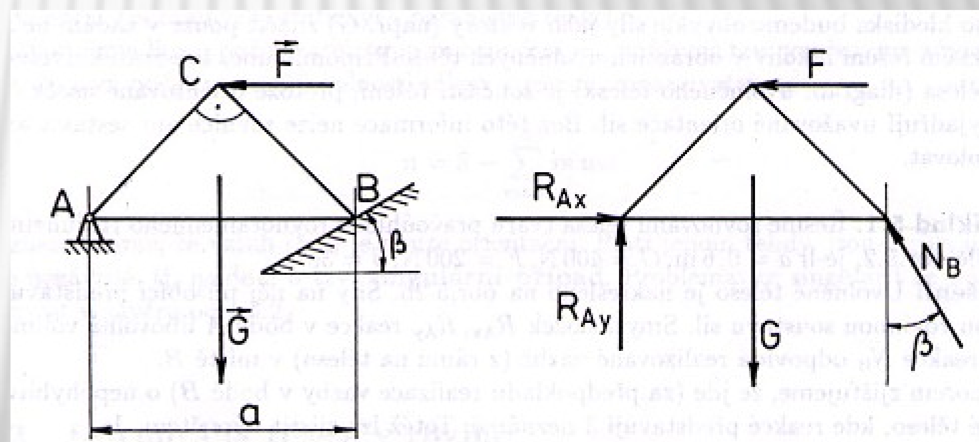
ROVNICE ROVNOVÁHY

Pokud jde o obecnou rovinnou rovnováhu sil, jsou podmínky rovnováhy 3:

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0$$



Obr. trojuhelníkového prutového mechanismu

ROVNICE ROVNOVÁHY

Př. Rovnováhy na trojúhelníkovém tělese (viz. předchozí obr.):

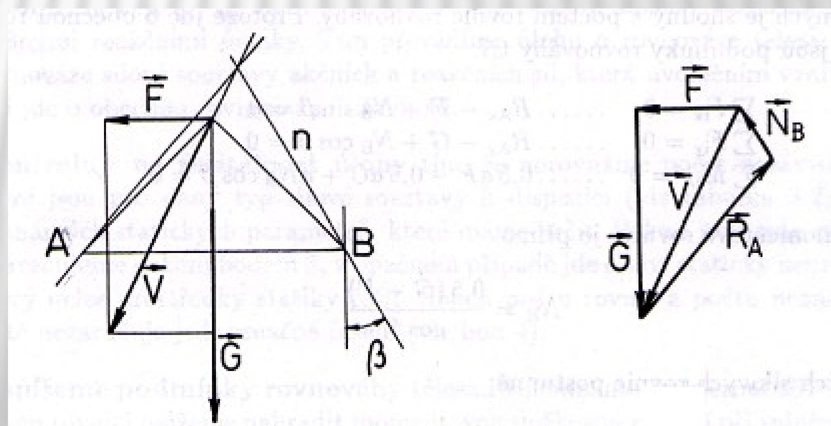
Analytické řešení:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \ldots\ldots R_{Ax} - F - N_B \sin\beta = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0 \quad \ldots\ldots R_{Ay} - G + N_B \cos\beta = 0$$
$$\sum M_{iA} = 0 \quad \ldots\ldots 0{,}5\,aF - 0{,}5\,aG + aN_B \cos\beta = 0$$

$$N_B = \frac{0{,}5\,(G - F)}{\cos\beta}$$

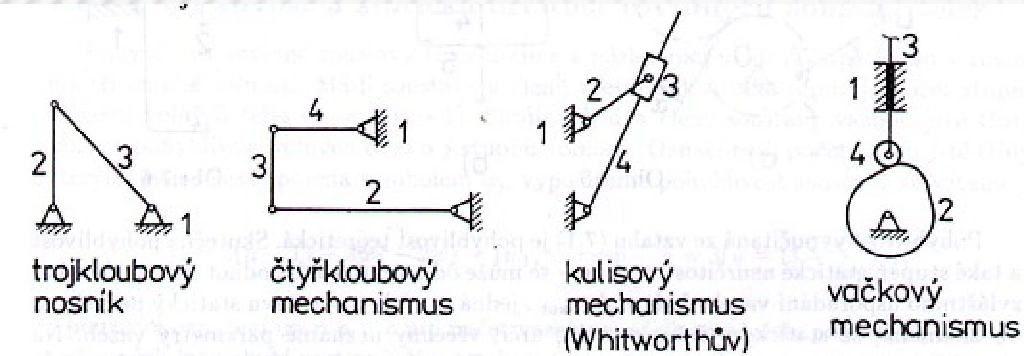
$$R_{Ay} = G - N_B \cos\beta = G - 0{,}5\,(G - F) = 0{,}5\,(G + F)$$
$$R_{Ax} = F + N_B \sin\beta = F + 0{,}5\,(G - F)\,\mathrm{tg}\beta$$

Grafické řešení:

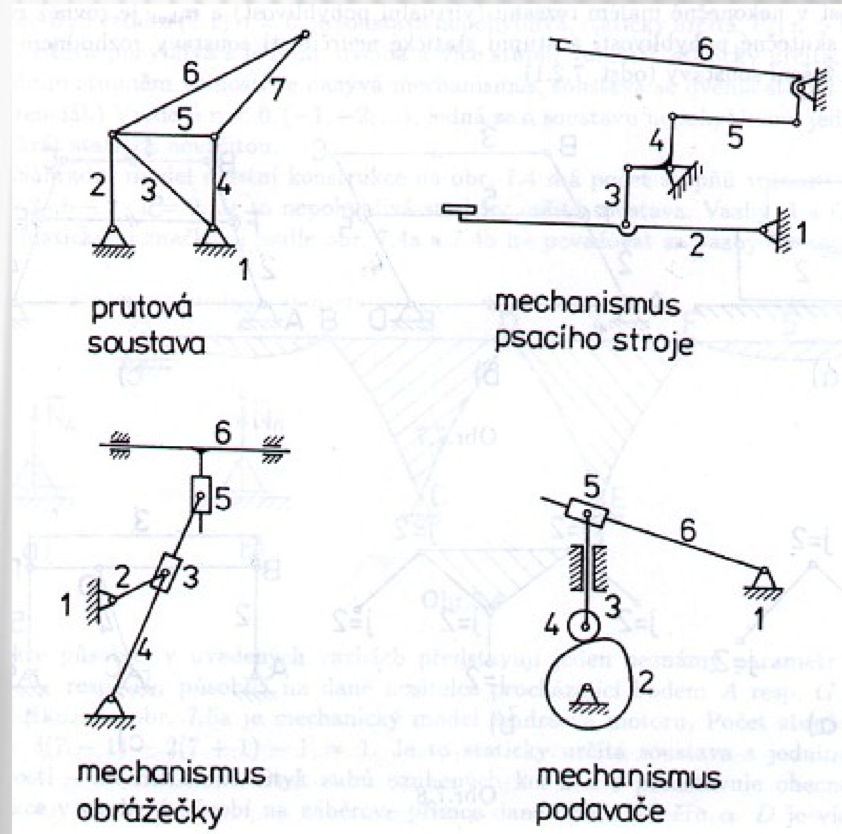


SOUSTAVY TĚLES

Soustava těles je seskupení nejméně tří členů (včetně rámu) spojených vazbami.

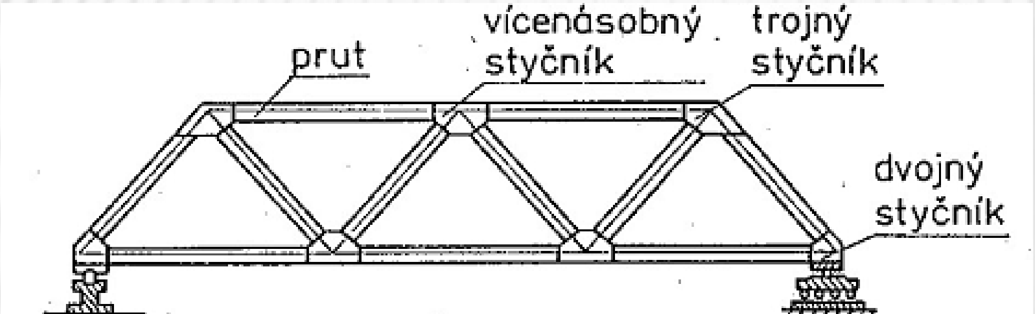


Složitější mechanismy

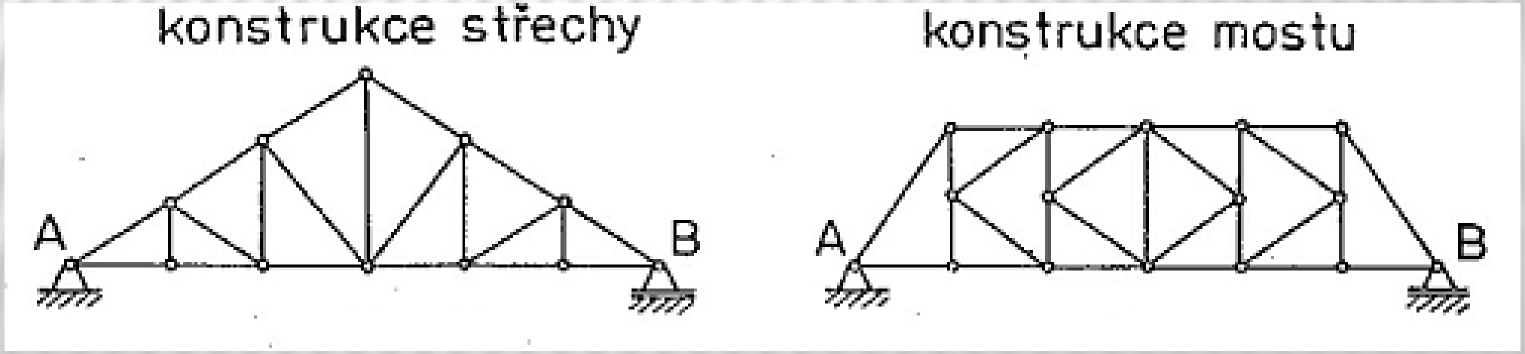


PRUTOVÉ SOUSTAVY

Prutové soustavy – jsou soustavy těles umožňující konstrukci rozměrných útvarů: jeřábů mostů, střešních konstrukcí apod.



Obr. 5.1

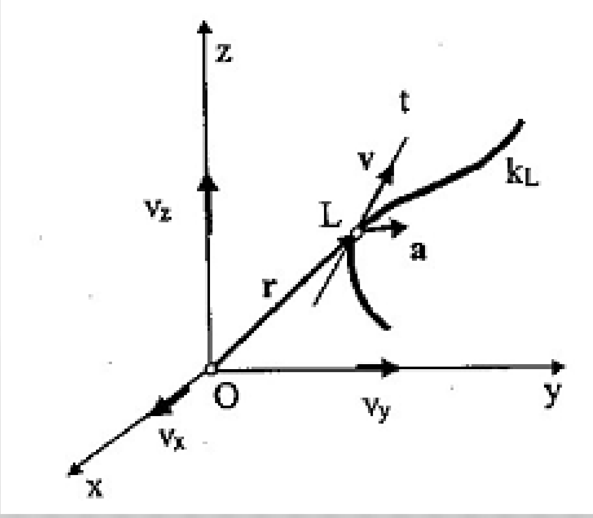


KINEMATIKA

Se zabývá zkoumáním jednoduchých objektů (hmotného bodu), těles i mechanismů z hlediska pohybu těchto ideálních objektů.

Pohyb hmotného bodu definujeme v kartézském souřadném systému (pravotočivý souřadný systém).

Hmotný bod L se pohybuje po trajekto
jeho poloha je určena polohovým
vektorem r.



POHYB HMOTNÉHO BODU

Pohyb hmotného bodu může být obecně translační nebo rotační (případně kombinace obou).

Rychlost bodu L jako časová derivace průvodiče podle času:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}$$

V kartézském souřadnicovém systému rychlost určíme

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Z… á derivace rychlosti podle

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$

DRUHY POHYBU HMOTNÉHO BODU

Přímočarý pohyb je určité zjednodušení vůči pohybu křivočarému.

Pohyb rovnoměrný se dělí na:

- rovnoměrný s nulovým zrychlením;

- nerovnoměrný s nenulovým zrychlením.

Nerovnoměrný pohyb se dělí na zrychlený a zpožděný

$$s = s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2, \quad v = v(0) + at, \quad v = \sqrt{v(0)^2 + 2a(s - s(0))}$$

Kde s(0), v(0) jsou výchozí poloha a výchozí rychlost v čase t=0 s konstatntním zrychlením a.

DRUHY POHYBU HMOTNÉHO BODU

Zvláštním druhem pohybu je pohyb harmonický, který popisuje velké množství opakujících se (periodických) pohybu v technice. Nejčastěji v případě kmitání strojů, kývání kyvadel nebo oscilace v elektrotechnice.

Nejjednodušší harmonický pohyb je přímočarý, kde výchylka s se vypočte jako:

$$s = r \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Kde r je amplituda, ω je úhlová frekvence, φ_0 počáteční fáze.

Perioda pohybu T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

DRUHY POHYBU HMOTNÉHO BODU

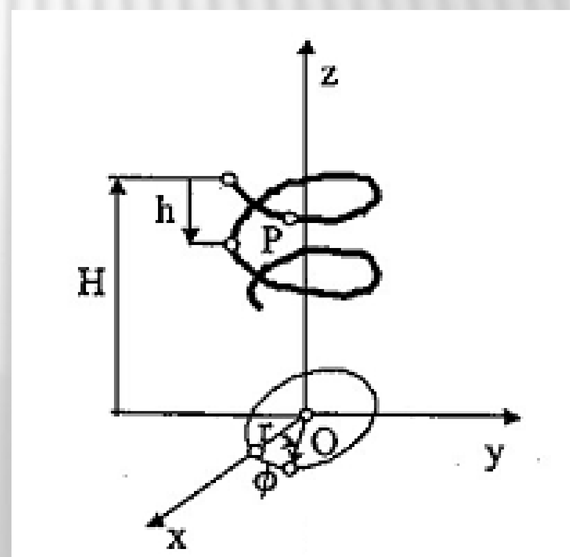
Frekvence pohybu f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Derivováním vztahu pro dráhu (výchylku) dostaneme rychlost a zrychlení harmonického pohybu hmotného bodu

$$v = r\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$a = -r\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

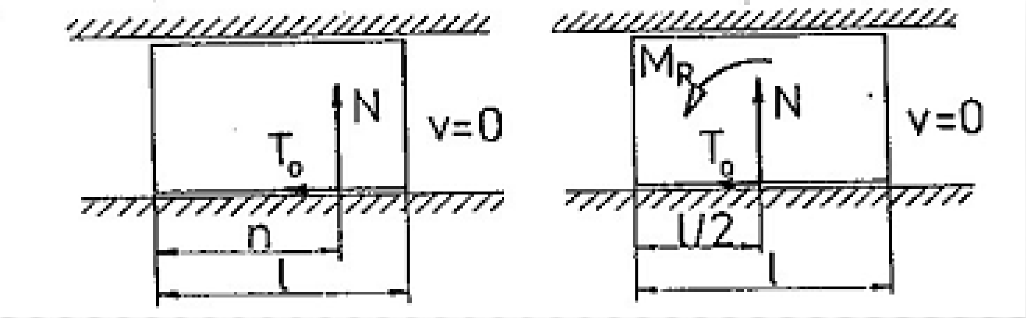
Př. harmonického pohybu hmotného bodu po spirále.



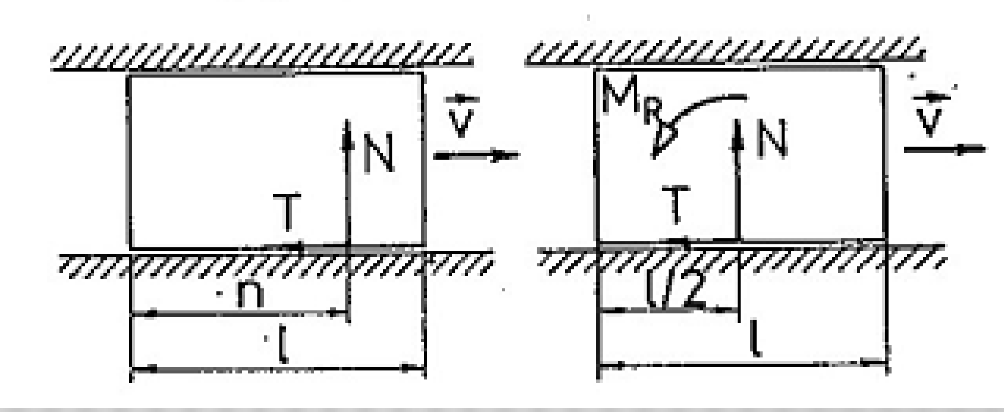
TĚLESA A JEJICH POHYB

Těleso s posuvnou vazbou:

Ve statice v=0.



V kinematice v=nenulové.



TĚLESA S REÁLNÝMI VAZBAMI

Postup řešení metodou uvolňování:

1) Formulace zadání a návrh mechanického modelu.

2) Určení pohyblivosti a statické určitosti.

3) Kinematický rozbor - určení rychlosti ve vazbách.

4) Uvolnění jednotlivých částí soustavy.

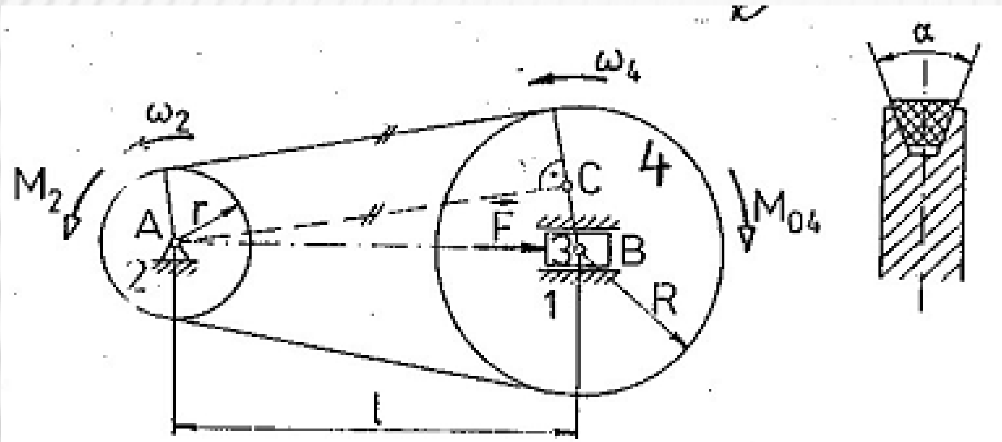
5) Sestavení rovnovážných rovnic.

6) Řešení rovnovážných rovnic.

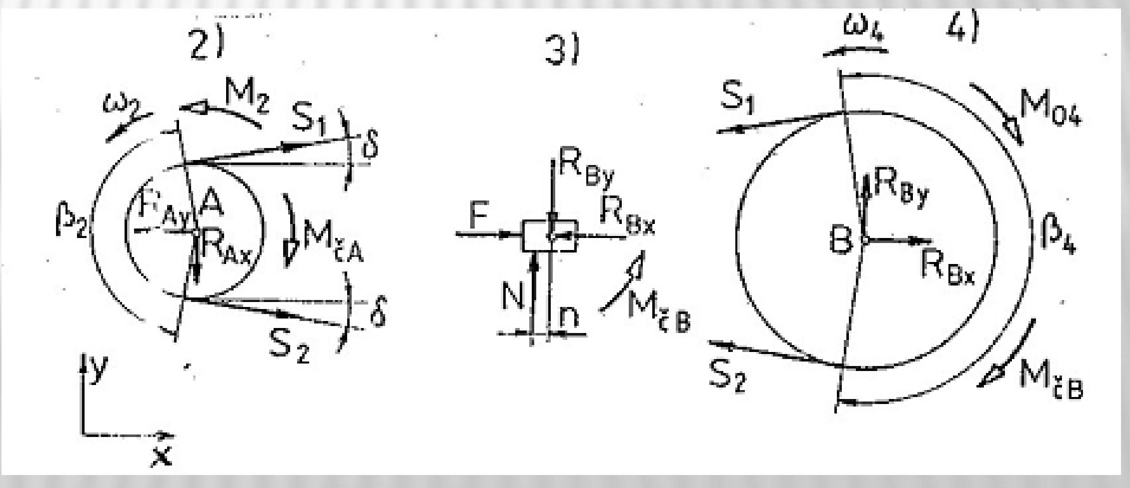
7) Diskuse výsledků.

TĚLESA S REÁLNÝMI VAZBAMI

Př. Řemenového převodu



Uvolnění prvků:



ZÁVĚR

Literatura:

[1] Stejskal, V. a kol. *Mechanika 1.* ČVUT, 1998, 163 s.

[2] Mechanika - skripta. 2003,

[3] Hosnedl, S., Krátký, J. *Příručka strojního inženýra 1*, Computer press, 1999, 313 s.