

Typy úloh k písemné části zkoušky

Zkoušející: doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

- Jsou dány množiny $M = \{2, 3, 4\}$ a $N = \{a, b, c, d\}$.
 - Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N , která není zobrazením.
 - Definujte relaci Z , která je zobrazením z množiny N do M a určete přesně jeho typ.
 - Zapište výčtem prvků relaci $R \circ Z$ a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
 - Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M .
 - Na množině N definujte dvě různé permutace P_1, P_2 a určete permutace $P_1 \circ P_2$ a $P_2 \circ P_1$.

- Je dána množina $M = \{1, 2, 3\}$. V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:

$$R = \{x, y \in M, M, x \neq y \rightarrow x < y\}, T = \{x, y \in M, M, x \neq y \wedge y = x\},$$

$$U = \{x, y \in M, M, x < y \wedge y = x\}, V = \{1, 2, 3\}.$$
 - Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení v množině M . Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině M ?
 - Zapište relace $R^{-1}, V^{-1}, V^2, U \circ V, R \circ U, R \circ (V \circ U)$. Je některá z těchto relací zobrazením v množině M ? Pokud ano, určete přesně typ.

- Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině $M = \{a, b, c\}$ operace $*$:

*	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

*	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

*	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

- V množině $M = \{a, b, c\}$ definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:
 - $K \wedge EN$
 - $ND \wedge K \wedge EN$
 - $ND \wedge EN \wedge EI$
 - $A \wedge ZR$
 - $K \wedge EN \wedge EI$
 - $EI \wedge ZR$
 - $ND \wedge A \wedge EI \wedge ZR$
 U všech nalezených operací určete i zbývající vlastnosti. Rozhodněte, zda v M existuje agresivní prvek vzhledem k jednotlivým operacím. Stanovte přesně typy algebraických struktur, které množina M spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

- Rozhodněte a zdůvodněte, které vlastnosti má operace \circ v množině \mathbb{N} ($\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$):
 - $x \circ y = 2x + y$
 - $x \circ y = x + y + 1$
 - $x \circ y = 2x + 2y$
 - $x \circ y = 2x - y$
 - $x \circ y = x + y - 2$
 - $x \circ y = x - 2y$
 - $x \circ y = xy + 1$
 - $x \circ y = x + y + xy$
 - $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y)$

6. Rozhodněte, které vlastnosti mají (nemají) operace určující níže uvedené algebraické struktury a přesně určete typ každé z nich (symboly $+$, $-$, \cdot , $:$ označují obvyklé číselné operace):
 $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, -)$, (\mathbb{N}, \cdot) , $(\mathbb{N}, :)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}, -)$,
 (\mathbb{C}, \cdot) , $(\mathbb{C}, :)$, (\mathbb{Q}, \cdot) , $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
 $(P(M), \cup)$, $(P(M), \cap)$, $(P(M), \cup, \cap)$, $(P(M), \cap, \cup)$, kde $P(M)$ je
potenční systém množiny $M = \{a, b\}$.
7. Necht' (G, \circ) je komutativní grupa. Dokažte podrobně, že pro každé prvky $a, b, c \in G$ platí: a) $\overline{a \circ b} = \overline{a} \circ \overline{b}$ b) $\overline{\overline{a}} = a$ c) $c \circ a = c \circ b \implies a = b$.
8. Množina $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ je množina všech přirozených čísel. Určete 2 její podmnožiny, které jsou a) konečné, b) nekonečné.
9. Zvolte si výčtem prvků tři navzájem různé konečné množiny A, B, C tak, že množiny A, B mají společné dva prvky.
a) Rozhodněte a запиšte, zda jsou některé dvě z těchto množin ekvivalentní.
b) Porovnejte kardinální čísla množin A, B, C . Tvrzení zdůvodněte podle definice nerovnosti mezi kardinálními čísly.
c) Určete $|A| + |B|$, $|A| + |C|$, $|B| + |C|$, $|A| \cdot |B|$, $|A| \cdot |C|$.
10. Je dáno číslo 54. Zvolte si další přirozené číslo větší než 65 a menší než 70. Obě čísla запиšte ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) číselné soustavě, použijte obě metody převodu. Dále vypočítejte ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) soustavě jejich součet, součin a rozdíl (proved'te zkoušky správnosti). Všechny výsledky získané ve čtyřkové soustavě převed'te přímo do soustavy dvojkové a šestnáctkové.
11. Vypočítejte a proved'te zkoušky správnosti:
a) $ABA_{12} + BAB_{12}$, b) $1A2E3_{16} - 76B9_{16}$, c) $13721_8 : 5_8$. Výsledky porovnejte.
12. Trojčiferné číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 6. Přesuneme-li ji na místo stovek (a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 387 větší než původní číslo. Určete původní číslo.
13. Čtyřciferné číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet roven 22. Obě krajní číslice jsou stejné, obě vnitřní číslice jsou rovněž stejné. Vyměníme-li krajní číslice s vnitřními, zvětší se číslo o 891. Určete obě čísla.
14. Dokažte, že pro každá dvě celá čísla A, B platí:
a) $-(A + B) = (-A) + (-B)$ b) $(-A) \cdot B = -(A \cdot B)$ c) $(-A) \cdot (-B) = A \cdot B$
(v důkazu využijte této reprezentace: $A = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$, $B = [\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}]$).
15. Pro celá čísla A, B, X platí $A + X = B$. Určete celé číslo $X = [\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]$, jestliže
 $A = [\mathbf{1} \cdot \mathbf{3}]$, $B = [\mathbf{7} \cdot \mathbf{2}]$.

16. Dokažte, že sčítání a násobení celých čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. (Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel.)
17. Dokažte, že rovnice $A \cdot X = B$ nemá v množině všech celých čísel řešení pro $A = [3; 0]$, $B = [0; 4]$.
18. Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel zapište dvě kladná celá čísla a dvě záporná celá čísla.
19. Zapište tři uspořádané dvojice přirozených čísel, která reprezentují
a) celé číslo 0 (nula) b) celé číslo 1 (jedna)
20. Jsou dána celá čísla $A = [1; 3]$, $B = [4; 5]$.
a) Vypočítejte $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$. b) Porovnejte čísla A, B.
Vyřešte úlohu pro několik dalších dvojic celých čísel.
21. Dokažte, že pro každá tři celá čísla A, B, C platí: $(A < B \wedge C < 0) \Rightarrow A \cdot C > B \cdot C$.
Dokažte alespoň jednu další vlastnost relace „<“ v úloze 16 na s. 199 v učebnici.
22. Vypočtete: $a + |b| \cdot |a| - \dots + \dots \cdot b - \dots^2 + \dots$ pro $a = -6$, $b = 3$.
23. Dokažte, že pro každé celé číslo a platí $|a| = \dots$.
24. Dokažte, že sčítání a násobení racionálních čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. (Pomocí tříd zlomků.)
25. Zvolte si dvě záporná a jedno kladné celé číslo. Tato tři čísla dělte postupně číslem 7 a číslem (-5). Ve všech šesti případech určete neúplný podíl a zbytek.
26. Zapište čtyři zlomky, které reprezentují totéž kladné racionální číslo. Dále zapište čtyři zlomky, které reprezentují jedno záporné racionální číslo. U obou čísel určete jejich desetinný rozvoj. Rozhodněte, zda jsou zvolená čísla čísla desetinnými.
27. Zapište zlomek, který reprezentuje racionální číslo
a) 3,56 b) 1,4 c) 0,27 d) 0,19

Součástí písemné části zkoušky jsou definice pojmů studovaných v předmětech:

Základy algebry a aritmetiky a Aritmetika 1

