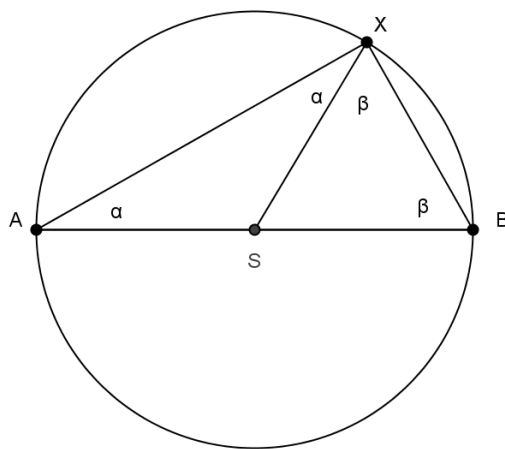


## Thaletova kružnice

**Thaletova věta:** Množina  $M$  vrcholů všech pravých úhlů v rovině, jejichž ramena procházejí dvěma danými různými body  $A, B$ , je kružnice s průměrem  $AB$  s výjimkou bodů  $A, B$ .

**Důkaz :**

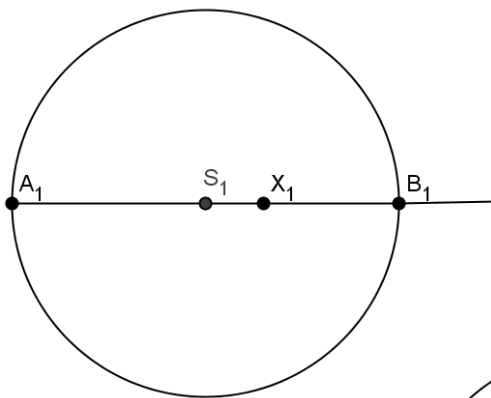


Obr. 1

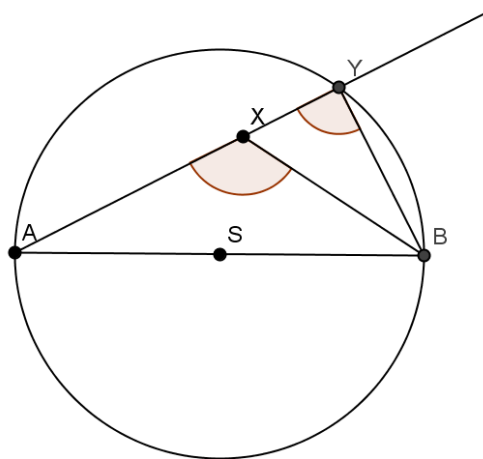
- a) Dokážeme, že platí : **Jestliže bod  $X$  patří množině  $M$ , pak je úhel  $AXB$  pravý.**  
Zvolme kružnici  $k$  se středem  $S$ , její průměr  $AB$  a bod  $X$  kružnice  $k$ ,  $X \neq A$ ,  $X \neq B$  (viz obr.1). Trojúhelník  $ASX$  je rovnoramenný, velikosti jeho vnitřních úhlů při základně jsou shodné. Velikost každého z nich označme  $\alpha$ . Trojúhelník  $BSX$  je rovněž rovnoramenný a velikost jeho úhlu při základně označme  $\beta$ . Vyjádříme-li součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku  $AXB$ , dostáváme vztah:  
$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^{\circ}$$
Úpravou dostáváme  
$$2\alpha + 2\beta = 180^{\circ}, \text{ tj. } \alpha + \beta = 90^{\circ},$$
 což je velikost konvexního úhlu  $AXB$ , a tedy konvexní úhel  $AXB$  je pravý – což jsme měli dokázat.
- b) Dokážeme, že platí: **Jestliže je úhel  $AXB$  pravý, pak bod  $X$  patří množině  $M$ , tj. leží na kružnici  $k$  s průměrem  $AB$ ,  $X \neq A$ ,  $X \neq B$ .** Použijeme nepřímý důkaz, tj. dokážeme větu

obměněnou: *Neleží-li bod  $X$  na kružnici  $k$  s průměrem  $AB$ , pak konvexní úhel  $AXB$  není pravý.*

- *Nechť bod  $X$  patří vnitřní oblasti kružnice  $k$ . Jestliže bod  $X$  leží mezi body  $A, B$ , pak úhel  $AXB$  je přímý úhel a nikoliv pravý (obr.2). Neleží-li bod  $X$  mezi body  $A, B$ , sestrojme bod  $Y$ , který je průsečíkem kružnice  $k$  s přímkou  $AX$  (obr.3). Konvexní úhel  $AXB$  je vnější úhel trojúhelníku  $XYB$  a je tedy větší než konvexní úhel  $XYB$ , tj. než konvexní úhel  $AYB$ . Konvexní úhel  $AYB$  je však vzhledem k části a) důkazu pravý. Konvexní úhel  $AXB$  je tedy větší než pravý úhel.*



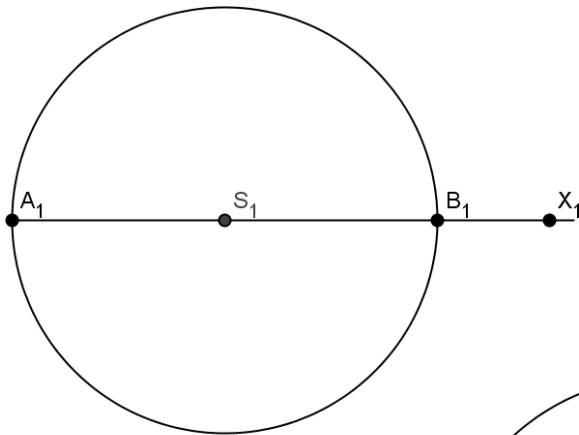
Obr.2



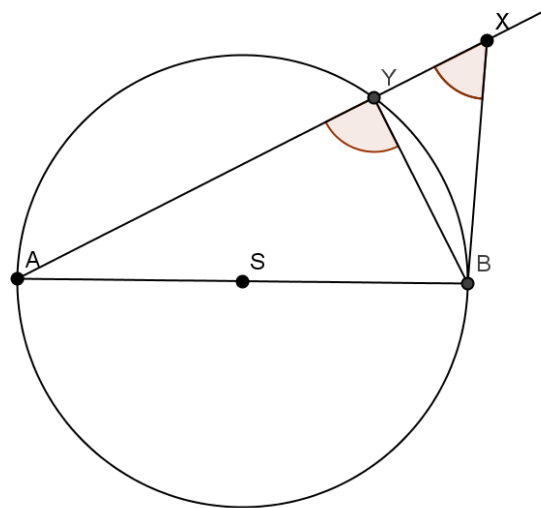
Obr.3

- *Nechť bod  $X$  patří vnější oblasti kružnice  $k$ . Jestliže bod  $X$  leží na přímce  $AB$ , pak úhel  $AXB$  zřejmě není pravý (obr.4). Neleží-li bod  $X$  na přímce  $AB$ , sestrojme bod  $Y$ , který je průsečíkem kružnice  $k$  s přímkou  $AX$  (obr.5). Konvexní úhel  $AYB$  je vzhledem k části a) důkazu pravý. Tento úhel je vnějším úhlem trojúhelníku  $XYB$  a konvexní úhel  $YXB$ ,*

tj. konvexní úhel  $AXB$ , je tedy menší než pravý úhel  $AYB$ .



Obr. 4



Obr. 5

Z výše uvedeného plyne, že platí: *Neleží-li bod  $X$  na kružnici  $k$  s průměrem  $AB$ , pak konvexní úhel  $AXB$  není pravý. Platí tedy : **Jestliže je úhel  $AXB$  pravý, pak bod  $X$  patří množině  $M$ , tj. leží na kružnici  $k$  s průměrem  $AB$ ,  $X \neq A$ ,  $X \neq B$  – což jsme měli dokázat.***

**Závěr:** Množinou  $M$  vrcholů všech pravých úhlů v rovině, jejichž ramena procházejí dvěma danými různými body  $A, B$ , je kružnice s průměrem  $AB$  s výjimkou bodů  $A, B$ . Tuto množinu nazýváme **Thaletovou kružnicí**.