

## Induktivní a deduktivní metody v matematice

Růžena Blažková

Slovník školské matematiky uvádí:

Indukce (str. 67) – přechod od výroků o několika předmětech daného druhu k výroku o všech předmětech tohoto druhu. Taková indukce se považuje a úplnou, jestliže východiskem úvahy byly výroky o všech jednotlivých předmětech uvažovaného druhu. V ostatních případech hovoříme o neúplné indukci. Ta vede jen k hypotézám.

Matematická indukce (str. 98) – postup, který se užívá k důkazům určitých typů matematických vět a výrazů. Zakládá se na IV. Peanově axiomu přirozených čísel.

Dedukce (str. 28) – v širším smyslu vyvozování nových poznatků z daných, a to pomocí pravidel formální logiky pro úsudky a důkazy. V užším smyslu se v tradiční logice chápala dedukce jako vyvozování výroků o jednotlivých předmětech z dané třídy na základě známých vět o všech objektech dané třídy.

Podle Slovníku cizích slov jsou pojmy chápány takto:

Indukce – jeden z typů úsudků a metoda zkoumání, kdy se na základě pozorování jednotlivých případů vyvozují všeobecné závěry. Postup od zvláštního k obecnému.

Dedukce – logické vyvození, způsob logického myšlení postupujícího od obecného pravidla k jednotlivému. Úsudek, ve kterém nová myšlenka logicky vyplývá z jistých tezí vystupujících v roli obecného pravidla platného pro všechny jevy dané třídy.

Další definice uvedené v Encyklopedickém slovníku:

Indukce (s. 932) – typ úsudků a metoda zkoumání, při níž se z jedinečných výroků usuzuje na obecný závěr. Úplná indukce enumerativní: úsudek, v němž obecný závěr plyne z premis shrnujících všechny jednotlivé případy, závěr je jistý. Neúplní indukce enumerativní: úsudek, v němž se vyvozuje obecný závěr z premis shrnujících některé jednotlivé případy, závěr je pouze pravděpodobný, je potvrzován premisami jen do určité míry.

Dedukce (s. 458) – typ úsudku a metoda zkoumání, při níž se z premis použitím určitých pravidel dospívá k novému tvrzení, tzv. závěru, důsledku. Je přechodem od obecného ke zvláštnímu.

Deduktivní metoda – způsob výstavby vědecké teorie založený pouze na dedukci. Uplatňuje se zpravidla v těch případech, kdy byl nahromaděn a teoreticky vyložen empirický materiál, který chceme uvést v systém, abychom mohli odvodit všechny důsledky plynoucí z přijatých předpokladů. Takto vybudovaná vědecká teorie je vědecká deduktivní soustava. Různé pokusy vést ostrou hranici mezi deduktivní metodou a induktivní se nezdařily, neboť obě metody jsou ve skutečnosti vnitřně spjaté.

Uplatňování indukce a dedukce souvisí s pozorováním, zkoumáním zákonitostí, zobecňováním

Ukázky příkladů:

### 1. Sčítání přirozených čísel

- a) Induktivní přístup. Sčítejte postupně dvě, tři, čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla a pokuste se součet vyjádřit jiným způsobem.

$$1 + 2 = 3 \qquad 3 = \frac{23}{2}$$

$$1 + 2 + 3 = 6 \qquad 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \qquad 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \qquad 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

atd.

Úvaha – čemu je roven součet  $n$  přirozených čísel ?

b) Deduktivní přístup:

Formulujeme větu : Pro součet  $n$  přirozených čísel platí

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Větu dokážeme snadno matematickou indukcí.

$$V(1): \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$V(k) \implies V(k+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

## 2. Určete součet $n$ lichých přirozených čísel.

a) Induktivní přístup:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

atd.

b) Deduktivní přístup:

Formulujeme větu: Pro součet  $n$  přirozených lichých čísel platí:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2.$$

Důkaz věty provedeme pomocí matematické indukce.

## 3. Určete součet $n$ sudých přirozených čísel.

a) Induktivní přístup:

$$2 + 4 = 6 \qquad 6 = 2 \cdot 3$$

$$2 + 4 + 6 = 12 \qquad 12 = 3 \cdot 4$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 \qquad 20 = 4 \cdot 5$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 \qquad 30 = 5 \cdot 6$$

b) Deduktivní přístup:

Formulujeme větu: Pro součet  $n$  sudých přirozených čísel platí

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

4. Určete součet

a) všech přirozených čísel od 1 do 100.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5\,050$$

b) Součet všech lichých čísel od 1 do 100.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 2\,500$$

c) Součet všech sudých přirozených čísel od 1 do 100

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = 2\,550$$

5. Pozorujte součin dvou sobě rovných činitelů – sledujte číslo zapsané na místě jednotek:

$$0 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1 \quad 2 \cdot 2 = 4 \quad 3 \cdot 3 = 9 \quad 4 \cdot 4 = 16 \quad 5 \cdot 5 = 25$$

$$6 \cdot 6 = 36 \quad 7 \cdot 7 = 49 \quad 8 \cdot 8 = 64 \quad 9 \cdot 9 = 81 \quad 10 \cdot 10 = 100$$

kdybychom v násobení sobě rovných činitelů pokračovali dále, zjistíme, že na místě jednotek jsou zapsána čísla:

$$0 \ 1 \ 4 \ 9 \ 6 \ 5 \ 6 \ 9 \ 4 \ 1 \ 0$$

6. Dokažte, že druhá mocnina přirozeného čísla nemá na místě jednotek zapsáno číslo 2 nebo 3.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$6^2 - 2 \cdot 6 = 24$$

$$5^2 - 1 = 24$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$12^2 - 2 \cdot 12 = 120$$

$$11^2 - 1 = 120$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$$

$$20^2 - 2 \cdot 20 = 360$$

$$19^2 - 1 = 360$$

atd.

$$4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

$$5^2 - 1 = 24$$

$$4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$$

$$7^2 - 1 = 48$$

$$4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$$

$$9^2 - 1 = 80$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

$$11^2 - 1 = 120$$

atd.

7. Dokažte, že pro každé přirozené číslo  $n$  platí:  $4n(n+1) = (2n+1)^2 - 1$

8. Počet úhlopříček konvexního  $n$ -úhelníku

Čtverec ...2, pětiúhelník 5, šestiúhelník 15, sedmiúhelník 21, atd.

Dokažte, že počet úhlopříček konvexního  $n$ -úhelníku je  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

9. Součet vnitřních úhlů  $n$ -úhelníku:

Trojúhelník  $180^\circ$ , čtyřúhelník  $360^\circ$ , pětiúhelník  $540^\circ$ , šestiúhelník  $720^\circ$ , atd.

10. Dělitelnost

$$5 \cdot 5 - 1 = 24 \quad 24 = 1 \cdot 24$$

$$7 \cdot 7 - 1 = 48 \quad 48 = 2 \cdot 24$$

$$11 \cdot 11 - 1 = 120 \quad 120 = 5 \cdot 24$$

atd.

Necheť  $p$  je prvočíslo větší než 3. Pak  $p^2 - 1$  je vždy dělitelné číslem 24.

11.	$2 \cdot 5 \cdot 5 + 1 = 51$	$51 = 3 \cdot 17$
	$2 \cdot 7 \cdot 7 + 1 = 99$	$99 = 3 \cdot 33$
	$2 \cdot 11 \cdot 11 + 1 = 243$	$243 = 3 \cdot 81$

atd.

Nechť  $p$  je prvočíslo větší než 3. Pak  $2p^2 + 1$  je vždy dělitelné třemi.

12.	$3 \cdot 3 \cdot 3 + 5 = 32$	$32 = 4 \cdot 8$
	$3 \cdot 5 \cdot 5 + 5 = 80$	$80 = 4 \cdot 20$
	$3 \cdot 7 \cdot 7 + 5 = 152$	$152 = 4 \cdot 38$

atd.

Nechť  $p$  je prvočíslo větší nebo rovno číslu 3. Pak  $3p^2 + 5$  je vždy dělitelné čtyřmi.