Induktivní a deduktivní metody v matematice

Růžena Blažková

Slovník školské matematiky uvádí:
Indukce (str. 67) – přechod od výroků o několika předmětech daného druhu k výroku o všech předmětech tohoto druhu. Taková indukce se považuje a úplnou, jestliže východiskem úvahy byly výroky o všech jednotlivých předmětech uvažovaného druhu. V ostatních případech hovoříme o neúplné indukci. Ta vede jen k hypotézám.
Matematická indukce (str. 98) – postup, který se užívá k důkazům určitých typů matematických vět a výrazů. Zakládá se na IV. Peanově axiomu přirozených čísel.
Dedukce (str. 28) – v širším smyslu vyvozování nových poznatků z daných, a to pomocí pravidel formální logiky pro úsudky a důkazy. V užším smyslu se v tradiční logice chápala dedukce jako vyvozování výroků o jednotlivých předmětech z dané třídy na základě známých vět o všech objektech dané třídy.

Podle Slovníku cizích slov jsou pojmy chápány takto:
Indukce – jeden z typů úsudků a metoda zkoumání, kdy se na základě pozorování jednotlivých případů vyvozují všeobecné závěry. Postup od zvláštního k obecnému.
Dedukce – logické vyvození, způsob logického myšlení postupujícího od obecného pravidla k jednotlivému. Úsudek, ve kterém nová myšlenka logicky vyplývá z jistých tezí vystupujících v roli obecného pravidla platného pro všechny jevy dané třídy.

Další definice uvedené v Encyklopedickém slovníku:
Indukce (s. 932) – typ úsudků a metoda zkoumání, při níž se z jedinečných výroků usuzuje na obecný závěr. Úplná indukce enumerativní: úsudek, v němž obecný závěr plyne z premis shrnujících všechny jednotlivé případy, závěr je jistý. Neúplní indukce enumerativní: úsudek, v němž se vyvozuje obecný závěr z premis shrnujících některé jednotlivé případy, závěr je pouze pravděpodobný, je potvrzován premisami jen do určité míry.
Dedukce (s. 458) – typ úsudku a metoda zkoumání, při níž se z premis použitím určitých pravidel dospívá k novému tvrzení, tzv. závěru, důsledku. Je přechodem od obecného ke zvláštnímu.
Deduktivní metoda – způsob výstavby vědecké teorie založený pouze na dedukci. Uplatňuje se zpravidla v těch případech, kdy byl nahromaděn a teoreticky vyložen empirický materiál, který chceme uvést v systém, abychom mohli odvodit všechny důsledky plynoucí z přijatých předpokladů. Takto vybudovaná vědecká teorie je vědecká deduktivní soustava. Různé pokusy vést ostrou hranici mezi deduktivní metodou a induktivní se nezdařily, neboť obě metody jsou ve skutečnosti vnitřně spjaty.

Uplatňování indukce a dedukce souvisí s pozorováním, zkoumáním zákonitostí, zobecňováním

Ukázky příkladů:

1. **Sčítání přirozených čísel**
   a) Induktivní přístup. Sčítejte postupně dvě, tři, čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla a pokuste se součet vyjádřit jiným způsobem.

$1 + 2 = 3$ $\qquad 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$

1 + 2 + 3 = 6 $\qquad 6 = \frac{3.4}{2}$

1 + 2 + 3 + 4 = 10 $\qquad 10 = \frac{4.5}{2}$

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 $\qquad 15 = \frac{5.6}{2}$

atd.
Úvaha – čemu je roven součet *n* přirozených čísel ?

b) Deduktivní přístup:

Formulujeme větu : Pro součet *n* přirozených čísel platí

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Větu dokážeme snadno matematickou indukcí.

V(1): $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

V(k) $\Rightarrow$ V($k + 1$)

$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

2. Určete součet *n* lichých přirozených čísel.

a) Induktivní přístup:

1 + 3 = 4
1 + 3 + 5 = 9
1 + 3 + 5 + 7 = 16 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
atd.

b) Deduktivní přístup:

Formulujeme větu: Pro součet *n* přirozených lichých čísel platí:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = n^2$.

Důkaz věty provedeme pomocí metalické indukce.

3. Určete součet *n* sudých přirozených čísel.

a) Induktivní přístup:

2 + 4 = 6 $\qquad$ 6 = 2 . 3
2 + 4 + 6 = 12 $\qquad$ 12 = 3 . 4
2 + 4 + 6 + 8 = 20 $\qquad$ 20 = 4 . 5
2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 $\qquad$ 30 = 5 . 6

b) Deduktivní přístup:

Formulujeme větu: Pro součet *n* sudých přirozených čísel platí

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

4. Určete součet
   a) všech přirozených čísel od 1 do 100.

1 + 2 + 3 + … + 100 = 5 050

   b) Součet všech lichých čísel od do 100.

1 + 3 + 5 + … + 99 = 2 500

   c) Součet všech sudých přirozených čísel od 1 do 100

2 + 4 + 6 + … + 100 = 2 550

5. Pozorujte součin dvou sobě rovných činitelů – sledujte číslo zapsané na místě jednotek:

0 . 0 = 0   1 . 1 = 1   2 . 2 = 4   3 . 3 = 9   4 . 4 = 16   5 . 5 = 25
6 . 6 = 36   7 . 7 = 49   8 . 8 = 64   9 . 9 = 81   10 . 10 = 100
kdybychom v násobení sobě rovných činitelů pokračovali dále, zjistíme, že na místě jednotek jsou zapsána čísla:
0 1 4 9 6 5 6 9 4 1 0

6. Dokažte, že druhá mocnina přirozeného čísla nemá na místě jednotek zapsáno číslo 2 nebo 3.

1 . 2 . 3 . 4 = 24	$6^2 – 2 . 6 = 24$	$5^2 - 1 = 24$
2 . 3 . 4 . 5 = 120	$12^2 – 2 . 12 = 120$	$11^2 – 1 = 120$
3 . 4 . 5 . 6 = 360	$20^2 – 2 . 20 = 360$	$19^2 – 1 = 360$

atd.

4 . 2 . 3 = 24	$5^2 – 1 = 24$
4 . 3 . 4 = 48	$7^2 – 1 = 48$
4 . 4 . 5 = 80	$9^2 – 1 = 80$
4 . 5 . 6 = 120	$11^2 – 1 = 120$

atd.

7. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: $4n (n + 1) = (2n + 1)^2 - 1$

8. Počet úhlopříček konvexního n-úhelníku

Čtverec …2, pětiúhelník 5, šestiúhelník 15, sedmiúhelník 21, atd.

Dokažte, že počet úhlopříček konvexního n-úhelníku je $\frac{n(n -}{2}$.

9. Součet vnitřních úhlů n- úhelníku:

Trojúhelník 180°, čtyřúhelník 360°, pětiúhelník 540, šestiúhelník 720°, atd.

10. Dělitelnost

5 . 5 – 1 = 24	24 = 1 . 24
7 . 7 – 1 = 48	48 = 2 . 24
11 . 11 – 1 = 120	120 = 5 . 24

atd.

Nechť *p* je prvočíslo větší než 3. Pak $p^2 – 1$ je vždy dělitelné číslem 24.

11. $2 . 5 . 5 + 1 = 51$ $51 = 3 . 17$
$2 . 7 . 7 + 1 = 99$ $99 = 3 . 33$
$2 . 11 . 11 + 1 = 243$ $243 = 3 . 81$

atd.

Nechť p je prvočíslo větší než 3. Pak $2 p^2 + 1$ je vždy dělitelné třemi.

12. $3 . 3 . 3 + 5 = 32$ $32 = 4 . 8$
$3 . 5 . 5 + 5 = 80$ $80 = 4 . 20$
$3 . 7 . 7 + 5 = 152$ $152 = 4 . 18$

atd.

Nechť p je prvočíslo větší nebo rovno číslu 3. Pak $3p^2 +5$ je vždy dělitelné čtyřmi.