Didaktika matematiky 1: **DĚLITELNOST CELÝCH ČÍSEL**

(Růžena Blažková)

1) Dokažte:
a) Součet každých dvou lichých čísel je číslo sudé.
b) Součet každých dvou sudých čísel je číslo sudé.
c) Součet libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je číslo liché.
d) Součin každých dvou lichých čísel je číslo liché.
e) Součin každých dvou sudých čísel je číslo sudé a je dělitelné čtyřmi.
f) Součin libovolného lichého a libovolného sudého čísla je číslo sudé.
g) Součet dvou lichých po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný čtyřmi.

2) Jestliže čísla *a, b* nejsou dělitelná třemi, pak je vždy jedno z čísel $a+b$, $a-b$ dělitelné třemi. Dokažte.

3) Jestliže p je prvočíslo větší než tři, pak je vždy jedno z čísel $p+1$, $p-1$ dělitelné šesti. Dokažte.

4) Jestliže p je prvočíslo větší než tři, pak je číslo p^2+1 dělitelné číslem 24. Dokažte.

5) Dokažte, že rozdíl dvou kladných trojciferných čísel, z nichž první je zapsáno v desítkové soustavě týmiž číslicemi jako druhé, avšak v opačném pořadí, je dělitelný čísly 9 a 11.

6) Dokažte:
a) Druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná osmi.
b) Rozdíl druhých mocnin dvou libovolných lichých čísel je dělitelný osmi.
c) Součet třetích mocnin tří za zebou jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.
d) Součet tří po sobě následujících čísel, z nichž první a třetí jsou lichá, je dělitelný šesti.

7) Je-li $a>1$ libovolné číslo, pak vždy jedno z čísel a^2-1, a, a^2+1 je dělitelné pěti. Dokažte.

8) Jestliže přirozené číslo a není dělitelné sedmi, pak jedno z čísel a^3+1, a^3-1 je dělitelné sedmi. Dokažte.

9) Dokažte, že číslo $2^1+2^2+2^3+...+2^{100}$ je dělitelné třemi.

10) Dokažte, že číslo $4^1+4^2+4^3+...+4^{100}$ je dělitelné pěti.

11) Dokažte, že číslo $A=\underbrace{111...1}_{k\ cifer}\underbrace{222...2}_{k\ cifer}$ je rovno součinu dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. (např. 12 = 3 . 4, 1122 = 33 . 34 atd.)

12) Jestliže trojciferné číslo tvaru ABC je dělitelné 37, pak každé číslo BCA nebo CAB je dělitelné 37. Dokažte.

13) Dokažte, že jestliže k libovolnému trojcifernému číslu připíšeme zprava totéž číslo, že takto vzniklé šesticiferné číslo je dělitelné čísly 7, 11, 13.

14) Je-li a libovolné přirozené číslo, pak je číslo $\left(a^2-1\right)\cdot\left(a+3\right)$ dělitelné číslem 24. Dokažte.

15) Určete, zda čísla 411, 573, 1007, 2773 jsou prvočísla nebo čísla složená.

16) Doplňte, je-li to možné, chybějící číslice v daných číslech tak, aby vzniklo číslo, které je dělitelné: a) devíti b) jedenácti c) dvanácti.

37_46, 536_4, 378_ _

Pokud je to možné, najděte všechny možnosti.

17) Najděte přirozené číslo, pro které platí současně: při dělení třemi dává zbytek 1, při dělení čtyřmi dává zbytek 2, při dělení pěti dává zbytek 3 a při dělení šesti dává zbytek 4.

18) Ověřte, že platí: $n(64, D(30,42)) = D(n(30,64), n(42,64))$.

19) Jaké číslice musíme doplnit, aby pěticiferné číslo 5 _ 3 _ 8 bylo dělitelné číslem 24.

20) Zvolte si tři různá trojciferná čísla a určete jejich největšího společného dělitele.

21) Zvolte si tři různá dvojciferná čísla a určete jejich nejmenší společný násobek.

22) Kolik různých obdélníků lze sestavit z 225 čtvercových dlaždic tak, aby bylo všech dlaždic použito?

23) Kolika způsoby můžeme zaplatit částku 39 Kč pouze dvoukorunovými a pěti korunovými mincemi?

24) Určete trojciferná čísla, která při dělení třemi dávají zbytek 2 a zároveň při dělení sedmi dávají zbytek 5.

25) Dokažte nebo vyvraťte věty:
a) Součet dvou po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 3.
b) Součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 7.
c) Jestliže je přirozené číslo dělitelné dvěma a šesti, pak je dělitelné dvanácti.
d) Jestliže je přirozené číslo dělitelné třemi a čtyřmi, pak je dělitelné dvanácti.
e) Každé číslo ve tvaru $10^a + 8$, kde a je přirozené číslo, je dělitelné číslem 18.
f) Číslo $3^{2a} - 1$ je dělitelné osmi pro každé přirozené a.
g) Nechť p je prvočíslo větší než 3. Pak $2p^2 + 1$ je vždy dělitelné třemi.
h) Nechť p je prvočíslo větší než 2. Pak $3p^2 + 5$ je vždy dělitelné čtyřmi.

26) Najděte nejmenší přirozené číslo, které je násobkem všech čísel od 1 do 10.

27) Do přístavu připlouvají parníky. První se vrací každé 4 týdny, druhý za 8 týdnů, třetí za 12 týdnů a čtvrtý za 16 týdnů. Vypluly 2. ledna. Setkají se ještě v tomto roce v přístavu?

28) Podnikatel chtěl objednat výrobu kartónových krabic na balení krabiček čaje o rozměrech 13 cm, 7 cm, 5 cm. Jaké budou rozměry krabice, jestliže v ní má být umístěno minimálně 60 krabiček čaje. Bylo by reálné, aby krabice měla tvar krychle?

29) Věk kapitána vynásobený šířkou lodi, počtem jeho dcer a počtem synů je 5406. Určete, kolik je kapitánovi roků, kolik má dětí a jak široká je jeho loď.