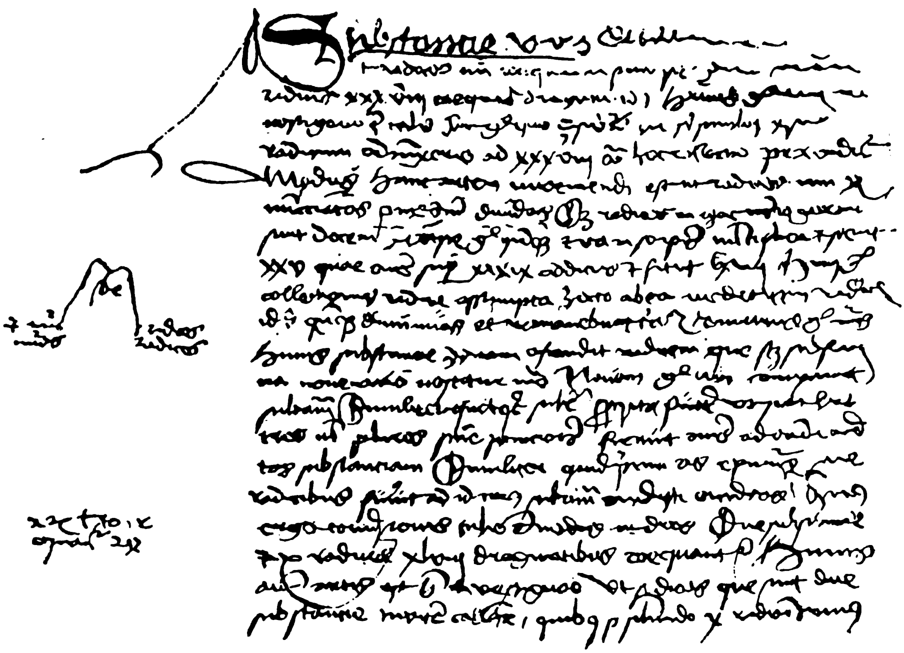


Fragment latinského rukopisu algebraického traktátu al-Chwárizmího

ARABSKÁ MATEMATIKA

Pavel Šišma

1. Úvod.

Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře nejen s vlastní arabskou matematikou, ale i s jejím vlivem na evropskou středověkou matematiku. Nepůjde nám tedy o podrobný výklad arabských matematických výsledků, nýbrž se zaměříme na to, jakým způsobem arabská matematika umožnila přenést starověké matematické znalosti (ale také poznatky středověké indické matematiky) do středověké Evropy. Řada významných matematických výsledků, kterých dosáhli arabští matematici, bude pouze zmíněna bez podrobnějšího komentáře a o řadě z nich nebudeme hovořit vůbec. Budou to většinou ty, které žádným způsobem neovlivnily vývoj evropské matematiky, neboť s řadou z nich jsme se seznámili až v průběhu minulého století.

Právě 20. století bylo obdobím rozsáhlého studia arabské matematiky. Přitom prvních významných výsledků dosáhla sovětská škola historie matematiky, vedená A. P. Juškevičem (1906–1993). Juškevičovy *Dějiny matematiky ve středověku*, které vyšly poprvé v roce 1961, se staly na dlouhou dobu základní literaturou pro studium arabské matematiky. Kniha byla přeložena do několika světových jazyků a v roce 1977 také do češtiny. Od 60. let dochází k velkému růstu počtu prací věnovaných arabské matematice. V knihovnách a muzeích mnoha zemí se nachází velké množství matematických a astronomických rukopisů jak v arabštině a v perštině, tak také v latinských překladech z arabštiny. Základní práce významných arabských matematiků jsou přeloženy do evropských jazyků. Další velmi důležitá díla jsou však stále ještě neznámá či nepřeložená.

Na úvod je nutno ještě dodat, že se často hovoří o arabské matematice nebo islámské matematice, ačkoliv mnoho z těchto matematiků bylo jiné národnosti či vyznání (Peršané, Chwárizmové, křesťané, Židé ap.). Spojujícím prvkem byla arabština a arabské písmo, které tito autoři používali. Jen zřídka byla některá práce napsána řecky, hebrejsky či persky. Můžeme říci, že samotných učenců arabského původu bylo relativně málo. V době arabských výbojů a upevňování moci Arabové zaujímali místa vojenských velitelů, pracovali na úřednických místech, u dvora či v církevní hierarchii. Vědeckou prací se zabývala hlavně místní inteligence. Koneckonců v dobytých oblastech ani nebyla arabská vrstva příliš početná a později došlo i k procesu míšení arabských přistěhovalců s místním obyvatelstvem. Velkou část učenců tvořili zpočátku Syřané, Chwárizmové, Řekové a Židé. V pozdější době sehráli hlavní roli ve vědeckém životě obyvatelé dnešního Íránu, Tádžikistánu, Uzbekistánu a Turkmenistánu.

Rovněž otázka náboženská není jednoduchá. Základem bylo islámské náboženství, ale náboženství křesťanské i náboženství židovské bylo tolerováno.

2. Arabský svět.

Sedmé století bylo stoletím obrovského rozmachu arabské říše. Na přelomu 6. a 7. století přitom arabské země procházely těžkou hospodářskou a politickou krizí. Obyvatelstvo poloostrova tvořily dlouhou dobu převážně pouštní kmeny, jejichž příslušníci neuměli číst ani psát. Kolem roku 570 se v Mekce narodil Muḥammad, který během svých cest přišel do kontaktu s židovským a křesťanským náboženstvím a pod jejich vlivem vytvořil vlastní formu náboženství. V roce 622 Muḥammad prchl z Mekky do Jasribu (dnešní Medína, Město Prorokovo) před svými náboženskými a politickými protivníky. Jím hlásaná forma monoteismu nazývaná islám, což značí pokoru (před Alláhem), vznikla na základě představ nižších vrstev obyvatelstva jako protiváha polyteismu arabské vládnoucí šlechty. Rokem 622 začíná arabský letopočet „hidžra". Muḥammad v Medíně založil muslimskou obec a byl prohlášen za Alláhova proroka. V roce 630 se jako vítěz do Mekky vrací. Zakládá vlastní muslimský stát a připravuje vojenskou expanzi proti svým sousedům. Dříve než k ní došlo, Muḥammad v roce 632 umírá. Prorokovi nástupci – chalífové – zahájili ihned dobyvačná tažení do okolních zemí pod heslem svaté války s nevěřícími a za rozšíření islámu. Během necelé stovky let si podrobili obrovské území.

V roce 636 padl syrský Damašek a v rukou Arabů se nacházela celá Sýrie a velká část Iráku a Íránu. V roce 642 byl dobyt Egypt. Byzantské posádky v Sýrii a Egyptě nebyly schopné klást odpor arabským výbojům, kromě toho domácí obyvatelstvo podporovalo Araby v naději na zlepšení životních podmínek. Během dalších let Arabové obsadili severoafrické pobřeží a v roce 711 se společně s Berbery, které si krátce předtím podmanili, přeplavili přes Gibraltarský průliv a začali obsazovat Pyrenejský poloostrov, který byl do této doby v rukou Vizigótů. Na počest arabského vojevůdce Ṭáriqa ibn Zajda dostal Gibraltar svůj název (Džabal al-Ṭáriq, t. j. „hora Ṭáriqova"). Během několika let došlo k obsazení celého poloostrova s výjimkou severozápadní Asturie. Jejich postup dále do Evropy byl zastaven až v roce 732 Karlem Martelem (kolem 688–741) v bitvě u Poitiers.

Ve stejné době jako byl obsazován Pyrenejský poloostrov, arabská vojska obsadila Chwárizm a část Paňdžábu. V polovině 8. století tak Arabové vládli prakticky na celém Pyrenejském poloostrově, ovládali všechny africké středomořské země a Blízký východ. Vládli rovněž ve velkých oblastech Malé Asie, Kavkazu a Střední Asie, v části údolí po obou březích Indu.

K dalšímu výraznému postupu již ovšem nedošlo. Postupně ztroskotalo několik pokusů o dobytí Cařihradu (poslední od moře v letech 717–718). V dalším období již například v Evropě Arabové získali pouze Sardinii a na 200 let ovládli Sicílii a některá malá území na Apeninském poloostrově. Jako jiné feudální středověké státy, ani arabský chalífát nebyl pevným politickým útvarem. V polovině 8. století se osamostatnily vzdálené španělské a africké provincie, později další části Severní Afriky. V 9. století se odtrhly celé oblasti Íránu, Tádžikistánu a Kavkazu. Vznikaly a mizely velké státy.

Nebudeme zde dále sledovat velmi složitý vývoj v oblasti Blízkého východu, jen uveďme, že prvním centrem východní arabské říše dynastie Umajjovců byl od roku 636 Damašek a od roku 762 pak nově založený Bagdád, který se stal prvním velkým vědeckým centrem a sídlem nové dynastie Abbásovců. V polovině 13. století dobyli Bagdád Mongolové, kteří dobyté oblasti nejprve zničili, aby je poté mnohdy opět budovali. Vědecké školy na tomto velkém prostoru Blízkého východu zanikaly a znovu byly obnovovány nebo vznikaly na jiných místech nové. Centry vědy byly v různých obdobích Bagdád, Buchara či Samarkand.

Z našeho pohledu neméně významnou oblastí arabského světa byl Pyrenejský poloostrov a severozápadní Afrika. Brzy po obsazení těchto oblastí Araby a Berbery, tyto dvě etnické skupiny zde začali později nazývat Maury, získaly tyto provincie v roce 756 faktickou samostatnost. Formální odtržení proběhlo v roce 929, kdy se córdobský emír ᶜAbd ar-Raḥmán III. (912–961) prohlásil chalífou. V córdobském státě vzkvétala svérázná kultura, která zahrnovala římské, vizigótské, východoarabské, berberské, křesťanské a židovské prvky. Syn prvního córdobského chalífy financoval koupi a přepisování knih z ostatních islámských zemí, a tak brzy vznikla obrovská knihovna, která obsahovala 400 000 rukopisů. V roce 961 byla v Córdobě založena vysoká škola, kde se přednášela i matematika a astronomie. V Córdobě (ale i v Granadě, Salamance, Seville, Toledu nebo sicilském Palermu) vznikly všeobecně vzdělávací základní školy. I když se později córdobský chalífát rozpadl na menší státní útvary, udržely se příznivé podmínky pro vědecký život.

Centrem vědecké práce nebyla jen Córdoba, ale třeba také Sevilla, kde ve 12. století pracoval Abú Muḥammad Džábir ibn Afláᶜ, autor mnoha hodnotných prací věnovaných trigonometrii. Ovšem žádný opravdu velký arabský matematik zde nepracoval. Pro matematiku na Pyrenejském poloostrově mělo velký význam studium děl matematiků východoarabských. V důsledku politického a hospodářského odtržení západních zemí slábly i kulturní vazby a mnohé objevy z východu zůstaly na arabském západě neznámé. Velmi často pak byly výzkumy vedeny paralelně a nezávisle na sobě. V 11. století na Pyrenejském poloostrově sílí rekonquista, tedy boj Španělů a Portugalců s cílem osvobodit území obsazená Maury. V roce 1085 obsadili Španělé Toledo. Vpád nových berberských kmenů sice rekonquistu zadržel, ale již roku 1236 byla dobyta Córdoba a brzy zůstal pod nadvládou Maurů pouze Granadský emirát na jihu poloostrova. Roku 1492 padl i on. 15. století bylo současně také posledním obdobím rozkvětu arabské vědy ve východoarabských zemích.

Rozvoj vědy na územích obsazených Maury měl ohromný vliv pro rozšíření vědeckých poznatků v Evropě. Právě odtud začalo pronikat dědictví orientální a řecké vědy prostřednictvím arabských překladů do dalších evropských zemí. Ve 12. a 13. století pracovalo ve Španělsku, zejména v Toledu, mnoho překladatelů a kompilátorů, kterým vděčíme za latinské texty nebo latinská přepracování četných významných arabských traktátů nebo do arabštiny přeložených řeckých děl. Činnost těchto lidí měla pro rozmach evropské matematiky stejný význam jako práce prvních bagdádských překladatelů řecké literatury pro islámskou vědu.

Podívejme se nyní na samotný vývoj arabské kultury. Jak jsme již řekli, kulturní úroveň původního arabského obyvatelstva byla velmi nízká a o arabské vědě nemohla být vůbec řeč. V obsazených zemích se Arabové setkávali s vyšší kulturou, než byla jejich vlastní, ale brzy si toto duchovní bohatství osvojili a postupně spolu se Syřany, Peršany, Židy a příslušníky dalších národů začali vytvářet vlastní osobitou kulturu. Jen jako legenda se šířily ve středověké Evropě informace o ničení rozsáhlých knižních bohatství porobených zemí. Zejména to platí o slavné alexandrijské knihovně, která však byla z větší části zničena již dříve. Na druhé straně je pravda, že v některých oblastech byla arabská tažení doprovázena krutým násilím na místním obyvatelstvu a ničením kulturního bohatství, například ve vysoce rozvinutém Chwárizmu. Většinou ale Arabové projevovali jistou toleranci k náboženství a zvykům porobených národů. Vyznávání islámu ovšem přinášelo privilegia, a proto většina obyvatelstva těchto zemí přecházela na muslimskou víru. Z arabštiny se postupně stává hovorový jazyk a zejména pak jazyk inteligence.

Důležitým faktorem pro předávání vědeckých a kulturních poznatků byl rozsáhlý obchod. Arabové obchodovali s Indií, Čínou, Byzancí, s oblastmi dnešního Ruska a s pobřežím celého Středozemního moře. Arabští obchodníci se dostali do nitra Afriky, na Madagaskar. Jejich vyslanci se objevovali jak na dvoře Karla Velikého (768–814), tak u dvora čínských císařů.

3. Arabská matematika.

Následující část našeho příspěvku je věnována arabské matematice. Po stručném shrnutí základních faktů, týkajících se výsledků a přínosu arabské matematiky, se budeme věnovat třem oblastem matematiky, ve kterých arabská matematika nejvýrazněji ovlivnila středověkou evropskou matematiku.

Vývoj arabské matematiky.

Konstatovali jsme, že Arabové přejímali kulturní a vědecké výsledky porobených národů a dále je rozvíjeli. Další poznatky získávali pomocí obchodních a diplomatických styků. Nejinak tomu bylo i v případě matematiky. V Sýrii, Mezopotámii a Íránu odedávna pracovaly vědecké školy, v nichž bylo studováno dílo Aristotelovo a spolu s ním i přírodní vědy, matematika a medicína. V 6. a 7. století nacházeli na Blízkém východě azyl v Byzanci pronásledovaní učenci – pohané i příslušníci různých křesťanských sekt. Když byla na příkaz císaře Justiniána (483–565) v roce 529 zavřena aténská akademie neoplatoniků, sedm filozofů – mezi nimi známý komentátor Aristotela a Eukleida Simplikios – žilo několik let u dvora perského vládce Chusrana Anóšarvána (531–579). Do syrštiny a perštiny bylo přeloženo mnoho řeckých filozofických a vědeckých prací. V Egyptě působili ještě následníci někdejší alexandrijské školy. Chalífa ᶜUmar II. (vládl v letech 717–720) přikázal v roce 718 přestěhovat učence alexandrijského *Musea* do Antiochia, později byla škola přeložena do Bagdádu, který se stal prvním vědeckým centrem.

Koncem 8. a počátkem 9. století se v Bagdádu soustředilo mnoho učenců a překladatelů z různých oblastí. Byli to učenci ze Sýrie, Íránu a Mezopotámie, mezi nimi jak Židé, tak křesťané. Řada chalífů z dynastie Abbásovců počínaje al-Manṣúrem (vládl v letech 745–775) a hrdinou „Pohádek tisíce a jedné noci“

Hárúnem ar-Rašídem (vládl v letech 786–809) podporovala rozvoj přírodních věd, tedy i matematiky. V době vlády Hárúna ar-Rašída byla založena velká knihovna, která byla doplňována rukopisy až z Byzance, kam později chalífa al-Ma'mún (vládl v letech 813–833) poslal za tímto cílem zvláštní misi. Ve městě existovalo mnoho jiných knihoven a knižních obchodů, mnoho lidí se zabývalo přepisováním vědeckých děl. Rozvíjí se školství, jehož učitelé jsou placeni státem.

Al-Ma'mún podle vzoru alexandrijských Ptolemaiovců soustředil učence do zvláštní akademie, zvané *Dům moudrosti.* Mimo knihovnu zde byla i dobře vybavená observatoř. Další pak pracovala v Damašku. V oblasti astronomie byla vykonána ohromná práce. Byla provedena nová měření sklonu ekliptiky, měření délky poledníkového stupně a byla sestavena nová zeměpisná mapa. Přitom vědecká práce byla často finančně dotována bohatými mecenáši, kteří se někdy do ní sami zapojovali. Jedním z významných podnětů pro astronomické práce, ale také práce matematické, byl kolem roku 773 překlad významného indického astronomického spisu, který astronomové nazvali *Veliký Sindhind.* Není zcela jasné, o kterou indickou práci přesně šlo, ale rozhodně měla na arabskou vědu velký vliv. Pravděpodobně díky tomuto překladu Arabové poznali indický desítkový poziční systém a indickou trigonometrii.

O astronomii zde hovoříme proto, že vědecká práce v tomto oboru pochopitelně vždy vyžadovala dobré matematické znalosti. Kromě toho ovšem rozvoj matematiky podporovaly i potřeby stavebnictví, obchodu, státních financí (daně), právních problémů (dědické právo) ap. Potřeby astronomie byly však nejdůležitější. Jak tomu již v dějinách nejstarší matematiky bývá, velká část matematiků byla současně i astronomy. Vysokou úroveň v arabských zemích dosáhla konstrukce astronomických přístrojů. Přesnější měření pak vyžadovalo přesnější matematické výpočty. Rozvoji astronomie napomáhalo cestování do vzdálených oblastí. Speciální matematické znalosti vyžadovala geometrická optika při studiu vlastností zrcadel různých tvarů.

Středem zájmu bagdádské matematické školy byly ovšem také problémy komerční aritmetiky, výpočty geometrických útvarů, přibližné výpočty a přibližné konstrukce, trigonometrie a numerická algebra. Bagdádská matematická škola aktivně pracovala dvě stě let. V prvním období se věnovala hlavně studiu starých antických autorů a vydávání jejich děl v arabštině. Při formování arabské matematiky však svou roli sehrály i kontakty s Indií, Chwárizmem, Persií a později i Čínou. Velmi rychle byla propracována arabská matematická terminologie, která předtím prakticky neexistovala. Přibližně za 100–150 let byla do arabštiny[1] přeložena z řečtiny nebo ze syrských překladů základní díla Eukleida, Archiméda, Apollónia, Hérona, Ptolemaia, Diofanta a jiných autorů. Některá díla, jako např. Eukleidovy *Základy*, byla přeložena vícekrát. Překlady a komentáře prováděli významní učenci té doby, kteří k těmto pracím přidali i něco nového. Pokud tedy hovoříme o tom, že se středověká Evropa seznámila s řeckou matematikou, pak to již byla matematika dobře okomentovaná, systematizovaná a didakticky zpracovaná.

[1] Výjimečně byla tato díla překládána i do jiných jazyků. Například al-Bírúní přeložil do sanskrtu Eukleidovy *Základy* a Ptolemaiův *Almagest.*

Již od 9. století, současně s velkým množstvím překladů a komentářů, vznikla vlastní arabská matematická kultura. Metody a poznatky starých Řeků byly využívány k řešení problémů praktické matematiky. Arabská matematika se od matematiky indické nebo čínské liší právě tím, že se rozvíjí pod vlivem matematiky řecké a je tedy založena na deduktivním výkladu a logickém odvozování. Osvojení klasického dědictví umožnilo arabským matematikům dosáhnout v rozpracování numericko-algebraických problémů vyšší úrovně a použít při jejich řešení a zobecnění podstatně silnější prostředky, než jakých užívali Indové a Číňané.

Omar Chajjám

Tam, kde se matematici těchto národů omezili na vytvoření izolovaného početního návodu, arabští matematici vytvořili celé teorie. Například na základě antické teorie kuželoseček arabský matematik Omar Chajjám[2] vytvořil rozsáhlou geometrickou teorii rovnic třetího stupně. Vliv řecké matematiky se odrazil nejen v metodách, ale i ve stylu arabských děl, ve kterých se věnuje velká pozornost způsobu vedení důkazu, systematickému uspořádání látky a úplnosti výkladu. Na druhé straně práce obsahují – podle orientálního vzoru – velké množství příkladů a úloh, které často vychází z praktických problémů.

Je velmi obtížné v krátkém příspěvku podat přehled nejvýznamnějších osobností arabské matematiky a jejich výsledků. Řadu slavných pracovníků bagdádské školy otevírá jeden z klasiků matematiky islámských zemí al-Chwárizmí,[3] pracující v období vlády al-Ma'múna. V téže době v *Domě moudrosti* působili první překladatel Eukleidových *Základů* al-Hadždžádž a jejich komentátor al-^{c}Abbás ibn Sa^{c}íd al-Džauharí. Vědecká práce se ovšem rozvíjela i v jiných městech.

Algebraická problematika se objevuje v dílech Abú Kámila a al-Karadžího. V al-Karadžího práci *al-Fachrí* z roku 1010 je již zřejmý vliv Diofantovy *Aritmetiky*. Nelze zapomenout na algebraický traktát Omara Chajjáma. Díky problémům astronomie dochází k rozvoji trigonometrie, o které pojednáme v samostatné části tohoto příspěvku.

Značnou pozornost vzbudila u arabských matematiků problematika Euklei-

---

[2] Omar Chajjám se narodil v roce 1048 v Níšápúru. Politické zmatky ho nutily často měnit místo svého pobytu. Pracoval v Samarkandu, později v jiných městech Střední Asie a Íránu. Asi v roce 1074 napsal Chajjám knihu *O důkazech úloh algebry a al-muqábaly* a v roce 1077 komentář k Eukleidovým *Základům*. Současníci si jej vysoce cenili jako učence, ještě větší slávu však získal jako autor známých *Rubáiját* – čtyřverší, ve kterých opěvoval lásku a svobodu a vysmíval se oficiálnímu náboženství. Zemřel v roce 1131 v rodném městě.

[3] Abú ^{c}Abdalláh Muḥammad ibn Músa al-Chwárizmí (asi 780–850), matematik a astronom. Z al-Chwárizmího děl se zachovalo sedm částečně přepracovaných opisů, které jsou věnovány aritmetice, algebře, astronomii, geografii a výpočtům kalendáře. Je známo, že byl autorem dvou traktátů o astrolábu a poměrně nedávno nalezeného traktátu o slunečních hodinách. Z hlediska historie matematiky jsou fundamentální dvě díla, a to aritmetický a algebraický traktát. O nich budeme dále hovořit. Al-Chwárizmí se rovněž podílel na měření obvodu Země, které proběhlo za vlády chalífy al-Ma'múna.

dova postulátu o rovnoběžkách, o které zde hovořit nebudeme, a problematika výpočtu čísla π. Pouze uveďme, že nejlepšího výsledku zde dosáhl v 15. století Džamšíd Ghijá<u>th</u> ad-Dín al-Káší (zemřel v roce 1429), který s využitím 3.2^{28}-úhelníka získal hodnotu čísla π s přesností na 17 desetinných míst. Tento výsledek překonala evropská matematika až o 150 let později v pracích Ludolpha van Ceulena (1540–1610).

Výsledky matematiků na Pyrenejském poloostrově byly podstatně skromnější než na východě. K nejlepším patří originální objevy Džabíra ibn Aflá v oblasti trigonometrie. Význam západoarabské matematiky ovšem spočívá v tom, že jejím prostřednictvím se do Evropy šířily znalosti řecké a arabské matematiky. Na území postupně osvobozovaná od maurské nadvlády přicházeli učenci z křesťanské Evropy, aby se zde seznámili s matematikou a přírodními vědami. Později byla arabská literatura studována i mimo tato území. Evropští matematici tak mohli stavět na pevných základech a nemuseli procházet podobnými fázemi jako arabští matematici při studiu řecké matematiky. Izolovanost arabského východu a západu ovšem vedla k tomu, že některé poznatky se do středověké Evropy nedostaly.

Za co vděčíme arabským matematikům.

1) Pečlivě přeložili klasická matematická díla starých Řeků. Západní Evropa poznala většinou tato díla nejprve z arabských překladů. Teprve později byla řada z těchto děl přeložena přímo z řečtiny. Některá jsou ovšem známa dodnes jen díky arabským překladům.

2) Arabové řeckou matematiku učinili srozumitelnější tím, že ji prostudovali, komentovali a některé problémy dále rozpracovali. To se týká kubických rovnic a postulátu o rovnoběžkách.

3) V arabských knihách věnovaným algebře nacházíme (jako u Indů) návody pro počítání nejen s čísly, ale i s odmocninami a algebraickými výrazy. V pracích arabských matematiků nacházíme rovněž praktické problémy z denního života (obchodní problémy či dědické právo).

Arabové matematiku algebraizovali tím, že užívali slovní označení pro x, x^2 a x^3 a eukleidovské početní geometrické konstrukce vyjádřili bez geometrických představ. Zavedli systém do řešení různých typů algebraických rovnic.

4) Zvláštní přínos vnesli Arabové do trigonometrie. Rovněž pokročili v oblasti numerických výpočtů a v oblasti aplikací matematiky. Právě důraz na řešení praktických problémů velmi výrazně odlišuje arabskou matematiku od antické matematiky.

Vznik desítkového početního systému v Indii.

Vývoj desítkového pozičního systému v Indii byl dlouhodobý proces, třebaže indická celočíselná numerace měla od nejstarších dob desítkový charakter. Během vývoje se v Indii objevily i jiné nepoziční soustavy založené na aditivním principu, ale neujaly se.

Poziční princip v sobě zahrnuje tři momenty: 1) multiplikativní zápis počtu řádů v daném čísle, 2) vynechání znaků jednotek těchto řádů. (S tímto jsme se setkali již u babylónské a čínské matematiky.) K tomu je ale třeba ještě 3) znak nuly, která vyjadřuje v daném čísle neobsazení některých řádů. V babylónské matematice se nula objevila již koncem první poloviny 1. tisíciletí př. n. l., ale nepoužívala se systematicky. To lze vysvětlit tím, že v šedesátkové soustavě používané v Babylónii je její výskyt poměrně řídký (do stovky jedna a do tisíce 16). V desítkové soustavě do tisíce potřebujeme 180 nul.

Symboly pro naše číslice 1–9 mají původ zhruba v polovině 3. století př. n. l. Z Indie se asi v 8. století začaly šířit do oblasti Středomoří. V 9. století se objevily ve Španělsku a o něco později v Itálii. Podstatnější než samotné číslice a jejich tvar je ovšem poziční systém. Babylóňané měli poziční systém založený na základu 60. Třebaže Řekové přejali tento systém v astronomii, při psaní a vyjadřování čísel v jiných situacích se neprosadil. Číňané měli od nejstarších dob svůj poziční systém založený na multiplikativním principu se základem deset. To bylo odvozeno od počítacích desek, na kterých prováděli výpočty.

Indové měli zpočátku zvláštní symboly rovněž pro 10, 20, ..., 100, ..., 1000. Větší čísla byla (podobně jako v Číně) vyjadřována pomocí symbolů pro 100 a 1000 s využitím prvních devíti číslic. Kolem roku 600 Indové opustili symboly pro vyšší čísla a začali užívat pozičního systému. První dochovaná práce, ve které je nula uvedena, pochází z Kambodže. Vznikla asi v letech 683–686. V Indii je doložen nápis s nulou až k roku 876. Od Indů začali přebírat tento početní systém i Číňané. Důvod, proč Indové přešli na tento desítkový početní systém, není zřejmý. Je celkem možné, že je ovlivnila právě čínská počítací deska, na které jednotlivé sloupce představovaly řády deseti. Pak je ovšem kuriózní, že od Indů převzali desítkový systém i Číňané.

V 7. století desítková soustava založená na pozičním významu devíti číslic a nuly již existovala a informace o ní pronikaly již v tomto období na západ. Svědectví o tom nacházíme u syrského učence Severa Sébóchta žijícího v severní Mezopotámii, který poukazuje na

vtipné objevy Indů v astronomii, daleko důmyslnější objevů Řeků a Babylóňanů, a na jejich početní soustavu, pro kterou nenacházíme slov a zvláště pro tu, která používá devíti znaků.

O nule se zde sice nemluví, ale je možné, že znak pro nulu (kroužek či tečku) prostě za číslici nepovažoval. Později kroužek tečku vytlačil. Pro nulu používali Indové označení *prázdné*. Není jasné, zda nulu Indové znovuobjevili a nebo ji přejali z prací řeckých matematiků, kteří zase navazovali na babylónskou myšlenku označení prázdného místa.

Al-Chwárizmího traktát.

Arabové se mohli seznámit s desítkovým početním systémem poprvé zřejmě kolem roku 773, kdy se do Bagdádu dostaly již zmíněná indická *Sindhánta*, která al-Manṣúr přikázal přeložit do arabštiny. Je nepochybné, že v tomto spise byly minimálně náznaky desítkového pozičního systému. Nicméně šlo o spis astronomický, kde se využíval poziční šedesátkový systém.

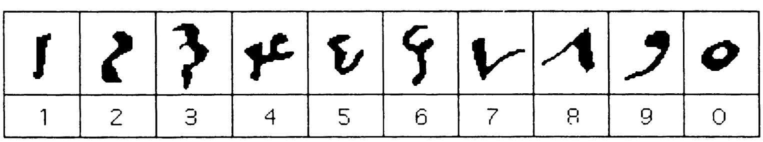
Nejznámější arabskou prací, ve které je vyložen desítkový poziční systém a jsou objasněny číselné algoritmy aritmetických operací v této soustavě, je aritmetický traktát al-Chwárizmího, který nese název *Kniha o sčítání a odečítání podle indického počtu*. Autor zde píše:

rozhodli jsme se ukázat indický počet, užívající devíti znaků, kterými lze jednoduše a krátce vyjádřit každé jejich číslo, právě proto, abychom ulehčili učení aritmetiky každému, tedy čísla jak velká, tak malá, a vše, co se přitom vyskytne z násobení a dělení a také ze sčítání a odečítání atd.

Al-Chwárizmí nejprve vysvětluje, jak se celé číslo v desítkové soustavě zapíše a k čemu je vlastně ten kroužek. Poté vysvětluje, jak se čtou (ovšem velmi složitě) velká čísla. Pak následuje podrobný popis matematických operací dle indického vzoru. Sčítání a odečítání doporučuje provádět zleva doprava, tedy od nejvyšších řádů, což je prý výhodnější a snadnější. Důrazně upozorňuje, že je třeba psát nuly.

Po odečítání al-Chwárizmí mluví o půlení, kde naopak doporučuje začít od řádu nejnižšího. Při lichém čísle vyjadřuje zbytek jako šedesátinný zlomek $\frac{30}{60}$. Teprve po půlení uvádí zdvojnásobování (není jasné, zda pořadí operací nezaměnili překladatelé či opisovači). Obě operace považuje za dvě zvláštní operace. Poté pojednává o násobení a upozorňuje, že je třeba znát malou násobilku. Konečně následuje operace dělení.

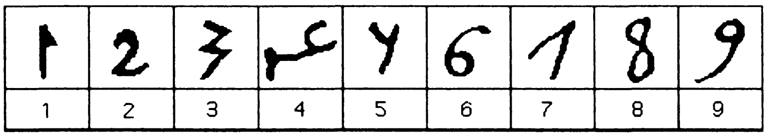
Vlastní výpočty doporučuje al-Chwárizmí provádět na desce posypané prachem nebo pískem. Mezivýpočty se mazaly, později, když se již používal papír, tak se škrtaly. Zdá se, že al-Chwárizmí věděl, že půlení a zdvojnásobování jsou zvláštní případy dělení a násobení, ale zavedl je zvlášť asi z důvodů odmocňování, které pomocí půlení prováděl. To ovšem v samotném rukopise není, a jak to dělal, známe z velmi podobného traktátu *Kniha Algorisma o aritmetické praxi* Joanna Sevilského z první poloviny 13. století, jehož jednu třetinu tvoří al-Chwárizmího aritmetický traktát. Al-Chwárizmího traktát se zachoval pouze v latinském překladu, který pochází z poloviny 12. století. Jediný známý rukopis byl vytvořen ve 13. století a je uchován v knihovně v Cambridge. Je neúplný a jsou v něm chyby, které jistě zanechal překladatel či opisovač. Studium tohoto textu však umožňují dochované latinské spisy, které jsou mu velmi blízké. Kdo přeložil al-Chwárizmího spis do latiny není zcela jasné.



Východoarabské číslice v polovině 10. století

V dochovaném rukopise se nacházejí symboly pouze pro číslice 1, 2, 3 a 5, jinak jsou využívány číslice římské a mnohdy jsou čísla vyjádřena slovně. Na některých místech číslice chybí a je pro ně pouze vynechané místo. Tvar cifer, které užíval samotný al-Chwárizmí neznáme a těžko můžeme něco usuzovat z rukopisu. Je možné, že pro číslice 1–9 užíval písmen arabské abecedy, což dělali matematici ještě dlouho po něm. Možná, že al-Chwárizmí využíval číslic východoarabských, které se se znakem pro nulu v arabských textech objevily v první polovině 10. století. V téže době se ovšem na Pyrenejském poloostrově objevují číslice západoarabské *džubar*, což v arabštině znamená písek či prach.

Zřejmě proto, že se tyto číslice psaly na desce posypané pískem. Východoarabské číslice se udržely v řadě zemí (Egypt, Sýrie, Turecko, Írán), ale jejich tvar se během staletí poněkud změnil. Staré západoarabské číslice se stále užívají v Maroku. Někdy se obě formy arabských číslic vyskytovaly vedle sebe v jediné práci.



Západoarabské číslice na počátku 14. století

Proces prosazování desítkového početního systému v arabských zemích byl poměrně pomalý. Při obchodu na tržištích se po dlouhé generace udržoval způsob počítání na prstech. Výsledek výpočtu se vyjadřoval slovně a zlomky se vyjadřovaly v šedesátkové soustavě. Pokud se čísla zapisovala, pak se užívalo písmen arabské abecedy, která nahrazovala číslice. Vedle tohoto systému, který se udržoval po mnoho dalších staletí, se rozvíjel indický desítkový poziční systém. V Evropě se tento číselný zápis objevil později, ale rozšířil se rychleji.

Část aritmetického traktátu al-Chwárizmího je věnována zlomkům. Autor popisuje počítání s šedesátinnými zlomky. Pokud používá obyčejné zlomky, pak je zapisuje jako zlomky kmenné (zlomky s čitatelem jedna). Desetinné zlomky al-Chwárizmí nepoužívá.

Rukopis al-Chwárizmího traktátu uložený v knihovně v Cambridge není jediným dochovaným arabským rukopisem věnovaným tomuto tématu. V roce 952 napsal v Damašku Abu l-Ḥasan al-Uqlídísí spis s názvem *Kniha kapitol o indické matematice*. Z textu vyplývá, že obchodníci stále počítali na prstech, třebaže ty mnohdy nestačí k výpočtům s velkými čísly. Na rozdíl od al-Chwárizmího, který počítal na desce, tento autor ukazuje, jak je možno výpočty zapisovat na papír. Vše vysvětluje na řadě příkladů.

Al-Káší

Al-Uqlídísí zřejmě poprvé mimo Čínu užil desetinných zlomků, nicméně nejde o zavedení desetinného systému jako takového. Autor tyto zlomky užívá pouze v souvislostí s operací půlení. Také proces přijímání desítkové poziční soustavy pro zlomky trval velmi dlouho. Souvisí to s rozšířením úplného pozičního šedesátkového systému, který se využíval v astronomii. Al-Samav'al (1125–1174) ve svém *Pojednání o aritmetice* z roku 1172 již chápal čísla v desetinném tvaru tak, jak je chápeme my. S tím rozdílem, že nezapsal např. 3, 14, ale slovy vyjádřil 3 plus 1 část z 10 plus 4 části ze 100. Stejně jako jeho předchůdci tedy stále užíval slov při popisu desetinných míst. Zřetelně ovšem chápal, jakým způsobem nám desetinná čísla umožňují aproximovat jak čísla racionální, tak iracionální. K dovršení desítkového pozičního systému v arabských zemích došlo až v díle al-Kášího. Tento matematik použil k oddělení celočíselné a desetinné části čísla svislé čáry.

Desítkový poziční systém v Evropě.

V 15. století tak došlo k završení vývoje indicko-arabského početního systému. V této době byl již systém rozšířen v byzantských zemích (zde byl nazýván „turecký"). Jedna z byzantských učebnic se v roce 1562 dostala do Benátek, a tím se zápis čísel s desetinnou částí dostal do Evropy. Ovšem plně používat se začal až od počátku 17. století.

Ve středověké Evropě zpočátku bezvýhradně vládlo počítání s římskými číslicemi, používání římských zlomků a jako početní pomůcka se používal *abakus*. V pracích, které se věnovaly počítání na abaku, se čísla vyjadřovala slovy nebo římskými čísly. Abakus byla většinou hladká deska posypaná pískem a rozdělená na několik sloupců, které odpovídaly jednotlivým řádům. Do těchto sloupců se kladly nebo zakreslovaly symboly jednotek těchto řádů. Na rozdíl od starověkých abaků se někdy jednotky nevyjadřovaly pomocí několika kaménků, ale pomocí zvláštních početních známek s vyobrazením příslušných číslic. Jak tyto obrazy, tak samotné známky nesly název *apices*. Jde o množné číslo slova apex, což mimo jiné znamená i způsob psaní.

Tato záměna kaménků či početních známek za apices nebyla příliš výhodná, a proto se později počtáři vrátili opět k původním neoznačeným známkám. My se o apices zmiňujeme proto, že hrály roli předchůdce moderních evropských číslic. Indo-arabské číslice tímto způsobem začaly pronikat do Evropy nejpozději v 10. století přes Španělsko. Nejstarší dochovaný rukopis, který obsahuje arabské číslice, pochází z roku 976 a byl nalezen v severním Španělsku v klášteře nedaleko města Logrono. Nějaký čas se číslice vyskytovaly bez nuly. Nad číslicemi se dělaly tečky, které udávaly řád číslice. Později se objevila nula ve tvaru kroužku. Samotné označení cifra pochází z arabského *as-syfr*, což bylo právě označení pro nulu. Tento význam delší dobu slovo cifra i mělo. Trvalo jistou dobu, než se prosadilo *cephirum* (odtud italské zero) Leonarda Pisánského (jiní autoři měli různé názvy: kroužek, nic, označení ničeho), a slovo cifra znamenalo to, co znamená dnes. Pojem *nullus* (žádný) se v hovorové řeči matematiků různých zemí rozšířil na konci 15. století.

Rozhodující význam pro přijetí desítkové poziční soustavy a nových číslic mělo v Evropě seznámení se s latinskými překlady arabských matematických spisů, v prvé řadě s al-Chwárízmího aritmetickým traktátem. Vedle tohoto překladu sehrála značnou roli již zmíněná latinská kompilace *Kniha Algorisma o aritmetické praxi* od Joanna Sevilského, dále *Kniha zavedení Algorisma do astronomického umění sepsaná magistrem A* a latinský překlad Savasordovy *Knihy o měření*, v nichž se používal indicko-arabský číselný zápis. Znalost nové numerace se šířila poměrně rychle. Již v polovině 12. století se stává známou v Německu a Rakousku.

Jméno al-Chwárízmího v latinizovaném tvaru znělo nejčastěji *Algorithmus* nebo *Algorismus* a stalo se názvem nové aritmetiky. Termín algorismus používá již Leonardo Pisánský (kolem 1170–1250). Přibližně v té době se pak začíná mluvit o algoritmicích, tj. přívržencích algoristické aritmetiky, zatímco počtáře na abaku nazval abakisty již Gerbert (nar. mezi 930–945, zemř. v roce 1003 jako papež Sylvester II.). Počet prací o „algorismu" rychle rostl a začaly se objevovat i první práce v národních jazycích.

Spolu s desítkovou poziční soustavou se do Evropy přenesly i šedesátinné zlomky, které se používaly při astronomických výpočtech. Snahy o vytvoření jednotného šedesátkového systému pro celá čísla i zlomky se v Evropě nesetkaly s velkým pochopením. Zlomky se nadále vyjadřovaly jako zlomky kmenné a při astronomických nebo trigonometrických výpočtech se užívaly zlomky šedesátinné. Používání systému šedesátinných zlomků bylo jedním z předpokladů pro zavedení zlomků desetinných. V anonymním spisku ze 14. století *Algorismus zlomků* se poukazuje na to, že místo základu 60 je možno vzít i základ 12 nebo 10, protože rovněž tato čísla mají dostatečné množství dělitelů.

K desetinným zlomkům došel ve svých trigonometrických tabulkách, poprvé vydaných v roce 1579 v Paříži, François Viète (1540–1603), který psal někdy pouze čitatele desetinných zlomků. Zásluha o první systematické zavedení desetinných zlomků ovšem patří až holandskému kupci, matematikovi a vojenskému inženýrovi Simonu Stevinovi (1548–1620), který ve vlámštině vydal v roce 1585 malou brožurku s příznačným názvem *Desetina.*

Termín zlomek se objevil v evropské literatuře jako překlad arabského *kasr* (z kasara = rozbíjet, lámat – již Babylóňané hovořili při odečítání a dělení o odlamování jednoho čísla od druhého). V překladu al-Chwárízmího aritmetického spisu se zlomek nazývá *fractio* (z latinského frangere = lámat, rozbíjet, rozdrobovat). Zlomková čára se objevuje u Leonarda Pisánského v roce 1202 a zhruba ve stejné době u západoarabského učence Muḥammada al-Ḥassára.

Algebra.

Nejvýznamnější přínos arabské matematiky leží zřejmě v oblasti algebry. Arabové převzali výsledky babylónské matematiky a na konci 9. století prostudovali klasická řecká díla. Poznali nejdůležitější myšlenku těchto prací – nutnost důkazu. Pochopili, že problém není vyřešen do té doby, než je dokázáno, že řešení je správné.

Co mohli Arabové již znát z algebry? Staří Babylóňané řešili řadu geometrických úloh, které bychom my řešili pomocí lineární rovnice nebo soustavy lineárních rovnic o více neznámých. Pojem neznámá ovšem Babylóňané neznali. Setkávali se rovněž s úlohami, které by vedly na rovnice kvadratické. Vrcholem řecké algebry byla Diofantova *Aritmetika*, komentovaná v dalším období Hypatií (370–415). Toto dílo je významné svojí symbolikou pro neznámou a její mocniny, dále tím, že zde Diofantos řeší obecně lineární a kvadratické rovnice a v jednom konkrétním případě i kubickou rovnici. Při tom používal pouze kladná celá čísla a zlomky. Největším přínosem Diofantovy *Aritmetiky* je ovšem jeho způsob řešení neurčitých rovnic.

Al-Chwárizmí.

Za otce arabské (a nejen arabské) algebry je považován al-Chwárizmí, který v první polovině 9. století napsal algebraický traktát s názvem *Krátká kniha o počtu algebry a al-muqábaly.* Na rozdíl od al-Chwárízmího aritmetického traktátu, o kterém jsme se již zmínili, dochoval se nám algebraický spis v daleko lepším stavu. Existuje úplný arabský rukopis z roku 1342, který je uložen v knihovně oxfordské univerzity. Kromě toho existuje několik latinských rukopisů vycházejících buď z překladu zhotoveného v roce 1145 v Segovii Robertem z Chesteru, nebo z překladu Gherarda z Cremony, který byl vytvořen v Toledu.

Al-Chwárizmího algebraický traktát se skládá ze tří částí:

1. z vlastní algebraické části, za kterou následuje malá kapitola o obchodních smlouvách,
2. z nevelké geometrické kapitoly o měření a
3. z obsáhlé knihy o závětích.

V latinských překladech druhá a třetí část chybí. Ve všech textech jsou nepatrné odchylky. Al-Chwárizmí nepoužíval žádnou symboliku, jeho výklad je čistě slovní, a proto je pro nás jeho studium obtížné. Cílem bylo vytvořit příručku k řešení úloh vyskytujících se v každodenním praktickém životě. Více než polovinu knihy zabírají úlohy o závětích a dědictví. Muslimské dědické právo je podřízeno přísným a složitým předpisům, které určují podíly dědiců v souvislosti se stupněm příbuznosti a omezují práva odkazujícího. Před právníky tak stály velmi složité problémy, které v zájmu procvičení dostaly v učebnici ještě komplikovanější tvar.

První část al-Chwárizmího algebraického spisu je nauka o řešení lineárních a kvadratických rovnic s celočíselnými koeficienty. Autor klasifikuje šest typů lineárních a kvadratických rovnic a ukazuje způsob jejich řešení. Přitom předvádí, jakým způsobem je možno zadanou rovnici převést na některý z těchto tvarů:

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = c$
3. $ax = c$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$
6. $ax^2 = bx + c.$

Toto jsou takzvané normální tvary rovnic, kde a, b, c jsou kladná celá čísla. Rovnice, které nemohou mít žádné kladné řešení, neuvažoval. Řešená rovnice musí být převedena na některý z těchto tvarů. Pokud se v rovnici vyskytuje odečítaný člen, pak se použije operace *al-džabr*, což není nic jiného, než že se k oběma stranám rovnice přičte tento člen. Dále se všechny členy stejného řádu sloučí v jeden pomocí operace *al-muqábala*. Mimoto je třeba vydělením převést člen u x^2 na jedničku, protože pravidla u rovnic (4)–(6) jsou formulována právě pro tento případ. Až do 17. století se rovnice typu (1) brala jako lineární a nulové řešení se neuvažovalo. Rovněž záporná řešení rovnic al-Chwárizmí neuvažoval. Podrobněji se jednotlivými řešeními zabývat nebudeme.

Název operace *al-džabr* se brzy počal používat pro označení celé nauky o rovnicích. V podstatě odpovídá anglické výslovnosti slova algebra. Západní Arabové vyslovovali „dž“ jako „g“, tedy algebra.

Otázka pramenů al-Chwárizmího algebraického traktátu není vyřešena. Opírá se o místní tradici ovlivněnou jak indickými, tak řeckými vlivy. Používá geometrické zdůvodňování postupu řešení, přesto se jeho koncepce liší od Eukleidových *Základů*. Rovněž s Diofantem má některé společné prvky. Zdá se, že vzhledem k Diofantově *Aritmetice* je al-Chwárizmího spis krokem zpět, neboť autor řeší jednodušší úlohy a pracuje bez matematické symboliky. I čísla jsou vyjádřena slovně. Je to ovšem dáno charakterem práce, kterou samotný autor považoval za učebnici využívanou při řešení praktických problémů. Zdá se, že al-Chwárizmí Diofantovu práci neznal, protože ta byla přeložena do arabštiny až v pozdějším období.

Al-Chwárizmího spis významně ovlivnil vývoj algebry právě pro svoji jednoduchost a systematičnost výkladu řešení kvadratických rovnic. Dlouhou dobu se myslelo, že šlo o první arabskou algebraickou práci. Ve 20. století nalezený spis s názvem *Kniha o algebře a al-muqábale*, jehož autorem je al-Chwárizmího současník ^{c}Abd al-Ḥámid ibn Wási^c ibn Turk, obsahuje vlastně totéž jako traktát al-Chwárizmího. Nejsme schopni zjistit, který vznikl dříve. Jisté je, že byly napsány zhruba ve stejné době. Z toho je vidět, že algebraické myšlenky se musely objevit v oblasti arabského světa velmi brzy, když mohly v tomto období vzniknout dvě tak kvalitní díla. Nicméně vývoj algebry ovlivnila pouze al-Chwárizmího práce. Pro rozvoj algebry měla stejný význam jako pro elementární geometrii Eukleidovy *Základy*.

Další vývoj arabské algebry.

Již krátce po pracích al-Chwárizmího a ibn Turka se objevily další algebraické práce. Autorem první z nich byl Abú Kámil Šudžá' ibn Aslam ibn Muḥammad al-Ḥásib al-Miṣrí (asi 850–930), který pocházel z Egypta a jehož spis nese také název *Kniha o algebře a al-muqábale*. Spis je znám z latinského a starohebrejského překladu z poloviny 15. století. Také Abú Kámil se omezil pouze na kvadratické rovnice, ale na rozdíl od al-Chwárizmího se v jeho rovnicích velmi často pracuje s iracionalitami. Také ve způsobech řešení samotných rovnic se často liší. Na rozdíl od al-Chwárízmího spisu jeho práce neobsahuje žádnou problematiku geometrie a dědictví. Abú Kámil naopak řešil i neurčité problémy.

Další krok v rozvoji algebry představují práce Abú Bakra Muḥammada ibn al-Ḥasana al-Karadžího, který zemřel v Bagdádu kolem roku 1019. Jeho nejvýznamnější algebraické dílo z roku 1010 nese název *Al-Fachrí* a obsahuje vše podstatné z práce Abú Kámila. Na mnoha místech ovšem tuto práci doplňuje. Autor například systematicky pracuje s mocninami neznámé a poukazuje na to, že jejich stupeň není ničím omezen. Je patrné, že al-Karadží byl již ovlivněn Diofantovou *Aritmetikou*.

Systematickému řešení kubických rovnic se ve své knize *O důkazech úloh algebry a al-muqábaly* věnoval Omar Chajjám. Konstatoval, že metody, kterými jsou řešeny rovnice kvadratické, v tomto případě selhávají. Kubické rovnice proto řešil geometricky pomocí kuželoseček. Nejvýznamnější přínos jeho práce představuje klasifikace kubických rovnic, geometrické konstrukce kořenů a určení počtu a podmínek existence kladných řešení. Celkem vyšetřoval 14 typů kubických rovnic, které mohou mít kladná řešení.

I v dalším období se arabští matematici zabývali řešením rovnic. Uveďme zde alespoň jméno al-Kášího, který se zabýval řešením rovnic čtvrtého stupně. Zda tomuto problému věnoval samostatný spis, dosud nevíme.

Trigonometrie.

V matematice islámských zemí zaujímala trigonometrie důležité místo. Byla článkem, který spojoval matematiku s hlavní přírodní vědou té doby - astronomií, dále s problematikou výpočtu kalendáře a s naukou o slunečních hodinách. Přitom si je třeba uvědomit, že sluneční hodiny byly v arabském světě, kde je obloha zřídka pokryta mraky, velmi užitečné a rozšířené.

Hipparchos

Dříve než se arabští matematici začali zabývat řešením trigonometrických úloh, seznamovali se s pracemi svých předchůdců. K nim patřily práce řeckých matematiků helénistického období, a to Ptolemaiův *Almagest* a Meneláova *Sférika*. Trigonometrie se objevila v alexandrijské matematice zřejmě poprvé u Hipparcha (190–120 př. n. l.), který jako první začal tabelovat trigonometrické poměry pro potřeby řešení trojúhelníků při astronomických výpočtech. Zatímco pro Eukleida byl základním úhlem úhel pravý, pomocí jehož násobků či zlomků vyjadřoval úhly obecné, pak Babyloňané kolem roku 300 př. n. l. rozdělili kruh na 360 částí, nazvaných stupně, a během příštích dvou století se jejich systém dělení na stupně, minuty a vteřiny rozšířil v řeckém světě. Řekové využívali při svých výpočtech tabulky délek tětiv pro kružnice různých poloměrů. Hipparchovy tabulky se sice nedochovaly, ale je známo, že zachycovaly délky tětiv pro úhly od $7\frac{1}{2}°$ do $180°$ s krokem $7\frac{1}{2}°$. Hipparchos přitom použil poloměr kružnice $R = 3438$.

Rovinnou a sférickou trigonometrií začíná první kniha *Almagestu*. Ptolemaios nejprve vyložil některé věty nutné pro sestavení tabulek tětiv a poté odvodil velikost tětivy pro úhel $\frac{1}{2}°$. Sestavil pak tabulku, která odpovídá dnešní tabulce sinů od $\frac{1}{4}°$ do $90°$. Přesnost těchto tabulek je pět desetinných míst a dlouhou dobu sloužily k řešení trojúhelníků. Ptolemaios současně ukázal, jak je možno interpolací stanovit hodnoty, které v tabulce chybí.

S výsledky indických matematiků se Arabové seznámili zřejmě dříve než s řeckými pracemi, a to v již dvakrát zmiňovaném astronomickém spise přeloženém v roce 773. Výsledky indických matematiků v oblasti trigonometrie nebyly hluboké, ale sehrály pro rozvoj této disciplíny velkou úlohu. Indové se opírali o práce helenistických autorů, ale přinesli mnoho nového. Zejména přešli od tětivy k poloviční tětivě, což není nic jiného než sinus. K tomu došlo v 5. až 6. století. Při výpočtu tabulek sinů užívali stejný poloměr kružnice jako Hipparchos, zdá se, že jeho práce znali. Konstrukci tabulky sinů známe dobře z práce Árjabhatty (narozen kolem roku 476), která vznikla v roce 499. Tabulky sinů, které zde nacházíme, jsou od $3\frac{3}{4}°$ do $90°$ s krokem $3\frac{3}{4}°$ (to odpovídá Hipparchovým tabulkám). Je zajímavé, že až do 12. století Indové neměli tabulky pro jemnější krok. Byli schopni ovšem hodnoty pro jiné úhly aproximovat.

Je pravda, že tětiva oblouku je rovna vždy dvojnásobku sinu polovičního oblouku, tedy závislost je zde zřejmá a konstatní, ale tento přechod k polovičnímu oblouku měl velký význam. Umožnil totiž přirozeně zavést další funkce, které vzájemně svázaly strany a úhly pravoúhlého trojúhelníka. S „funkcemi" sinus, kosinus a také sinusversus (rozdíl mezi poloměrem a kosinem) se setkáváme v Indii již koncem 5. století.

Matematici islámských zemí tím, že zavedli některé nové trigonometrické pojmy, vyšetřili mnohé jejich vlastnosti a vyřešili všechny případy rovinných a sférických trojúhelníků, postupně propracovali trigonometrii jako samostatnou oblast matematiky (název trigonometrie se však v tisku poprvé objevil koncem 16. století). Jednou z prvních arabských prací o trigonometrii byl al-Chwárizmího astronomický spis, který obsahoval tabulky sinů a tangent. Není ale jasné, zda tam tyto tabulky nebyly dodány až později. Můžeme však s určitostí tvrdit, že pojmy tangens a kotangens byly už současníkům al-Chwárizmího známy, a to nikoli jako délky vztahující se ke kruhu, ale při gnómonice, při srovnání stran pravoúhlého trojúhelníka. Šlo při tom buď o vertikální (*kotangens*) či horizontální (*tangens*) gnómón. Pro konkrétní délku tyče byla sestavena tabulka délky stínu pro jednotlivé výšky Slunce s krokem jednoho úhlového stupně. Je přitom pravděpodobné, že tento přístup k problému byl ovlivněn indickými pracemi, ve kterých se autoři zabývali měřením výšek a vzdáleností pomocí délky stínu svislé tyče a užitím podobnosti trojúhelníků. Zavedení tangenty a kotangenty bylo ovšem dílem Arabů. Dlouhou dobu se pro ně také používaly názvy „obrácený stín" a „stín". Naše dnešní názvy se objevily na přelomu 16. a 17. století. V případě vertikálního (horizontálního) gnómonu dostáváme *kosekans* (*sekans*) jako délku přepony. Třebaže teoretický přínos funkcí sekans a kosekans je minimální, jejich praktické používání při výpočtech značně usnadňovalo práci. Využívalo se jich například (při existenci příslušných tabulek a neexistenci logaritmů) k nahrazení dělení násobením.

Delší dobu arabští matematici využívali jak siny, tak tětivy. Někdy třeba i ve stejné práci. Trigonometrické funkce se ovšem prosazovaly stále více. Zcela propracované učení o nich nalézáme v díle astronoma a matematika Abú ᶜAbdalláha Muḥammada ibn Džábira al-Battáního (kolem 850–929), který ve své astronomické práci *Zdokonalení Almagestu* systematicky trigonometrických funkcí využíval a rovněž explicitně uvedl řadu vztahů mezi těmito funkcemi. Ještě systematičtěji vyložil trigonometrické funkce v astronomickém traktátu s názvem *Kniha dokonalosti* Abu 'l-Wafá Muḥammad ibn Muḥammad al-Búzdžání (940–997/8). Tento autor definoval všechny trigonometrické funkce jednotně pomocí kružnice.

Je pozoruhodné, že trigonometrických funkcí užívali Arabové pouze při řešení astronomických úloh. Rovinné trojúhelníky řešili arabští matematici s minimálním množstvím prostředků, a tedy značně komplikovaně. Většinou používali řecký způsob dělení trojúhelníka na dva pravoúhlé trojúhelníky s užitím výšky. Dokázali přitom sinovou větu a kosinovou větu pouze vyslovili, aniž jí přikládali nějaký význam (dnešní podobu této větě dal až François Viète). Pomocí trigonometrie se Abú ᶜAbdalláh Muḥammad ibn Júsuf al-Džajjání pokusil v 11. století určit výšku atmosféry, když se domníval, že ta končí na hranici viditelných oblaků. Al-Bírúní[4] zase využil trigonometrických úvah ke stanovení obvodu Země.

Co se týče sférické trigonometrie tak pouze konstatujme, že Ptolemaiovy a Meneláovy výsledky a metody značně obohatili Abu 'l-Wafa, al-Battání a zejména Násir ad-Dín at-Túsí (1201–1274). At-Túsí byl autorem mnoha desítek původních děl, překladů a komentářů. Mimo jiné se zabýval teorií rovnoběžek. Z hlediska trigonometrie je nejvýznamnějším dílem jeho traktát *Traktát o úplném čtyřstranu*. V úvodu této práce se věnuje rovinným trojúhelníkům, poté studuje trojúhelníky sférické.

K řešení trojúhelníků jsou třeba trigonometrické tabulky. Z období mezi 8. až 15. stoletím se nám zachovalo (nebo alespoň známe) více jak 100 exemplářů těchto tabulek, které pocházejí z různých oblastí arabského světa. Nejstarší tabulky z 8. století se přitom nezachovaly. Al-Chwárizmího tabulky vycházely z poloměru kružnice $r = 60$ (jednotkový poloměr se systematicky začal užívat až v 18. století zásluhou Eulera, třebaže ho doporučoval již Thomas Bradwardinus ve 14. století) a byly vyjádřeny v šedesátkové soustavě. Přesnost tabulek sinů, které byly vypočteny pro krok jednoho stupně, byla přitom tři šedesátinná místa (pro kotangens pouze jedno). Přesnost prvních arabských trigonometrických tabulek tak byla srovnatelná s přesností Ptolemaiových tabulek tětiv. Přesnější způsob výpočtu tabulek navrhl Abu 'l-Wafá, který pracoval s krokem $\frac{1}{4}^\circ$ a s přesností na čtyři šedesátinná místa (osm desetinných). Sestavil tabulku sinů a byl rovněž autorem tabulek pro tangens a kotangens s hrubším krokem. Další způsob výpočtu tabulek pak používal al-Bírúní. Přesnější tabulky, na kterých se podílel al-Káší, známe z 15. století ze Samarkandu. Al-Káší ve spise *Traktát o tětivě a sinu*, který doposud nebyl nalezen, publikoval originální iterační metodu, pomocí které vytvořil tabulky sinů i tangent s krokem $1'$ a s přesností na pět šedesátinných míst.

První tabulky tětiv v evropské středověké matematice se objevily u židovského matematika Savasordy (Abraham Bar Chijja, asi 1070 – 1136), který ke své hebrejsky psané knize s názvem *Kniha o měřeních* z roku 1116 přiložil rozsáhlou tabulku tětiv. Knihu do latiny přeložil v roce 1145 Plato z Tivoli. Z hlediska historického je to kniha zajímavá například tím, že poprvé byla trigonometrická tabulka určena k řešení pozemských problémů, a nikoli problémů nebeských. Brzy po této knize byl do latiny přeložen al-Chwárízmího astronomický traktát. Na konci 12. století se objevil ve Francii anonymní latinsky psaný spis, jehož autor již znal tabulky sinů, ale jak se zdá, nevěděl nic o dalších funkcích.

Regiomontanus

[4] Abú 'r-Rajhán Muhammad ibn Ahmad al-Bírúní (973–1048) pocházel z území dnešního Uzbekistánu. Byl to všestranný vědec, který se zabýval matematikou, astronomií, fyzikou, medicínou, farmakologií, chemií, mineralogií a historií.

Arabské výsledky v trigonometrii byly hlavním východiskem prací německého matematika Johanna Müllera (1436–1476), zvaného podle latinského názvu svého rodiště Regiomontanus. Jeho dílo *O trojúhelnících všelikých knih patero*, které napsal během svého pobytu v Itálii, je převážně převzato z arabské literatury, studoval ale také Ptolemaiův *Almagest*. Regiomontanus poznatky skvěle vyložil a doplnil vlastními výsledky a důkazy. Práce byla napsána v 60. letech 15. století, ale tiskem vyšla až v roce 1533 v Norimberku. Je možno ji považovat za první práci, ve které se trigonometrie vyděluje jako samostatná matematická disciplína. Regiomontanus při výpočtu tabulek sinů užíval kružnice s poloměrem 60 000, resp. 10 000 000. To mu umožňovalo obejít se bez desetinných čísel a přitom určit hodnoty sinů s přesností na 7 cifer.

Podívejme se ještě na to, jak vznikaly dnešní názvy trigonometrických funkcí. Název sinus vznikl poměrně kuriozním způsobem. Indové ve svém jazyce užívali označení *polovina tětivy*. Árjabhatta toto slovo zkracoval na *džíva*. Arabové tento název převedli foneticky na *džiba*, slovo, které jinak nemá v arabštině žádný význam. Ovšem protože arabština při psaní nepoužívá samohlásky, psalo se toto slovo zkráceně. Později se opisovači domnívali, že zkratka znamená *džaib*, což značí v arabštině ňadra, prsa, hruď, výstřih či vypuklost. Když pak bylo ve 12. století toto slovo překládáno do latiny, Robert z Chesteru ho přeložil s tímto významem jako *sinus*. A takto pak vstoupilo do většiny evropských jazyků.

Kosinus nazývali Indové „sinus zbytku“ (doplňku do 90°). Takto také označoval kosinus Regiomontanův učitel Georg Peurbach (1423–1461) – *sinus complementi* – odtud přehozením slov a zkrácením dostáváme dnešní název. Označení tangens (dotýkající se) navrhl v roce 1583 Thomas Fink (1561–1656) a výraz kotangens (a také kosinus) pochází z roku 1620 od Edmunda Guntera (1581–1626).

4. Přenos klasických řeckých děl.

V této části si ukážeme, jakým způsobem se středověká Evropa seznamovala s odkazem řecké matematiky. Budeme sledovat postupné přenášení nejvýznamnějších řeckých matematických děl z antiky až do konce středověku, tedy do období, kdy začala postupně vycházet tiskem. V tomto procesu sehráli arabští matematici nezastupitelnou úlohu.

Eukleidés.

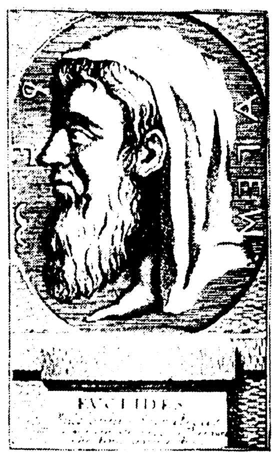
O životě Eukleida víme velmi málo, či spíše nic. Proklos (410–485) o Eukleidovi napsal, že pracoval v době vlády Ptolemaia I., tedy ve 3. století před naším letopočtem. Obecně se předpokládá, že Eukleidés působil v alexandrijském *Museu*, což byla státem financovaná vědecká instituce s obrovskou knihovnou. Eukleidovo jméno je často zaměňováno se stejnojmenným filozofem Eukleidem z Megary, který žil asi v letech 450–380 př. n. l.

Eukleidovou nejvýznamnější matematickou prací, která je současně asi nejvýznamnější matematickou prací v dějinách lidstva, jsou *Základy* (řecky Stoicheia, latinsky Elementa). Kromě Bible neexistuje žádná kniha, která by vyšla v tolika vydáních a překladech. Dílo je tvořeno 13 knihami (kapitolami). *Základy* jsou kompendium, které bylo sestaveno Eukleidem z mnoha matematických prací a z různých oblastí matematiky. Tak například 5. kniha pochází od Eudoxa z Knidu (asi 408–355 př. n. l.) a část 10. knihy bývá připisována Theaitetovi Athénskému (asi 414–369 př. n. l.). Je možno říci, že *Základy* pokrývají prakticky všechny tehdejší řecké znalosti matematiky. Celá práce je napsána podle jednotného logického schématu a byla pokládána za vzor deduktivní soustavy a velmi důsledného výkladu vycházejícího z obecných tvrzení a jdoucího od nich k tvrzení speciálním.

Prvních šest knih je věnováno geometrii v rovině, knihy VII.–IX. jsou věnovány algebře, aritmetice a teorii čísel. V X. knize se Eukleidés zabývá souměřitelnými a nesouměřitelnými veličinami. Knihy XI. a XII. jsou věnovány trojrozměrným geometrickým tělesům a ve XIII. knize jsou studovány pravidelné mnohostěny.

Eukleidových 13 knih bylo později doplněno o dvě další knihy. XIV. knihu napsal jiný alexandrijský matematik Hypsikles, který žil ve 2. století př. n. l., zatímco XV. kniha, která je na nižší úrovni, pochází až ze 6. století našeho letopočtu. Obě tyto knihy jsou věnovány pravidelným mnohostěnům.

Kromě *Základů* Eukleidés napsal ještě další práce, z nichž *Data* představují jakýsi dodatek k prvním šesti knihám *Základů*. Eukleidés je rovněž autorem spisu *O dělení obrazců*, který se zachoval pouze díky arabskému překladu. Naopak další geometrická práce *Kuželosečky* se nedochovala.



Eukleidés

Podívejme se nyní na to, jakým vývojem prošly Eukleidovy *Základy* do současných dní. Nejstarší zlomek tohoto díla byl nalezen v Egyptě a pochází z roku 225 př. n. l. Tento zlomek obsahuje pouhá dvě tvrzení z XIII. knihy. Zhruba z roku 100 př. n. l. pochází papyrus obsahující část II. knihy.

Vidíme, že Eukleidovy *Základy* byly znovu vydávány již od svého vzniku. Mnozí editoři k nim přidávali své komentáře a snad i nová lemata. Z Proklových komentářů z 5. století je zřejmé, že již před nimi existovala řada podobných komentářů. Nejstarším (nám známým) byl komentář Heróna Alexandrijského, který se nedochoval, a kromě Prokla se o něm zmiňuje i arabský matematik Abu 'l-ᶜAbbás al-Fadl ibn Hátim al-Najrízí (875–940). Podobně ztraceny jsou i komentáře Pappovy (2. století), ze kterých se dochoval jen arabský překlad části týkající se X. knihy. Následují komentáře řeckého filozofa Simplikia, který pracoval v první polovině 6. století. Rovněž jeho komentář známe díky al-Najrízímu.

Jedním z nejznámnějších editorů *Základů* byl Theon Alexandrijský, který pracoval ve 4. století našeho letopočtu. Mnoho zachovaných řeckých rukopisů *Základů* vychází právě z jeho vydání. Theon částečně upravil text pro snadnější pochopení některých částí. Nejstarší z jeho vydání je nyní v knihovně oxfordské univerzity a pochází z roku 888. Existuje ovšem i starší rukopis *Základů*, který je uložen ve vatikánské knihovně, ten však nevychází z Theonova vydání, ale z nějakého dřívějšího, které se nedochovalo. K tomuto faktu došel po podrobném studiu obou textů na počátku 19. století François Peyrard. Na základě studia všech dostupných rukopisů pak vytvořil v 80. letech 19. století dánský vědec J. L. Heiberg tzv. „kritické vydání", které se nejvíce blíží původnímu řeckému textu. Mimořádný význam má pak vydání Thomase Heathe (1861–1940)[5] z roku 1908, které odpovídá právě této verzi.

Thomas Heath

Zaměřme se nyní na šíření *Základů* v arabském světě. Počáteční fázi přejímání Eukleidova odkazu popisuje v 10. století ve své biograficko-bibliografické encyklopedii s názvem *Fihrist* Muḥammad al-Nadím. Rukopis *Základů* se do arabských zemí dostal z Byzance nejpozději v období vlády al-Manṣúra ve třetí čtvrtině 8. století. Je možno předpokládat, že nějaký rukopis mohl být nalezen na území dobytém Araby. První překlad Eukleidových *Základů* provedl al-Hadždžádž ibn Júsuf ibn Maṭár (asi 786–833) za vlády chalífa Hárúna ar-Rašída a druhý později za vlády al-Ma'múna. Ve druhém revidovaném překladu vyplnil některé mezery a opravil chyby. První al-Hadždžádžův překlad se nedochoval. Zcela jistě víme, že máme k dispozici prvních šest a část sedmé knihy druhého překladu včetně al-Najrízího komentáře. Zdá se, že máme i knihy IX.–XIII., pouze kniha VIII. se nedochovala.

Další překlad *Základů* vytvořil Isḥáq ibn Ḥunajn a rovněž jeho překladu se dostalo přepracování, které provedl Thábit ibn Qurra.[6] Je pravděpodobné, že při překladu měli oba k dispozici al-Hadždžádžův překlad, protože v některých knihách jsou rozdíly jen nepatrné. Na druhé straně podrobné zkoumání textu ukazuje, že tento nový překlad je mnohem bližší původní řecké verzi. Ibn Ḥunajnův překlad se v rukopise nedochoval, ovšem z ibn Qurrova revidovaného překladu se dochovalo nejméně 19 rukopisů. Nejstarší z nich, který pochází z 10. století, se nachází v Teheránu.

Kromě úplných překladů *Základů* existovala ještě řada překladů pouze některých knih. Celý al-Nadímův seznam autorů, kteří se studiu Eukleida věnovali, svědčí o mimořádném zájmu Arabů o jeho dílo. Kromě překladů šlo o přehledy, komentáře a opravy. Autorem nejznámějšího přehledu byl lékař, filozof, astronom a encyklopedista Ibn Sína, známý pod latinizovaným jménem Avicenna (980–1037). Ve své encyklopedii *Knihy uzdravení* prezentoval v části věnované geometrii všech 15 knih *Základů*, ovšem se zkrácenými důkazy. Nebyl v tomto ohledu sám, ale o dalších podobných pracích se zmiňovat nebudeme.

[5] Thomas Little Heath patřil k největším znalcům řecké matematiky. Postupně vydal díla Apollónia, Archiméda a Eukleida. Je autorem slavného díla *History of Greek Mathematics*, které vyšlo v roce 1921.

[6] Thábit ibn Qurra (830–901) se narodil v Harránu v dnešním jižním Turecku. Kolem roku 870 přišel do Bagdádu a začal pracovat v *Domě moudrosti*. Byl významným překladatelem a komentátorem řeckých děl. Nejvýznamnějších vlastních výsledků dosáhl zejména v algebře a teorii čísel.

Pro rozvoj arabské matematiky měly ovšem mnohem větší význam komentáře Eukleidových *Základů*. Nejznámnější z nich je *Výklad Eukleida* z roku 1248 od Násíra aṭ-Ṭúsího, který podobným způsobem zpracoval řadu dalších řeckých matematických, astronomických a optických prací. Aṭ-Ṭúsi při své práci využil všech čtyř úplných překladů a jeho komentář pokrývá všech 15 knih.

Existuje ještě jeden podrobnější komentář prvních 13 knih, který je aṭ-Ṭúsímu rovněž připisován. Byl vytištěn v Římě v roce 1594 a zachovaly se dva výtisky, které jsou v knihovně ve Florencii. Nicméně v jedné části této práce je uvedeno, že byla napsána v roce 1298, tedy 24 let po aṭ-Ṭúsího smrti. Tyto anonymní komentáře jsou dalším zdrojem informací o arabském studiu Eukleidových *Základů*. Z nich je vidět, jak velké kroky učinili Arabové v odstraňování všech možných obtíží a nejasností. Do textu byly zařazeny příklady k objasnění některých příliž obecných tvrzení, na druhé straně naprosto elementární věci byly vynechány. Některá tvrzení byla vyjadřována jako tvrzení jediné, implicitní tvrzení byla vyjádřena explicitně ap. Autor komentářů píše, že všechny tyto úpravy nebyly dělány přímo do textu, nýbrž někam na okraj nebo mezi řádky. Při dalších překladech či opisech se ovšem mohly dostat do vlastního textu. Z toho je patrné, jak složitý je úkol rekonstruovat původní Eukleidovo dílo.

O charakteru tzv. „oprav" je těžké hovořit, protože se nezachovaly a známe je jen z citací jiných autorů. Jednu z takových oprav napsal al-Kindí.[7]

Je pozoruhodné, že práce, které pojednávaly o Eukleidových *Základech*, napsali i lidé, kteří se matematikou přímo nezabývali. Například córdobský filozof Ibn Rušd (Averroes, 1126–1198), nejvýznamnější arabský filozof v západní části říše, napsal spis o tom, co je třeba znát z Eukleida při studiu Ptolemaiova *Almagestu.*

V arabském světě ovšem neexistovaly pouze arabsky psané práce, nýbrž také práce v jiných jazycích. Existují dva hebrejské překlady *Základů* z let 1225–1270, ale také jeden překlad syrský. Velmi často byly řecké práce do arabštiny poprvé přeloženy právě ze syrštiny, zdá se však málo pravděpodobné, že by tomu tak bylo i v případě *Základů*. Předpokládá se, že první syrský překlad vznikl v 11. nebo 12. století, tedy mnohem později než první překlady arabské. Zachovaly se i zlomky arménského překladu, který je možno datovat do 11. století. Překlady do perštiny vznikají až v mnohem pozdějším období.

Na závěr už pouze konstatujme, že do arabštiny byla přeložena i kratší Eukleidova díla *Data, Fenomena, O dělení obrazců* a *Optika.*

První známou latinskou zmínku o Eukleidových *Základech* najdeme v Ciceronově (106–43 př. n. l.) *De oratore* dlouho před tím, než se kdo začal zabývat myšlenkou přeložit je do latiny. Zlomky latinského překladu částí XII. až XIII. knihy *Základů*, které pochází z přelomu 5. a 6. století, nacházíme na palimpsestu,[8] který je uložen ve Veroně. Je možné, že jde o část originál-

---

[7] Abú Júsuf Ja^{c}qúb ibn Isḥáq al-Kindí (zemřel asi v roce 873) působil v *Domě moudrosti.* Zabýval se filozofií, matematikou, astronomií, chemií a optikou. Ve svých filozofických pracích usiloval o spojení islámu s Aristotelovou filozofií.

[8] Palimpsest – pergamenový rukopis napsaný na listy již dříve popsané, jejichž původní text byl mechanicky odstraněn.

ního překladu novoplatónského filozofa Boëthia (480-524). Boëthiův překlad zahrnoval pouze definice, postuláty a axiomy prvních pěti knih, znění většiny tvrzení z prvních čtyřech knih a důkazy pouhých tří vět z první knihy. Kromě Boëthiova překladu existovaly i další podobné neúplné překlady. Velmi malý zlomek I. a II. knihy z 9. století se zachoval v Mnichově. Zde je patrné, že překladatel nerozuměl matematickému textu a rovněž neovládal dobře latinskou gramatiku. V tomto případě se zdá velmi nepravděpodobné, že by toto vydání mohlo vycházet z Boëthiova překladu.

Úplný překlad I.–XIII. a XV. knihy z řečtiny do latiny vznikl kolem poloviny 12. století buď v jižní Itálii, nebo na Sicílii. V téže době zde vznikl překlad *Almagestu*, dalších tří Eukleidových děl a Proklovy práce *Elementatio physica*. Předpokládá se, že všechny tyto překlady měly stejného autora, kterého však neznáme. Víme pouze, že překladatel studoval medicínu v Salernu. Když zjistil, že v Palermu je dostupný exemplář *Almagestu*, odjel tam a dílo přeložil. Vzhledem k tomu, že se zde o Eukleidovi nezmiňuje, je možné usuzovat, že k překladu *Základů* došlo později. Tento překlad byl ovšem ve středověku neznámý a neovlivnil tak tehdejší matematiku.

Boëthius

Třebaže Boëthiův překlad sehrál jistou roli ve středověké výuce geometrie, nemohl ve své podobě výrazně ovlivnit rozvoj matematického poznání. V okamžiku, kdy došlo k prvním překladům *Základů* z arabštiny do latiny, ztratily tyto neúplné a zlomkovité překlady zcela na významu. Při překladu z arabštiny byly využívány oba arabské překlady – jak al-Hadždžádžův, tak překlad Isháqa ibn Hunajna přepracovaný Thábitem ibn Qurrou.

Překlad matematika a filozofa Adelharda z Bathu vychází převážně z arabského překladu al-Hadždžádžova. S Adelhardovým jménem byly spojovány tři verze Eukleidových *Základů*. Tyto verze se v literatuře označují římskými čísly I, II a III. To, že Adelhardův překlad vychází z překladu al-Hadždžádže, je snadno poznat z důkazů v I. verzi, které korespondují s překladem al-Hadždžádže. Na druhé straně je vidět, že Adelhard neměl k dispozici stejný al-Hadždžádžův překlad, který známe dnes my. Je ale zřejmé, že žádný řecký text k této první verzi Adelhard nevyužil. Nedochoval se žádný kompletní exemplář Adelhardova překladu, ale podařilo se ho sestavit z několika částí. Pouze kniha IX., prvních 35 vět knihy X. a poslední tři věty knihy XV. chybí.

Verze II je zkráceným vydáním Eukleida. Právě toto „stručné“ latinské vydání bylo bezesporu nejpopulárnějším. To vyplývá nejen z toho, že z tohoto překladu se zachovalo nejvíce rukopisů (zhruba 50, jeden v Praze v Národní knihovně), ale zejména z toho, že tento překlad byl nejčastěji používán ve školách a při dalších vydáních. Charakteristickým znakem verze II jsou důkazy, které nejsou většinou opravdovými důkazy, ale jen návody, které mohou vést toho, kdo chce důkaz vytvořit. Verze III obsahuje rovněž podobné komentáře, ale tentokrát jako součást úplných důkazů.

Menso Folkerts[9] podrobil verzi II podrobnému zkoumání a došel k názoru, že byla nejprve napsána bez jakýchkoliv důkazů, a ty byly přidány k textu postupně během delší doby. Přitom Folkerts uvádí, že samotná tvrzení ve verzi II jsou převzata z Boëthia, z verze I nebo z překladu Hermanna z Dalmácie. Folkerts se domnívá, že kompilátorem tohoto díla mohl být Robert z Chesteru, který byl přítelem a spolupracovníkem Hermanna z Dalmácie. Co se týče verze III tak Folkerts uvádí, že vznikla jako komentář pravděpodobně až na konci 12. století.

Latinské *Základy*, přeložené převážně z arabské verze „Isḥáq – ibn Qurra", vytvořil jeden z nejvýznamnějších středověkých překladatelů přírodovědných, filozofických a lékařských prací Gherardo z Cremony. Jeho překlad je nejbližší původnímu řeckému vydání ze všech překladů z arabštiny do latiny. Je to dáno tím, že vychází právě z „Isḥáq – ibn Qurrovy" verze. Nejedná se ovšem o doslovný překlad, nýbrž o překlad částečně upravený. Ke změnám ovšem mohlo dojít až v dalších letech, protože nejstarší dochovaný rukopis pochází až ze 14. století. Jako jediný obsahuje úvod ke XIV. knize, který ve všech ostatních překladech chybí. Paradoxní je, že byl v dalším období mnohem méně užíván než vydání Adelhardova. Gherardo se podílel rovněž na překladu al-Najrízího komentáře *Základů* a dalších dvou komentářů X. knihy.

Z 12. století existuje ještě další překlad *Základů*, jehož rukopis obsahující prvních 12 knih je uložen v pařížské Národní knihovně. Jeho autorem je zřejmě Hermann z Dalmácie, který žil ve Španělsku v polovině 12. století. Při tomto překladu je obtížné určit, odkud vlastně vycházel, zdá se však, že to byl překlad al-Hadždžádžův a možná přímo latinský překlad Adelhardův.

Folkerts uvádí, že není znám žádný arabský text, ze kterého by přímo vycházely překlady Hermanna z Dalmácie, Gherarda z Cremony či Adelharda z Bathu. Žádný z nich nebyl vytvořen z jediného arabského překladu a v tom se *Základy* liší od děl Archimédových nebo od Ptolemaiova *Almagestu*.

O „Adelhardovu" verzi II a některé další texty se opírá vydání *Základů* od Giovanniho Campana z Novary pocházející z poloviny 13. století. Campano doplnil překlad vlastními vysvětlivkami a úvahami. Společně s verzemi II a III se toto vydání stalo nejvýznamnějším zdrojem pro další edice. Srovnáme-li Campanovo vydání z Heibergovým „originálním řeckým Eukleidem", pak se od něj příliš neliší.

Campanovo vydání posloužilo k prvnímu úplnému tištěnému vydání *Základů*, které vyšlo roku 1482 v Benátkách v dílně německého tiskaře Erharda Ratdolfa (kolem 1443–1528). Jako jedno z prvních matematických tisků obsahovalo nákresy. V revidované podobě vydal Campanovu edici v roce 1509 Luca Pacioli (kolem 1445–kolem 1514), který tak reagoval na Zambertiho řeckolatinský překlad z roku 1505. K tištěnému vydání Eukleida se připravoval Regiomontanus, který shromáždil několik rukopisů Adelhardova překladu a Campanova vydání, která kriticky zpracovával. Jeho předčasná smrt práci ukončila.

Bartolomeo Zamberti (kolem 1473–po roce 1539) vycházel z původního řeckého Theonova textu, což on sám považoval za přednost, a napadl dosavadní

[9] Menso Folkerts, nar. 1943, profesor pro dějiny matematiky na univerzitě v Mnichově.

překlady. Paciolilio revize byla reakcí na tento výpad. V dalším období se objevila vydání, která byla vytvořena tak, že za každou větou následoval nejprve Campanův a poté Zambertiho (Theonův) důkaz. Další řecko-latinský překlad provedl v roce 1572 Federico Commandino. V Basileji byl v roce 1533 vydán Eukleidés přímo v řečtině německým teologem Simonem Grynaeusem (zemř. 1541). Toto vydání bylo významné tím, že obsahovalo rovněž Proklovy komentáře, které byly později přeloženy Barociem (1537–1604) v roce 1560 do latiny. Zde se však již dostáváme za rámec středověku, a proto další vývoj sledovat nebudeme. Na závěr pouze uveďme, že jediné české vydání Eukleidových *Základů* vytvořil v roce 1907 František Servít.

Archimédes.

Archimédes

Archimédes byl asi největším matematikem starověku a možná největším matematikem vůbec. Žil pravděpodobně v letech 287 – 212 př. n. l. v Syrakusách na Sicílii, kde se i narodil. Je velmi pravděpodobné, že studoval v Alexandrii, kde získal řadu přátel, se kterými udržoval korespondenci (Eratosthenés). Zahynul při dobytí Syrakus Římany. Kromě matematiky se Archimédes zabýval fyzikou (Archimédův hydrostatický zákon) a mechanikou (Archimédův šroub, využívání pák, kladek, kladkostrojů a šroubů při konstrukci mechanických strojů).

Archimédes je autorem 10 matematických prací, které se nám zachovaly v řečtině. Tyto práce byly sepsány zřejmě v tomto pořadí: *O rovnováze ploch, Kvadratura paraboly, Poselství Eratosthénovi o mechanické metodě na řešení geometrických úloh, O kouli a válci, O spirálách, O konoidech a sféroidech, O plovoucích tělesech, Měření kruhu, O počítání písku, Stomachion.* Díky Pappovi se zachovalo svědectví o Archimédově objevu polopravidelných mnohostěnů, tj. takových konvexních mnohostěnů, jejichž všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky více než jednoho druhu. Archimédes jich našel 13. Archimédovi je rovněž připisována *Úloha o Héliových býcích*, která vede na řešení Pellovy rovnice $x^2 - Dy^2 = 1$, kde $D = 4729494$. Kromě těchto prací známe i některé další Archimédovy práce, které se nám dochovaly díky arabským matematikům.

Nejznámější Archimédovou prací ve středověku byl asi spis *O měření kruhu*, ve které metodou opsaných a vepsaných mnohoúhelníků ukázal, že „poměr obvodu kružnice k jejímu průměru je menší než $3\frac{1}{7}$ a větší než $3\frac{10}{71}$". Z této práce se zachoval v řečtině jen zlomek, který sestává pouze ze tří vět. Na rozdíl od Eukleida Archimédes často ukazuje, jakým způsobem ke svým výsledkům došel dříve, než přistoupil k jejich přesnému důkazu. Po této stránce je mimořádně cenné jeho *Poselství Eratosthénovi*, které bylo objeveno až na počátku minulého století. O tomto objevu se ještě zmíníme podrobněji.

Archimédovy práce nebyly ve starověkém Řecku všeobecně známy. Naše současné znalosti jeho díla jsou dány zvýšeným zájmem o jeho práce v Byzanci v období od 6. do 10. století. Je však pravda, že některé jeho práce byly studovány již v Alexandrii a Archimédes byl velmi často zmiňován Herónem, Pappem a Theonem. Studium Archimédových prací ovšem začíná až v 6. století, kdy komentáře k pracím *O kouli a válci*, *Měření kruhu* a *O rovnováze ploch* napsal Eutokios z Askalónu (žil kolem roku 500). Šlo o nejpopulárnější Archimédovy práce v té době. Přitom komentář k první z těchto prací obsahuje velké množství zmínek o pracích řeckých matematiků.

Archimédovy práce a Eutokiovy komentáře studovali Isidor z Mílétu a Anthémios z Trallu, stavitelé Sofiina chrámu v Istanbulu. Byl to asi právě Isidor z Mílétu, který se podílel na vydání první kolekce Archimédových prací a Eutokiových komentářů. Později byzanští autoři přidali k této kolekci ještě další práce a vznikl tzv. „rukopis A" (označení pochází od Heiberga). Autorem tohoto rukopisu byl pravděpodobně v 9. století Leon ze Soluně. Rukopis obsahoval všechny nám dosud známé „řecké" práce kromě prací *O plovoucích tělesech*, *O metodě*, *Stomachion* a *Úloha o Héliových býcích*. Druhý byzantský rukopis (označovaný jako „rukopis B") obsahoval pouze mechanické práce *O rovnováze ploch*, *Kvadratura paraboly* a *O plovoucích tělesech* (snad i spis *O spirálách*). Oba rukopisy se do dnešní doby nedochovaly. Existuje ještě třetí byzantský „rukopis C", který pochází z 10. století. Jedná se o tzv. palimpsest, neboť původní text obsahující Archimédovy práce byl v pozdějším období přepsán texty náboženskými. Archimédovy práce na tomto palimpsestu byly identifikovány Heibergem v roce 1906 v Istanbulu. Rukopis obsahuje velkou část práce *O kouli a válci*, téměř celé dílo *O spirálách*, části *Měření kruhu* a *O rovnováze ploch* a část spisu *Stomachion*. Velký význam nalezení tohoto rukopisu spočívá v tom, že obsahuje spis *O metodě*, který byl do té doby znám jen nepřímo (zmiňuje se o něm například Hérón).

Arabští matematici se začali s Archimédovými díly seznamovat zhruba ve stejném období, kdy byla tato díla studována matematiky byzantskými. Je nepravděpodobné, že by Arabové měli k dispozici nějaký rukopis obsahující souborné Archimédovo dílo, ale Archimédovy práce znali a byli schopni je dále rozvíjet.

Archimédovo *Měření kruhu* studovali již bratři Banú Músá, ale první překlad této práce provedl jako první T̲hábit ibn Qurra a ve 13. století Násír aṭ-Ṭúsí. Zda byl přeložen i Eutokiův komentář není zřejmé. Práce *O kouli a válci* a část Eutokiových komentářů této práce byly nepříliš kvalitně přeloženy již na počátku 9. století. Překlad byl pak revidován ibn Ḥunajnem, později ibn Qurrou a aṭ-Ṭúsím. Arabové měli k dispozici i překlad části práce *O plovoucích tělesech.* Zda však znali *Kvadraturu paraboly* není zřejmé, ovšem minimálně T̲hábit ibn Qurra se tímto problémem také zabýval. Rovněž pouze nepřímo asi znali Arabové práci *O rovnováze ploch.* Díky Arabům známe i řadu prací, které jsou Archimédovi přisuzovány a v řečtině se nedochovaly. Jedná se například o pojednání *Předpoklady*, ve kterém je studován obrazec ohraničený třemi polokružnicemi. T̲hábit ibn Qurra seznámil arabské matematiky s Archimédovou prací o pravidelném sedmiúhelníku, která se v řečtině rovněž nedochovala.

Západní Evropa poznala Archimédovy práce z obou zdrojů – z Byzance i z arabských zemí. Z arabštiny byl ve 12. století dvakrát přeložen spis *Měření kruhu.* První překlad, jehož autorem byl zřejmě Plato z Tivoli, byl špatný.

Obsahoval řadu numerických chyb a některé části chyběly. Druhý překlad provedl Gherardo z Cremony, který využil arabský překlad ibn Qurry. Gherardův překlad byl mnohem kvalitnější a posloužil matematikům v dalším období. Eutokiovy komentáře této práce byly přeloženy až kolem roku 1450.

Gherardo z Cremony přeložil i geometrický spis bratří Banú Músa. Tento překlad sehrál významnou roli při šíření řecké geometrie ve středověké Evropě. Tři bratři Banú Músá (Muḥammad, al-Ḥasan a Aḥmad) byli synové jednoho z důvěrníků chalífy al-Ma'múna. Zabývali se matematikou, atronomií, hudebními nástroji a mechanikou. Postavili vlastní observatoř, sbírali rukopisy, podporovali překládání řeckých autorů do arabštiny. Původní název jejich práce byl *Kniha o měření rovinných a sférických obrazců*, ale Gherardo ji přeložil pod názvem *Kniha tří bratří o geometrii*. V této práci nacházíme mimo jiné v poněkud obměněné formě princip exhaustivní metody, princip výpočtu čísla π a zřejmě poprvé v latinském jazyce Hérónův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka. Zmínky o tomto vzorci máme ovšem již v překladu Savasordovy práce *Kniha o měření*, kterou přeložil Plato z Tivoli. Ve spise bratří Banú Músa se měl možnost středověký evropský čtenář setkat v latině poprvé s řešením problému trisekce úhlu. Práce obsahuje i vzorce pro výpočet objemu a povrchu kužele a koule. Spis byl ve 13. století často citován Jordanem Nemorariem a Leonardem Pisánským.

Byzantské rukopisy „A a B" posloužily kolem roku 1269 Willemovi de Merbecke pro jeho překlady Archimédových prací. Tyto rukopisy krátce před tím v roce 1266 získala papežská knihovna ze sbírek normanských králů na Sicílii. Všechny práce obsažené v těchto rukopisech, kromě *Počítání písku* a Eutokiových komentářů *Měření kruhu*, Willem přeložil do latiny. Třebaže Willemovy překlady nebyly bez chyb, dokonce vážných chyb, znamenaly velmi významný krok. Willemův původní překlad se zachoval ve Vatikánu, ale jistě existovaly i jeho opisy, protože byl využíván např. při výuce na Sorbonně minimálně od poloviny 14. století. Je doloženo, že zde bylo známo šest Archimédových prací přeložených Willemem de Merbecke.

V 15. století došlo k dalšímu rozšíření znalostí Archimédových děl. Na příkaz papeže Mikuláše V. (1397–1455) přeložil Archimédovy práce kolem roku 1450 Giacobo z Cremony (zemřel kolem roku 1452). Jeho překlad vychází z „rukopisu A", ale chybí v něm spis *O plovoucích tělesech*. Na druhé straně jsou zde *Počítání písku* a Eutokiův komentář *Měření kruhu*, které ve Willemově překladu chybí. Je zřejmé, že při tomto překladu byl Willemův překlad používán. Krátce po dokončení tohoto druhého překladu zaslal papež překlad Mikuláši Kusánskému (1401–1464), který ho využil ve své práci *De mathematicis complementis*, vytvořené v letech 1453–1454. Zachovalo se celkem 9 opisů tohoto Giacobova překladu, z nichž jeden byl revidován Regiomontanem a dopraven do Německa kolem roku 1468.

Tiskem vyšly poprvé Willemovy překlady *Měření kruhu* a *Kvadratury paraboly* v Benátkách v roce 1503. Tyto dvě práce společně s prací *O rovnováze ploch* a částí spisu *O plovoucích tělesech* znovu vydal v roce 1543 v Benátkách Niccoló Tartaglia (1500–1557).

Apollónius.

Vedle Eukleida a Archiméda byl třetím a posledním velkým matematikem helénistického období Apollónius z Pergé (přibližně 262–190 př. n. l.), který žil většinu života v Alexandrii.

Apollóniovo hlavní dílo *Kuželosečky* tvoří osm knih, z nichž se v řečtině dochovaly pouze čtyři, další tři známe v arabském překladu a poslední se ztratila. Apollónius v práci zavedl základní pojmy teorie kuželoseček, studoval vlastnosti jednotlivých kuželoseček, asymptoty hyperboly, tečny a sečny kuželoseček. Rovněž se zabýval počtem průsečíků a dotykových bodů dvou kuželoseček. V páté knize studoval normály vedené z různých bodů ke kuželosečkám jako přímky maximální či minimální délky.

Apollónius je autorem řady dalších matematických prací, z nichž pouze *O odtínání v poměru* se zachovala v arabském překladu. Obsahy dalších geometrických prací (např. *O odtínání plochy*) známe jen z komentářů pozdějších autorů. Z negeometrických prací jmenujme *Okytokion* (Prostředek k rychlému porodu), kde Apollónius stanovil číslo π s větší přesností než Archimédes. Apollónius byl nejen velkým matematikem, ale i významným astronomem své doby. Je mu například připisován vynález astrolábu – přístroje k měření výšky hvězd.

Ačkoliv Apollóniova postava byla ve starověku dobře známa, neměl následovníka v oblasti studia vlastností kuželoseček. Jediný Pappos ve 3. století byl schopen pochopit toto velmi náročné dílo a dále je rozvinout. Další známé komentáře prvních čtyř knih napsali ve 4. století Serénos z Antinoie, v 5. století Hypatie a v 6. století Eutokios z Askalonu. Tyto komentáře ovšem nepřinesly nic nového.

První čtyři knihy *Kuželoseček* byly v Byzanci opisovány a sloužily jako učebnice. Takto se také dostaly do arabských zemí, kde byly ihned přeloženy do arabštiny al-Ḥimṣim. Díky arabskému překladu T͟hábit ibn Qurry se nám zachovala V. až VII. kniha. Také v arabských zemích Apollóniovo dílo příliš neovlivnilo vývoj matematiky. Jmenujme pouze Omara Chajjáma, který využil kuželoseček při geometrickém řešení kubických algebraických rovnic, a Ibn al-Hajt͟hama (kolem 965–1039), který studoval vlastnosti paraboly v souvislosti se zápalnými zrcadly.

Evropskou středověkou matematiku *Kuželosečky* rovněž neovlivnily. Gherardo z Cremony ve 12. století přeložil pouze zlomky první knihy. První čtyři knihy, které známe z řečtiny, přeložil a tiskem vydal v roce 1566 Federico Commandino, který přeložil a v roce 1588 vydal rovněž Pappovy komentáře. Z nich se evropští matematici seznámili s obsahem do té doby ztracených knih. Knihy V.–VII. z arabštiny přeložil nepříliš dobře poprvé v roce 1661 Abraham Ecchellensis. Nový překlad těchto knih a rekonstrukci ztracené VIII. knihy vytvořil až v roce 1710 Edmund Halley (1656–1742).

Ptolemaios.

O životě astronoma, geografa a optika Klaudia Ptolemaia (asi 100–178) není nic konkrétního známo. Ve své *Geografii* stanovil zeměpisnou polohu zhruba 8000 míst známého světa, přičemž použil myšlenku zeměpisných souřadnic.

Část jeho *Optiky* se zachovala v latinském překladu z řečtiny. Kromě nejznámějšího díla *Almagest* se dochovaly ještě dvě drobnější Ptolemaiovy astronomické práce *Náčrtek* a *Planisférium* a astrologický spis *Tetrabiblos*. Planisférium se dochovalo pouze v latinském překladu Hermana z Dalmácie z arabštiny a Ptolemaios se v něm zabývá stereografickou projekcí nebeské sféry do roviny.

Nejvýznamnější Ptolemaiovou prací byla *Matematická sbírka v 13 knihách*, která dostala později arabský název *Almagest* (Syntaxis megalé – Velká soustava). Toto dílo je vynikajícím výkladem všech astronomických antických poznatků své doby. Je v něm podrobně vyložena Ptolemaiova geocentrická soustava (Ptolemaios přitom matematicky popsal geocentrickou soustavu Hipparchovu) a trigonometrie tětiv. Právě trigonometrií *Almagest* začíná. Obsahuje rovněž tabulky tětiv od $\frac{1}{2}^\circ$ do 180° s půlstupňovými intervaly, což odpovídá tabulce sinů od $\frac{1}{4}^\circ$ do 90°.

Ptolemaiův *Almagest* (podobně jako Eukleidovy *Základy* v matematice) odsunul do pozadí předchozí řecké astronomické práce a stal se klasickou učebnicí. Komentován byl již Pappem (kolem roku 320) a Theonem Alexandrijským, ale nikdo z nich nešel za jeho rámec. Theon Alexandrijský vytvořil komentáře snad s pomocí své dcery Hypatie.

Ptolemaios

Kolem roku 800 byl *Almagest* poprvé přeložen do arabštiny a získal dnešní název. Další revidované překlady se objevily v průběhu 9. století. Vynikající arabští astronomové brzy poznali význam tohoto díla (ve srovnání s dosavadními znalostmi získanými studiem děl perských a indických astronomů). Nicméně jejich přesná pozorování brzy odhalila jeho nedostatky. Příkladem pokusu o zlepšení Ptolemaiovy teorie byla práce al-Battáního kolem roku 880. Ptolemaiovo dílo komentoval (podobně jako v případě Eukleida) kolem roku 900 al-Najrízí a později v 10. století Abu 'l-Wafá ve své *Knize pro písaře* v souvislosti s trigonometrií. Také al-Bírúní po prostudování *Almagestu* opravoval některé Ptolemaiovy nepřesnosti. Ve své práci *Geodézie* z roku 1025 odmítl některá Ptolemaiova tvrzení. Dalším astronomem, který aktivně studoval *Almagest*, byl aṭ-Ṭúsí (kolem roku 1250). Přínos těchto reformátorů k astronomické části ovšem nebyl velký.

Do Evropy se *Almagest* dostal díky překladu Gherarda z Cremony v polovině 12. století. Latinská verze, která vznikla jako překlad z řečtiny zřejmě na Sicílii kolem roku 1160, nebyla příliš známá a vývoj neovlivnila. V roce 1451 pořídil překlad z řečtiny Řek Georgios z Trapezuntu (1393–1486), který žil v Itálii. V roce 1515 vyšlo první tištěné vydání *Almagestu*.

Diofantos.

O životě Diofanta víme jen to, že žil ve 3. století našeho letopočtu. Jeho nejvýznamnější dílo *Aritmetika* je tvořeno 13 knihami, z nichž pouze 6 se zachovalo v řeckém originálu. 4 další byly relativně nedávno nalezeny v arabské verzi. Z nich se dovídáme, že tyto tvoří knihy IV.–VII. Charakter „arabských“

knih je natolik odlišný, že předpokládáme, že nebyly přeloženy přímo z původního Diofantova díla, nýbrž z komentářů Hypatie.

Způsoby řešení lineárních a kvadratických rovnic byly vypracovány dlouho před Diofantem. Nalezneme je v babylonské, čínské i řecké matematice. Diofantovo řešení kvadratických rovnic se dvěma neznámými odpovídá babylonským metodám, které se objevují ve druhé knize Eukleidových *Základů* v geometrické podobě. Nicméně jeho kolekce neurčitých problémů byla zcela výjimečná a ovlivnila vývoj matematiky v budoucnu.

Arabští matematici se s Diofantovým dílem setkali poměrně pozdě. Al-Chwárízmího *Algebru* Diofantos pravděpodobně neovlivnil, protože pokud je známo, první arabský překlad Diofantovy *Aritmetiky* zhotovil křesťanský matematik Qusta ibn Lúga al-Balabakkí, který zemřel roku 912. Autorem obsáhlých komentářů k Diofantovi byl Abu 'l-Wafá ve druhé polovině 10. století, který rovněž přeložil Diofanta do arabštiny. Stejně jako komentáře Ibn al-Hajthama se nedochovaly. Diofantův vliv na *Algebru* al-Karadžího je nesporný.

Na svých cestách po Středomoří se s Diofantovou *Aritmetikou* patrně setkal na přelomu 12. a 13. století Leonardo Pisánský. Řecký text byl k dispozici pouze v Byzanci, kde komentáře k prvním dvěma knihám napsal Maximos Planúdés z Nikomedie (1260–1310), který však obtížnější místa obešel. Z Byzance pocházel rovněž exemplář, který nalezl v Benátkách Regiomontanus. Jeho úmysl přeložit Diofanta do latiny se neuskutečnil a dlouhou dobu nebylo o práci slyšet. Byla znovu objevena Rafaelem Bombellim (1526–1572), který z ní do své *Algebry* vydané roku 1572 zařadil zhruba 150 úloh. V roce 1575 byla *Aritmetika* poprve přeložena do latiny Wilhelmem Xylanderem (1532–1576). Konečně v roce 1621 byl řecký text společně s revidovaným Xylanderovým překladem vydán tiskem Bachetem de Méziriac (1581–1638). Tento překlad měl k dispozici Pierre Fermat (1601–1665) a od něj se odvíjí moderní teorie čísel.

Významní překladatelé.

Překlady z arabštiny se učenci zabývali nejen ve 12. a 13. století, ale i později ve století 14.–17. Šlo jak o překlady řeckých děl z arabštiny, tak o překlady původních arabských prací. Při překladech vypomáhali arabští a židovští lékaři a astrologové na některých panovnických dvorech, ale základ představovali učenci na Pyrenejském poloostrově, který byl postupně osvobozován od nadvlády Maurů. V roce 1085 bylo dobyto Toledo, kam přichází ihned lidé toužící po vzdělání, a ve druhé čtvrtině 12. století zde již pracovala celá škola překladatelů a kompilátorů. Překládalo se ovšem i na dalších místech (Barcelona, Pamplona, Toulouse, Marseille aj.). Na překladech se podíleli Arabové, kteří přijali křesťanství (tzv. moriskové), Španělé, Židé, Angličané, Italové, Slované a Vlámové. Překládalo se do latiny, která byla společným jazykem všech západoevropských učenců. Překlady do národních jazyků byly otázkou daleké budoucnosti. Důležitým místem byla i Sicílie, která byla od roku 878 v moci Arabů až do roku 1091, kdy ji zcela ovládli Normani. Latina, arabština a řečtina zde byly všeobecně rozšířenými hovorovými jazyky. K prvním zdejším překladatelům patřil Adelhard z Bathu.

Překlady různých děl měly různý osud. Některé ovlivnily rozvoj evropské matematiky ihned a některé až v pozdější době. Do první skupiny patřily bezesporu díla al-Chwárizmího, Ptolemaia a samozřejmě Eukleidovy *Základy*. Obsah těchto děl odpovídal ve větší či menší míře všeobecným požadavkům své doby, stal se předmětem komentářů, hodnocení, diskusí a dalšího rozvoje. Naproti tomu díla Archimédova a Apollóniova přesahovala ještě duchovní schopnosti té doby a jejich čas přišel později.

Adelhard z Bathu.

Adelhard byl jedním z prvních překladatelů z arabštiny do latiny. Odhadujeme, že jeho překladatelská činnost spadá do období let 1116–1142. Adelhard se narodil v anglickém Bathu někdy v letech 1070–1080. Studoval ve Francii a po skončení svých studií během sedmi let navštívil Sicílii, Sýrii a pravděpodobně Palestinu. Zda navštívil přímo arabské země známo není. Je pravděpodobné, že byl ve Španělsku, na což usuzujeme zejména z toho, že roku 1126 přeložil astronomické tabulky al-Chwárízmího, které pro córdobský poledník přepracoval Maslama al-Madžrítí (zemřel kolem roku 1007). Tento spis, se svými 37 kapitolami a 116 tabulkami, byl pro západní Evropu první možností, jak poznat rozsáhlý komplex astronomických tabulek z děl řeckých, indických a arabských astronomů. Obsahoval rovněž pravděpodobně první latinské tabulky sinů. Je ovšem možné, že se Adelhard arabsky naučil na Sicílii a arabské texty ze Španělska se mu do rukou dostaly až v Bathu.

Adelhard napsal vlastní filozofický spis *De eodem et diverso* a krátce po svém návratu z cest přírodovědnou práci *Questiones naturales*, kde se zabývá biologií, teorií vidění, meteorologií a astrologií. Třebaže zde necituje žádné arabské autory, je zřejmé, že z jejich výsledků vychází. První Adelhardovou aritmetickou prací byl spis *Regule abaci*, který byl výsledkem jeho studia prací Boëthia a Gerberta. Adelhard je pravděpodobně autorem spisu *Kniha zavedení Algorisma do astronomického umění, sepsaná magistrem A*, jehož vydání časově spadá do období, kdy Adelhard pracoval. Magistr *A* je pravděpodobně Adelhard. První tři části knihy jsou věnovány aritmetice, zbývající dvě obsahují poznatky z geometrie, hudby a astronomie. Je téměř jisté, že aritmetická část spisu vychází buď z prvního překladu al-Chwárízmího aritmetického spisu, nebo z revidované verze, jejíž jediný existující exemplář je uložen v Cambridge. Neexistuje přitom žádný důkaz toho, že by tento spis přeložil právě Adelhard.

Adelhardův hlavní přínos spočívá v překladech. Byl zřejmě první, kdo přeložil do latiny celé Eukleidovy *Základy*. Co vedlo Adelharda k překladu Eukleida, je zřejmé z jeho poznámek k pozdější práci o astrolábu. Zde napsal, že k pochopení astronomie je třeba znalost geometrie. Adelhardův překlad můžeme časově zařadit do období kolem roku 1130. Kromě tohoto překladu byly Adelhardovi připisovány i další dvě vydání *Základů*.

Adelhardovi je někdy přisuzován i komentář Theodosiovy *Sfériky*, kterou však přeložil až později Gherardo z Cremony. Existuje dokonce myšlenka, že Adelhard překládal i z řečtiny, ale to je pouze spekulace. Poměrně nedávno nalezený překlad totiž vykazuje podobný styl a techniku překladu.

Joannes Sevilský (Toledský) a Domingo Gonzales.

Tito dva překladatelé působili v Toledu zhruba v letech 1135–1153, kdy společně přeložili asi 20 prací. Pracovali tak, že Joannes překládal z arabštiny do španělštiny a Gonzales dále do latiny. Joannes Sevilský je autorem spisu *Kniha Algorisma o aritmetické praxi*, který sehrál významnou roli při šíření desítkového pozičního systému v Evropě.

Plato z Tivoli.

V období zhruba 1134–1145 přeložil tato díla: *Zdokonalení Almagestu* al-Battáního, Theodosiovu *Sfériku*, Archimédovo *Měření kruhu*. Z hebrejštiny pak Savasordovu *Knihu o měřeních*.

Robert z Chesteru a Hermann z Dalmácie.

Robert z Chesteru byl v roce 1143 biskupem v Pamploně, v roce 1145 v Segovii a v letech 1147–50 v Londýně. Zhruba do tohoto období také spadá jeho překladatelská činnost. Přeložil několik astronomických prací, přepracoval Adelhardem přeložené al-Chwárizmího astronomické tabulky pro londýnský poledník a přeložil al-Chwárizmího algebraický traktát. Do latiny přeložil rovněž *Korán*.

Hermann z Dalmácie společně z Robertem z Chesteru pracoval na překladu *Koránu* do latiny. Hermann přeložil do latiny Ptolemaiovo *Planisférium*. Zda také přeložil Eukleidovy *Základy* není zcela jisté. Zdá se však, že ano.

Gherardo z Cremony.

Gherardo se narodil v italské Cremoně kolem roku 1114 a zemřel zřejmě ve španělském Toledu v roce 1187. Byl nejvýznamnějším překladatelem přírodovědných a filozofických prací z arabštiny do latiny. Jeho překlady spadají zhruba do období let 1150–1185. O vlastních Gherardových pracích toho příliš známo není. Některé astronomické práce jako například *Theorica planetarum* a *Geomantia astronomica* se mu však přisuzují.

Gherardo odešel do Toleda s cílem prostudovat *Almagest*, dílo, které nebylo tehdy v latinském světě dostupné. Není zcela zřejmé, kdy Gherardo do Toleda odešel. Předpokládá se, že to bylo brzy po ukončení jeho studií, nejpozději kolem roku 1144. Velké množství arabské literatury ho vedlo k tomu, že se naučil arabsky a začal s překladem těchto prací.

Máme-li stanovit metodu, jakou Gherardo překládal, pak je užitečné srovnání jeho překladů s překlady, které byly do té doby vytvořeny. Již před Gherardem byly například přeloženy Eukleidovy *Základy*, Theodosiova *Sférika*, Archimédovo *Meření kruhu* a al-Chwárízmího algebraický spis. Uvedená díla přeložil i Gherardo z Cremony. Gherardo srovnal arabský text s prvními latinskými překlady a ponechal to, co považoval za správné. Často pozměnil jazykovou stránku překladu tím, že některé výrazy přeložil jiným způsobem. Stává se ovšem, že někdy přepracoval celé odstavce. Řadu výrazů přejal od Joanna Sevilského. Gherardovy překlady byly na počátku renesance a v dalších stoletích podrobeny četné kritice. Přitom nešlo o kritiku samotného překladu (nikdo ho neporovnával s arabským originálem), ale spíše o chyby přepisovatelů.

Máme k dispozici dva seznamy Gherardových překladů, z nichž vyplývá, že Gherardo přeložil nejméně 3 práce z logiky, 19 prací z geometrie, matematiky, optiky a dynamiky, 12 astronomických a astrologických prací, 11 prací filozofických, 24 lékařských prací, 3 práce o alchymii a 4 práce o geomantii a věštění. Kromě nich je to ještě dalších 14 překladů, které jsou Gherardovi přisuzovány (mezi nimi al-Chwárizmího aritmetický spis a Eukleidova *Data*).

Z matematických a geometrických prací uveďme: 15 knih Eukleidových *Základů* a zlomek Pappových komentářů k X. knize, Theodosiovu *Sfériku*, Archimédovo *Měření kruhu*, Meneláovu *Sfériku*, ibn Qurrovo *De figura alchata*, geometrickou práci bratří Banú Músa, al-Chwárízmího algebraický spis, al-Najrízího komentáře Eukleidových *Základů*, část první knihy Apollóniových *Kuželoseček* a Abú Kámilovu *Algebru*.

Campano z Novary.

Tento matematik a astronom se narodil v první čtvrtině 13. století pravděpodobně v Novaře nedaleko Milána. O jeho životě víme velmi málo ze zmínek v dílech jiných autorů. Často je označován jako Magistr Campanus, ale není známo, že by na nějaké škole studoval nebo působil. Dobu jeho narození odvozujeme od toho, že většinu svých hlavních děl vytvořil na konci 50. a na začátku 60. let 13. století. Rok a místo úmrtí ovšem známe, zemřel v italském městě Viterbo v roce 1296. Campanus z Novary působil během svého života jako kaplan čtyř papežů. Z řady jeho vlastních prací existuje pouze astronomické dílo *Theorica planetarum* v moderním kritickém vydání. Práce vznikla v první polovině 60. let 13. století a vychází z Gherardova překladu Ptolemaiova *Almagestu*.

Nejznámějším dílem Campana z Novary je jeho latinské vydání 15 knih Eukleidových *Základů*. K jeho vydání došlo pravděpodobně v letech 1255–1259. Jedná se o volné přepracováním dřívějších překladů. Není odnikud známo, že by Campanus z Novary ovládal řecký nebo arabský jazyk, třebaže působil u dvora papeže Urbana IV., kde působil současně nejvýznamnější znalec řečtiny té doby Willem de Merbecke.

Willem de Merbecke.

Willem de Merbecke se narodil asi v roce 1215, pravděpodobně v Merbecke na hranicích mezi Flandrami a Brabantskem. Vstoupil do dominikánského řádu, studoval v Paříži a v Kolíně nad Rýnem. Poté působil nějaký čas v Řecku. Od roku 1267 byl Willem ve Viterbu, tehdejší rezidenci papeže. V letech 1272–1278 byl kaplanem a zpovědníkem papeže. V roce 1278 byl jmenován biskupem v Korintu. Zemřel zřejmě v roce 1286.

Kromě Archimédových prací *O spirálách, O rovnováze ploch, Kvadratura paraboly, Měření kruhu, O kouli a válci, O konoidech a sféroidech, O plovoucích tělesech* přeložil v letech 1260–1280 rovněž některé práce Héróna, Eutokiovy komentáře, stejně jako několik děl Aristotela a lékařské spisy Hippokrata a Galena.

Federico Commandino.

Federico Commandino se narodil v roce 1509 v italském městě Urbino. Studoval filozofii a medicínu v Padově, poté působil v Římě, Boloni, Benátkách a konečně v rodném Urbinu, kde v roce 1575 umírá. Byl lékařem, ale zabýval se rovněž překladem a vydáváním matematických prací tiskem.

V roce 1558 vydal Archimédovy spisy *Měření kruhu, O spirálách, Kvadratura paraboly, O počítání písku*, které v roce 1565 doplnil o spis *O plovoucích tělesech*. V roce 1566 vydal první čtyři knihy Apollóniových *Kuželoseček* a v roce 1588 Pappovy komentáře tohoto díla. V roce 1572 vyšly Eukleidovy *Základy* a Aristarchovo dílo *O velikostech a vzdálenostech Měsíce a Slunce.*

LITERATURA

[Ju] Juškevič, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.

[Bo] Boyer, C. B., *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[Ka] Katz, V. J., *A history of mathematics*, Addison-Wesley Longman, Inc., Reading, 1998.

[Ge] Gericke, H., *Mathematik in Antike und Orient. Mathematik im Abendland*, Fourier Verlag, Wiesbaden, 1994.

[Fo] Folkerts, M., *Euclid in Medieval Europe*, Winnipeg, 1989.

[Gu] Guiness, G., *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*, London, 1994.

[Ko] Kolman, A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[Ba] Baštinec, J. – Kubištová, Z., *Muhammad ibn Músa al-Chorezmi*, in *Matematika v proměnách věků I.* Dějiny matematiky, sv. 11. (ed. J. Bečvář, E. Fuchs) (1998), Prometheus, Brno.

[Di] *Dictionary of Scientific Biography* (1970–1978), New York.

[En] *Encyklopedie antiky* (1974), Praha.