§ 4 . REÁLNÁ ČÍSLA

4.1. Definice : Označme E množinu všech mezer a dedekindovských řezů 1.druhu v mno-žině R racionálních čísel. Množinu E nazýváme množinou *reálných čísel*, prvk množiny E se nazývají *reálná* čísla.

Je-li $a \in E$ dedekindovský, nazveme jej *racionálním řezem*, je-li mezerou, nazv me jej *iracionálním řezem*.

Poznámka: Je-li tedy $a = [A_1, A_2]$ libovolné reálné číslo, neobsahuje horní třída A_2 tohoto řezu nejmenší prvek.

4.2. Věta : *Definujme relaci $\leq$ na množině E takto : Pro $a = [A_1, A_2]$, $b = [B_1, B_2]$ platí $a \leq b$ právě tehdy, když je $A_1 \subseteq B_1$. Pak je $\leq$ úplné uspořádání na množině E .*

Důkaz: zřejmý.

4.3. Definice : Označme R^+ množinu všech kladných racionálních čísel. Pak je $[R - R^+ , R^+]$ reálné číslo, které označíme symbolem 0 a nazýváme je (reálnou) *nulou*.

Reálné číslo a se nazývá *kladné*, je-li $a > 0$ a *záporné*, je-li $a < 0$.

Značíme tedy stejným symbolem nulu v množině racionálních čísel i nulu v množině reálných čísel. Z kontextu však bude vždy zřejmé, o kterou nulu jde. Později tato dvě čísla opět ztotožníme. (Je zřejmé, že $0 \in E$ je racionální řez).

4.4. Věta : *Buďte $a = [A_1, A_2]$, $b = [B_1, B_2]$ libovolná reálná čísla. Položme $C_2 = \{ \alpha + \beta \mid \alpha \in A_2 , \beta \in B_2 \}$, $C_1 = R - C_2$. Pak je $C = [C_1, C_2] \in E$.*

Důkaz: Potřebujeme zřejmě dokázat, že (1) $C_2 \neq \phi$, $C_2 \neq R$, (2) C_2 je konec v R , (3) C_2 neobsahuje nejmenší prvek.

(1) Buďte $\alpha \in A_2$, $\beta \in B_2$ libovolné. (Protože jsou a, b řezy v R, je $A_2 \neq \phi \neq B_2$ a tedy takové prvky existují). Pak je $\alpha + \beta \in C_2$, takže $C_2 \neq \phi$.
Jsou-li $\xi \in A_1$, $\zeta \in B_1$ libovolné (takové prvky ze stejného důvodu také existují), je $\xi < \alpha$ pro každé $\alpha \in A_2$, $\zeta < \beta$ pro každé $\beta \in B_2$, takže $\xi + \zeta < \gamma$ pro každé $\gamma \in C_2$ a tedy $C_2 \neq R$.

(2) Tvrzení, že C_2 je konec v R je zřejmé, neboť A_2, B_2 jsou konce v R.

(3) Buď $\gamma \in C_2$ libovolný. Pak existují $\alpha \in A_2$, $\beta \in B_2$ tak, že $\gamma = \alpha + \beta$. Prvek α ale není nejmenší v A_2 a β není nejmenší v B_2, takže existují prvky $\alpha_1 \in A_2$, $\beta_1 \in B_2$, $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 < \beta$. Pak je $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 < \gamma$, $\gamma_1 \in C_2$, takže ani γ není nejmenší prvek v C_2.

Věta je tím dokázána.

Nyní můžeme definovat sčítání reálných čísel takto:

Definice: Buďte $a = [A_1, A_2]$, $b = [B_1, B_2]$ libovolná reálna čísla. Položme

$$C_2 = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A_2, \beta \in B_2\}, \; C_1 = R - C_2 .$$

Pak klademe $$a + b := [C_1, C_2] .$$

Následující tvrzení je zřejmé:

4.6. Věta *Buďte a, b, c libovolná reálná čísla. Pak platí:*

(a) $a + b = b + a$ *(komutativní zákon)*

(b) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(asociativní zákon)*

(c) $a + 0 = a$

K důkazu monotonnosti sčítání reálných čísel potřebujeme následující tvrzení:

4.7. Věta *Buď $a = [A_1, A_2]$ libovolné reálné číslo, γ buď libovolné kladné racionální číslo. Pak existují čísla $\alpha \in A_1$, $\beta \in A_2$ tak, že $\beta - \alpha = \gamma$.*

D ů k a z: Zvolme $\alpha_0 \in A_1$, $\beta_0 \in A_2$ libovolně. Pak je $\beta_0 - \alpha_0 > 0$. Protože je $\gamma > 0$, existuje takové přirozené číslo n, že $n\gamma > \beta_0 - \alpha_0$, takže $\alpha_0 + n\gamma > \beta_0$. Pak ale $\alpha_0, \alpha_0 + \gamma, \alpha_0 + 2\gamma, \cdots, \alpha_0 + n\gamma$ je konečná posloupnost racionálních čísel taková, že $\alpha_0 \in A_1$, $\alpha_0 + n\gamma \in A_2$. Buď $0 \leqslant l \leqslant n - 1$ největší celé číslo takové, že $\alpha_0 + l\gamma \in A_1$. Pak je $\alpha_0 + (l + 1)\gamma \in A_2$, takže k dokončení důkazu stačí položit $\alpha = \alpha_0 + l\gamma$, $\beta = \alpha_0 + (l + 1)\gamma$.

4.8. Věta *Buďte a, b, c libovolná reálná čísla. Je-li $a < b$, je $a + c < b + c$.*

D ů k a z: Nechť $a = [A_1, A_2]$, $b = [B_1, B_2]$, $c = [C_1, C_2]$. Je-li $a < b$, je $A_1 \subset B_1$, takže $B_2 \subset A_2$. Označme $a + c = [D_1, D_2]$, $b + c = [E_1, E_2]$.

Potřebujeme tedy dokázat, že $D_1 \subset E_1$, tj. $E_2 \subset D_2$.

Je zřejmé, že $E_2 \subseteq D_2$. Podle předpokladu je $B_2 \subset A_2$, takže existuje $\alpha_1 \in A_2 - B_2$, tj. $\alpha_1 \in B_1$. Protože však A_2 nemá nejmenší prvek, existuje $\alpha_2 \in A_2$, $\alpha_2 < \alpha_1$. Protože je B_1 začátek v R, je $\alpha_2 \in B_1$. Nyní platí $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$, takže podle věty 4.7. existují prvky $\gamma_1 \in C_1$, $\gamma_2 \in C_2$ takové, že $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma_2 - \gamma_1$, tj. $\alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \gamma_2$. Platí však $\alpha_2 + \gamma_2 \in D_2$; pro libovolné $\xi \in E_2$ je nyní $\xi = \beta + \gamma$, kde $\beta \in B_2$, $\gamma \in C_2$, $\beta > \alpha_1$, $\gamma > \gamma_1$. Je tedy $\xi = \beta + \gamma > \alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \gamma_2$, takže $\alpha_2 + \gamma_2 \notin E_2$. Tím je věta dokázána.

4.9. Věta: *Buďte $a,b \in E$ libovolná reálná čísla. Pak existuje právě jedno reálné číslo x takové, že $a + x = b$.*

D ů k a z : Zřejmě stačí položit $x = [X_1, X_2]$, kde $X_2 = \{\beta - \alpha \mid \beta \in B_2,\ \alpha \in A_2\}$, $X_1 = R - X_2$.

4.10. Definice: Buďte a,b libovolná reálná čísla. Řešení rovnice $a + x = b$ značíme symbolem $b - a$ a nazýváme je *rozdílem* čísel b,a (v tomto pořadí).

Číslo $0 - a$ značíme stručně $-a$ a nazýváme je číslem *opačným* k číslu a.

Je zřejmé, že pro rozdíl dvou reálných čísel je snadné odvodit všechny běžné vlastnosti. Evidentní je rovněž fakt, že *číslo a je kladné (tj. $a > 0$) právě tehdy, když číslo $-a$ je záporné, (tj. $-a < 0$)*; $-(-a) = a$ apod.

Analogicky jako součet se definuje i součin reálných čísel. Především platí:

4.11. Věta: *Buďte $a = [A_1, A_2]$, $b = [B_1, B_2]$ libovolná reálná čísla. Položme $C_2 = \{\alpha . \beta \mid \alpha \in A_2,\ \beta \in B_2\}$, $C_1 = R - C_2$. Pak je $[C_1, C_2]$ reálné číslo.*

D ů k a z : Zcela analogicky, jako důkaz věty 4.4.

Nyní je oprávněná následující definice:

4.12. Definice: Buďte $a = [A_1, A_2]$, $b = [B_1, B_2]$ libovolná reálná čísla. Utvořme $[C_1, C_2]$ jako ve větě 4.11. Pak definujeme

$$a . b := [C_1, C_2]$$

$$(-a) . b = a . (-b) := -(a . b)$$

$$(-a) . (-b) = a . b$$

Důkaz následujícího tvrzení je zřejmý.

4.13. Věta : *Buďte a, b, c libovolná reálná čísla. Pak platí :*

(1) $a \,.\, b = b \,.\, a$ *(komutativní zákon)*

(2) $a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$ *(asociativní zákon)*

(3) $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$ *(distributivní zákon)*

(4) $a \,.\, b = 0$ *právě tehdy, když* $a = 0$ *nebo* $b = 0$.

4.14. Věta : *Buďte $a, b \in E$, $a \neq 0$, libovolná reálná čísla. Pak existuje právě jedno reálné číslo x takové, že $a \,.\, x = b$.*

D ů k a z : Je-li $b = 0$, je podle věty 4.13. jediným řešením rovnice $a \,.\, x = b$ číslo $x = 0$. Nechť tedy $b \neq 0$. Předpokládejme například, že $a > 0$, $b > 0$, $a = [A_1, A_2]$, $b = [B_1, B_2]$ · Položme $X_2 = \left\{\frac{\beta}{\alpha} \mid \beta \in B_2 \,,\, \alpha \in A_2\right\}$, $X_1 = R - X_2$. Důkaz toho, že číslo $x = [X_1, X_2]$ je hledané číslo, je zřejmý.

Je-li některé z čísel a, b záporné, je důkaz zcela analogický.

Nyní je již zřejmé, jakým způsobem lze vybudovat aritmetiku reálných čísel. Nyní dokážeme některá tvrzení, týkající se struktury uspořádání na E .

4.15. Věta : *Buď $\phi \neq M \subseteq E$ libovolná množina reálných čísel. Pak platí :*

(1) *Je-li M zdola ohraničená, existuje $inf_E M$*

(2) *Je-li M shora ohraničená, existuje $sup_E M$.*

D ů k a z : (1) Nechť M je zdola ohraničená. Poněvadž je E podle věty 2.4. řetězec, stačí zřejmě dokázat, (viz definici I., 7.1.) , že existuje taková dolní závora a množiny M , že ke každému $x \in E$, $x > a$, existuje prvek $y \in M$, $y < x$. Pak bude $a = inf M$.

Položme $A_2 = \{\alpha \mid \alpha \in R$, existuje $[X_1, X_2] \in M$ tak, že $\alpha \in X_2\}$, $A_1 = R - A_2$. Dokážeme, že $a = [A_1, A_2] = inf_E M$.

(a) Nejprve dokážeme, že $[A_1, A_2]$ je reálné číslo, tj. $A_2 \neq \phi$, $A_2 \neq R$, A_2 je konec v R a A_2 neobsahuje nejmenší prvek.

Protože je $M \neq \phi$, je i $A_2 \neq \phi$, neboť existuje $[X_1, X_2] \in M$, $X_2 \neq \phi$.

Podle předpokladu je M zdola ohraničená, takže existuje $y = [Y_1, Y_2] \in E$ tak, že $y \leq x$ pro každé $x \in M$. Pak ale pro libovolný prvek $\xi \in Y_1$ je $\xi \notin A_2$, takže $A_2 \neq R$.

Buď nyní $\alpha \in A_2$ libovolný prvek a volme $\xi \in R$, $\xi \geqslant \alpha$ libovolně. Protože existuje $[X_1, X_2] \in M$ tak, že $\alpha \in X_2$ a X_2 je konec v R, je nutně $\xi \in X_2$ a tedy i $\xi \in A_2$. Je tedy A_2 konec v R.

Buď nyní $\alpha \in A_2$ libovolný. Je $\alpha \in X_2$ pro vhodný prvek $[X_1, X_2] \in M$. Protože však X_2 neobsahuje nejmenší prvek, existuje $\beta \in X_2$, $\beta < \alpha$. Pak je ale $\beta \in A_2$ a A_2 tedy rovněž neobsahuje nejmenší prvek.

Je tedy $a = [A_1, A_2] \in E$.

(b) Nyní dokážeme, že $a = \inf M$.

Buď $x = [X_1, X_2] \in M$ libovolný prvek. Je-li $\xi \in X_2$ libovolný, je $\xi \in A_2$, takže $X_2 \subseteq A_2$. Pak ale $A_1 \subseteq X_1$ a tedy $a \leqslant x$. To tedy znamená, že a je dolní závora množiny M.

Buď nyní $x = [X_1, X_2] \in E$, $x > a$ libovolný prvek. Pak je $A_1 \subset X_1$, takže existuje $\alpha \in X_1 - A_1$, tj. $\alpha \in A_2$. Podle definice množiny A_2 existuje $y = [Y_1, Y_2] \in M$ takový, že $\alpha \in Y_2$. Pak je ale $Y_1 \subset X_1$, takže $y < x$.

Je tedy $a = \inf M$.

(2) Buď M shora ohraničená. Množina M^+ všech horních závor množiny M je tedy neprázdná a je zdola ohraničená, neboť každý prvek z M je její dolní závorou (a podle předpokladu je $M \neq \phi$). Existuje tedy $\inf_E M^+$ podle (1). Nyní je ale zřejmě $\sup_E M = \inf_E M^+$. (Srovnej s důkazem věty I., 7.17.)

4.16. Věta: *Uspořádaná množina reálných čísel je spojitá.* (Viz definici I., 6.13.)

D ů k a z : Je zřejmé, že množina E je hustá, tj. neobsahuje skoky. Z věty 4.15. ale plyne, že E neobsahuje ani mezery; je tedy každý řez v E dedekindovský.

Z věty 4.16. také plyne, že pomocí řezů v množině všech reálných čísel nelze definovat nové prvky.

V závěru tohoto paragrafu musíme opět odstranit stejnou nesrovnalost jako v §§ 2,3. Podle naší definice totiž racionální čísla nejsou zvláštním případem čísel reálných. Podle následujícího tvrzení, jehož důkaz je zřejmý, však můžeme racionální čísla ztotožnit s racionálními řezy.

4.17. Věta : *Označme* $E^{(r)}$ *množinu všech racionálních řezů. Pro libovolné racionální číslo* α *označme* $R_\alpha := \{ \xi \mid \xi \in R, \xi \leqslant \alpha \}$. *Pak je* $[R_\alpha , R - R_\alpha] \in E^{(r)}$ *a zobrazení* $f : R \to E^{(r)}$ *definované takto :*

$$f(\alpha) = [R_\alpha , R - R_\alpha] \text{ pro každé } \alpha \in R ,$$

je isomorfismus vzhledem k uspořádání $\leqslant$ *i vzhledem k operacím* $+$ *a* $\cdot$.

Jinou možnost konstrukce reálných čísel pomocí čísel racionálních viz v MP , § 9 .

§ 5 . ČÍSLA KOMPLEXNÍ

6.1. Definice : Buď E množina reálných čísel. Množinu E^2 označme K a nazveme ji *množinou komplexních čísel* . prvky množiny K se nazývají *komplexní čísla.*

6.2. Definice : Buďte $x = [a,b]$, $y = [c,d]$ komplexní čísla. Pak klademe

$$x + y := [a + c , b + d]$$

$$x . y := [ac - bd , ad + bc] .$$

6.3. Věta : *Buďte x,y,z libovolná komplexní čísla. Pak platí :*

(1) $x + y = y + x$ *(komutativní zákon pro sčítání)*

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(asociativní zákon pro sčítání)*

(3) $x . y = y . x$ *(komutativní zákon pro násobení)*

(4) $x . (y . z) = (x . y) . z$ *(asociativní zákon pro násobení)*

(5) $x . (y + z) = x . y + x . z$ *(distributivní zákon)*

D ů k a z : je jednoduchý, přenecháme jej čtenáři.

6.4. Věta : *Označme $u := [1,0]$, $n := [0,0]$. Pak pro libovolné komplexní číslo x platí*

(1) $x + n = x$

(2) $x . n = n$

(3) $x . u = x$

D ů k a z : Tvrzení plynou bezprostředně z definice.

Evidentní je rovněž důkaz následujícího tvrzení :

6.5. Věta : *Buďte a,b libovolná komplexní čísla. Pak existuje právě jedno komplexní číslo x takové, že $a + x = b$.*

D ů k a z : Nechť $a = [a_1,a_2]$, $b = [b_1,b_2]$. Položme $x = [b_1 - a_1 , b_2 - a_2]$; pak je $a + x = [a_1 + b_1 - a_1 , a_2 + b_2 - a_2] = [b_1,b_2] = b$. Že je řešení rovnice $a + x = b$ určeno jednoznačně, je evidentní .

6.6. Definice : Buďte a,b libovolná komplexní čísla. Jednoznačně určené řešení rovnice

$a + x = b$ značíme symbolem $b - a$ a nazýváme je *rozdílem* čísel b,a.

Číslo $n - a$ značíme stručně symbolem $-a$.

Následující tvrzení je zřejmé :

6.7. Věta : *Pro libovolná dvě komplexní čísla* x,y *platí :*

(a) $x - x = n$

(b) $(-x) . y = x . (-y) = -(x . y) = (-u) . (x . y)$.

6.8. Definice : Buď $x = [x_1, x_2] \in K$. *Absolutní hodnotou* čísla x nazýváme (reálné) číslo

$|x| := +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Je zřejmé, že platí :

6.9. Věta : *Pro libovolná komplexní čísla* x,y *platí :*

(a) $|x| > 0$ *pro každé* $x \neq n$, $|n| = 0$

(b) $|x . y| = |x| . |y|$.

6.10. Věta : *Buďte* x,y *libovolná dvě komplexní čísla. Pak je* $x . y = n$ *právě tehdy, když* $x = n$ *nebo* $y = n$.

D ů k a z : I. Je-li $x . y = n$, je $|x| . |y| = |x . y| = |n| = 0$. Protože $|x|$, $|y|$ jsou reálná čísla, je $|x| = 0$ nebo $|y| = 0$, takže podle věty 6.9. je $x = n$ nebo $y = n$.

II. Je-li $x = n$ nebo $y = n$, je $x . y = n$ podle definice 6.2.

6.11. Věta : *Buďte* $x,y \in K$, $x \neq n$, *libovolná komplexní čísla. Pak existuje právě jedno komplexní číslo* z *takové, že* $x . z = y$.

D ů k a z : Nechť $x = [a,b]$, $y = [c,d]$. Položme $z = [c,d] . [\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}] =$

$$= [\frac{ac}{a^2 + b^2} + \frac{bd}{a^2 + b^2}, \frac{-cb}{a^2 + b^2} + \frac{ad}{a^2 + b^2}] =$$

$$= [\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}].$$

Pak je $x . z = [\frac{a^2 c + abd - abd + b^2 c}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 d - abc + abc + b^2 d}{a^2 + b^2}] = [c,d] = y$

Buďte nyní v,w libovolná taková komplexní čísla, že $x \cdot v = xw = y$. Pak je podle věty 6.7. $xv - xw = x(v-w) = n$. Podle věty 6.10. je tedy $x = n$ nebo $v - w = n$. Podle předpokladu však je $x \neq n$, takže je nutně $v - w = n$, tj. $v = w$.

Tím je věta dokázána.

6.12. Definice : Buďte $x,y \in K$, $x \neq n$, libovolná komplexní čísla. Jednoznačně určené řešení rovnice $x \cdot z = y$ značíme symbolem $\frac{y}{x}$ a nazýváme je podílem čísel y,x.

6.13. Věta : *Pro libovolná reálná čísla a,b platí :*

(a) $[a,0] + [b,0] = [a+b,0]$

(b) $[a,0] \cdot [b,0] = [a \cdot b,0]$

(c) $[\frac{a}{b},0] = [\frac{[a,0]}{[b,0]},0]$ *pro* $b \neq 0$

(d) $|[a,0]| = |a|$

D ů k a z : zřejmý .

6.14. Důsledek : *Položme* $K_0 = \{[a,0] \mid a \in E\}$. *Pak je zobrazení* $f : E \to K_0$ *definované takto :*

$$f(a) = [a,0] \quad \text{pro každé } a \in E ,$$

isomorfismus vzhledem k operacím $+$ *a* $\cdot$.

Ztotožníme-li nyní každé reálné číslo a s komplexním číslem $[a,0]$, budou reálná čísla speciálním případem čísel komplexních.

Lze tedy vybudovat aritmetiku komplexních čísel i bez zavedení symbolu i. Jeho zavedením se však usnadní symbolika.

6.15. Definice : Klademe $i := [0,1]$.

Z definice 6.2. okamžitě plyne :

6.16. Věta : $i^2 = -1$.