

10. Neurčitý a určitý integrál

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

Osnova:

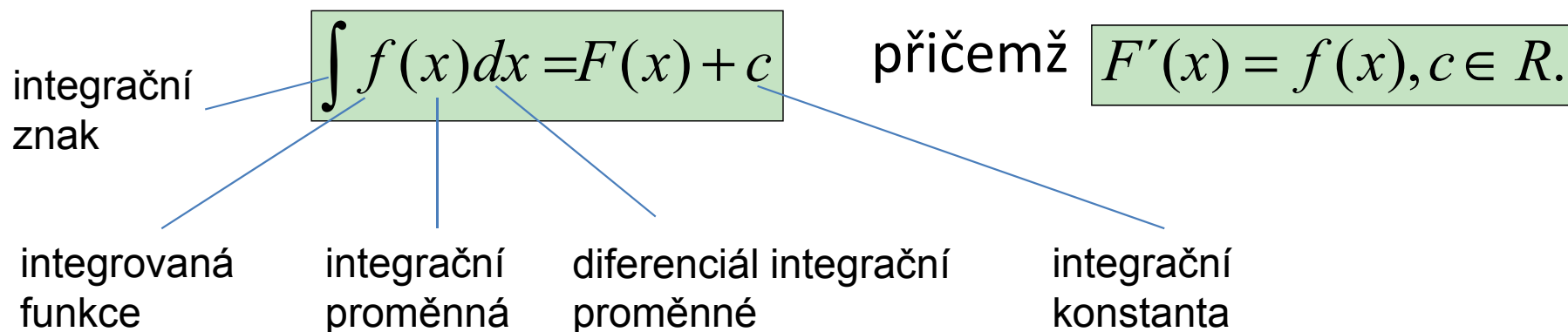
- 1 Neurčitý integrál
- 2 Geometrická interpretace
- 3 Základní vzorce pro integrování
- 4 Určitý integrál
- 5 Užití integračního počtu
 5. 1 Obsah rovinného útvaru
 5. 2 Další příklady využití

1 Neurčitý integrál

Funkce F se nazývá primitivní k funkci f na intervalu $(a;b)$, jestliže pro každé $x \in (a;b)$ platí:

$$F'(x) = f(x)$$

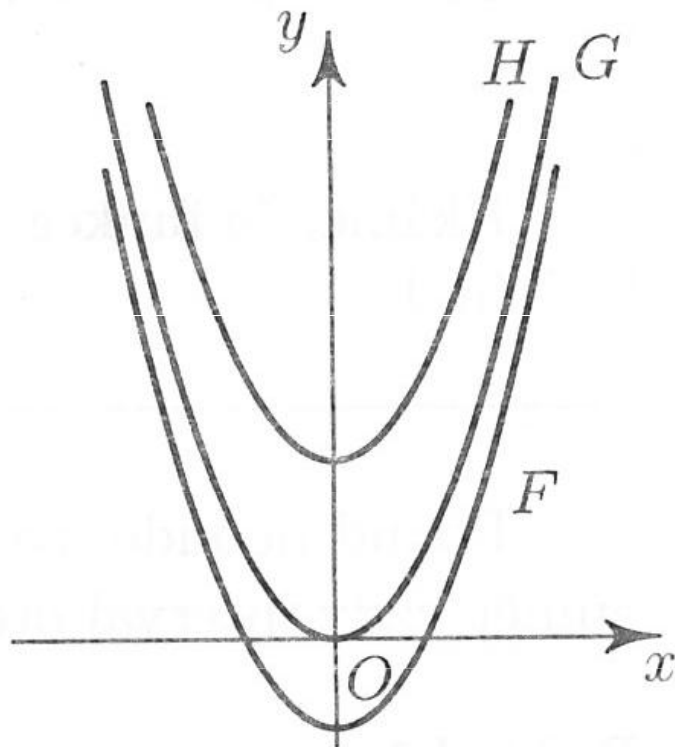
Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci f nazýváme **neurčitým integrálem funkce f** a zapisujeme:



Výpočet neurčitého integrálu $\int f(x) dx$ = integrování funkce f

2 Geometrická interpretace

Známe-li graf jedné primitivní funkce F k funkci f na intervalu J , pak grafy všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu J dostaneme posunutím grafu funkce F ve směru osy y .



$$\begin{aligned}G(x) &= F(x) + C \\H(x) &= F(x) + C'\end{aligned}$$

Na obrázku jsou uvedeny grafy některých primitivních funkcí k funkci $f(x) = 2x$. Všechny tyto primitivní funkce k funkci $f(x)$ lze vyjádřit ve tvaru $F(x) = x^2 + C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

3 Základní vzorce

| Funkce $f: y = f(x)$ | Vzorec pro neurčitý integrál $\int f(x) dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ | Podmínky platnosti vzorce ($x \in D(F)$) |
|--|---|---|
| $y = 0$ | $\int 0 dx = c (c \in \mathbb{R})$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = 1$ | $\int dx = x + c$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = x^n, n \in \mathbb{N}$ | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = x^k, k \in \mathbb{Z}, k \neq -1$ | $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ pro $k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ pro $k < 0$ |
| $y = x^r, r \in \mathbb{R}, r \neq -1$ | $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \frac{1}{x}$ | $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ | $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| $y = e^x$ | $\int e^x dx = e^x + c$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \sin x$ | $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \cos x$ | $\int \cos x dx = \sin x + c$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$ | $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$ |
| $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ | $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$ | $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ |

Existují-li v otevřeném intervalu J primitivní funkce k funkcím $f(x)$, $g(x)$ a jsou-li c_1 , c_2 libovolné konstanty, pak platí následující vztahy:

$$\int c_1 f(x) dx = c_1 \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx$$

Úlohy:

Vypočítejte integrály:

a) $\int (x^3 - 6x^2 + 5x - 4) dx =$

b) $\int (x - 1)^2 dx =$

c) $\int (2 - \sqrt{x})^2 dx =$

d) $\int (x - 1)^2 (x^2 + 1) dx =$

e) $\int ((3x^2 + 4x + 2) / 3x) dx =$

f) $\int (3 \cdot 2^x - 5\sin x + 1) dx =$

g) $\int \frac{x^2 \sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[4]{x}}{x\sqrt{x}} dx =$

4 Určitý integrál

Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu I . Rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu se nazývá **určitý integrál funkce f** v mezích od a do b a značí se:

Horní mez

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dolní mez

Při výpočtu integrálu zpravidla využíváme tento způsob zápisu:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

Úlohy:

Vypočítejte integrály:

$$a) \int_{-1}^2 3x^2 dx =$$

$$d) \int_0^2 (3x^3 - 2x + 5) dx =$$

$$b) \int_0^1 e^x dx =$$

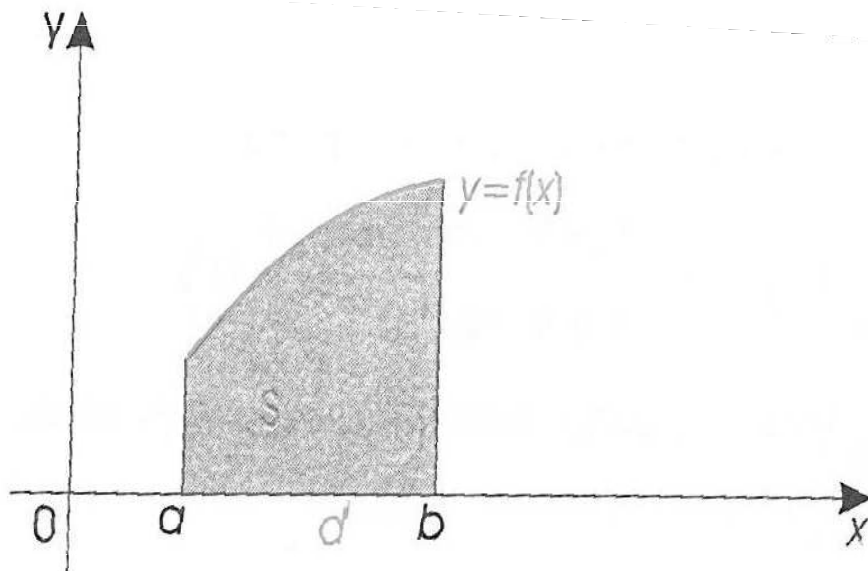
$$e) \int_1^4 \left(-x + \frac{4}{x} \right) dx =$$

$$c) \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx =$$

5 Užití integračního počtu

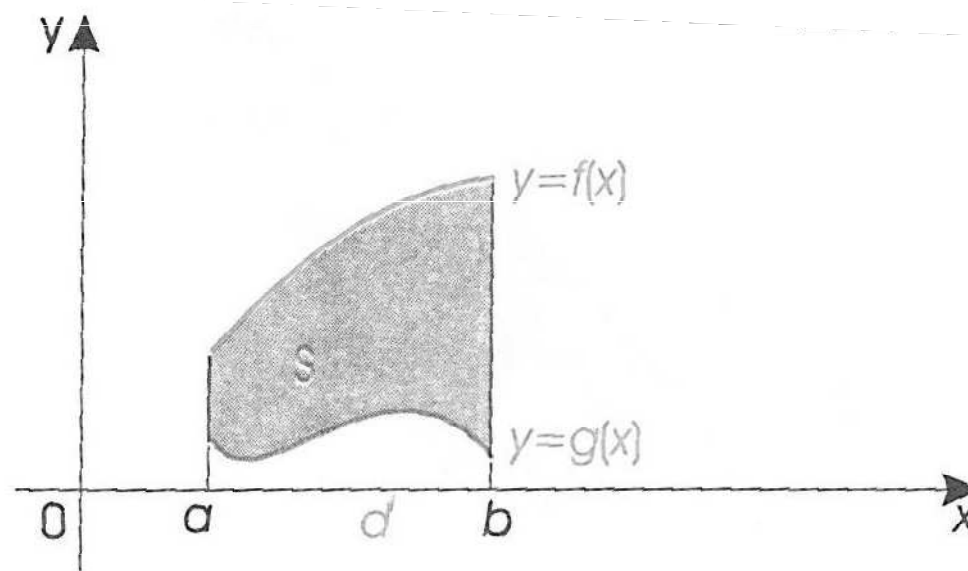
5. 1 Obsah rovinného útvaru

a) Obsah křivočarého lichoběžníku:



$$s = \int_a^b f(x) dx$$

b) Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí f(x) a g(x):



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Úlohy

- 1) Vypočítejte obsah rovinného útvaru, který je ohraničen křivkami $f: y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.
- 2) Vypočítejte obsah rovinného útvaru, který je omezen křivkou $y = x^2 - 4$ a osou x .
- 3) Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí $f: y = 2 - x^2$, $g: y = x$.

5 Užití integračního počtu

5. 2 Další příklady využití

- a) Výpočet objemu rotačního tělesa
- b) Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa
- c) Fyzikální aplikace (dráha přímočarého pohybu, práce)

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.