

# 7. Vektory

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

# Osnova:

## 1 Orientovaná úsečka

### 1.1 Velikost a střed orientované úsečky

## 2 Vektor

## 3 Sčítání vektorů

## 4 Násobení vektoru číslem

## 5 Lineární kombinace vektorů

## 6 Velikost vektoru

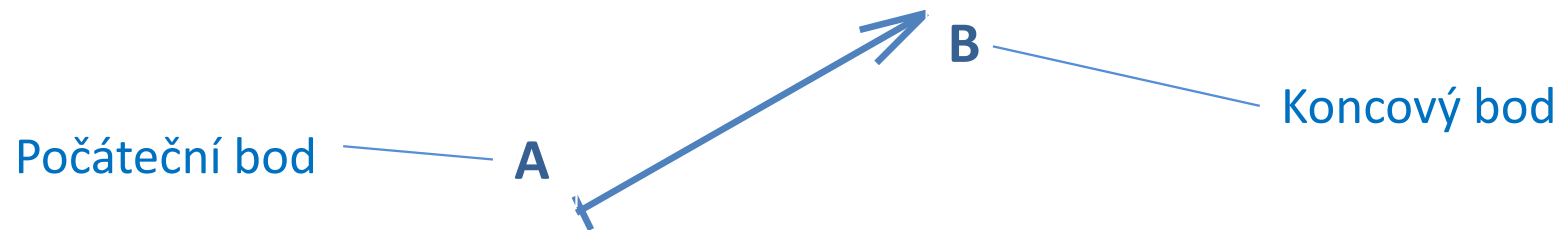
## 7 Skalární součin vektorů

## 8 Úhel dvou vektorů

## 9 Vektorový součin

# 1 Orientovaná úsečka

- Orientovaná úsečka **AB** = úsečka, u níž je určen počáteční a koncový bod.



**Nulová orientovaná úsečka** = úsečka, jejíž počáteční bod je totožný s koncovým bodem.

## Aplikace

- Např. :** Pro znázornění síly, která působí na těleso
- směr úsečky udává směr působení síly
  - velikost úsečky udává velikost působící síly

# 1.1 Velikost a střed orientované úsečky

**Velikost** orientované úsečky **AB** = vzdálenost bodů **A, B**:

**V rovině:**

- A  $[a_1, a_2]$  a B  $[b_1, b_2]$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

**V prostoru:**

- A  $[a_1, a_2, a_3]$  a B  $[b_1, b_2, b_3]$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

**Střed S** úsečky **AB**:

**V rovině:**

- A  $[a_1, a_2]$ , B  $[b_1, b_2]$

$$S[s_1, s_2], \text{ kde}$$
$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

**V prostoru:**

- A  $[a_1, a_2, a_3]$  a B  $[b_1, b_2, b_3]$

$$S[s_1, s_2, s_3], \text{ kde}$$
$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

## Úlohy

**Př.1:** Vypočítejte vzdálenost bodů A [3,1,5] a B[1,2,3].

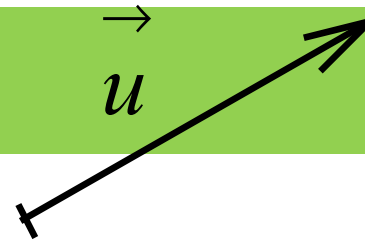
**Př.2:** Jsou dány body A, B. Vypočítejte souřadnice středu S úsečky AB, jestliže:

a) A [1, -1, 2], B [0, 3, 1]

b) A [1, -3, -1], B [2, 5, 1]

**Př.3:** Jsou dány body A [1, -1, 3], S[2, 1, 0]. Určete bod B tak, aby bod S byl střed úsečky AB.

# 2 Vektor



- **Nenulový vektor** = množina všech orientovaných úseček, které mají **stejnou velikost** a **stejný směr**.
- **Nulový vektor** = množina všech **nulových** orientovaných úseček.

## Souřadnice vektoru

### V rovině:

- je-li vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  určen orientovanou úsečkou **AB**, nazývají se čísla  $u_1, u_2$  souřadnice vektoru  $\mathbf{u}$  a platí pro ně tyto vztahy:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1 \\ u_2 &= b_2 - a_2 \end{aligned}$$

### V prostoru:

- je-li vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  určen orientovanou úsečkou **AB**, nazývají se čísla  $u_1, u_2, u_3$  souřadnice vektoru  $\mathbf{u}$  a platí pro ně tyto vztahy:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1 \\ u_2 &= b_2 - a_2 \\ u_3 &= b_3 - a_3 \end{aligned}$$

## Úlohy

**Př.1:** Jsou dány body A, B. Určete vektor  $\mathbf{u} = B - A$ , je-li

a) A [1, 3], B [-1, 2]

b) A [-1, -1, -3], B [-2, -4, 1]

**Př.2:** V prostoru je dán bod B [1, 3, 3] a vektor  $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$ .  
Určete bod A tak, aby platilo  $\mathbf{u} = B - A$ .

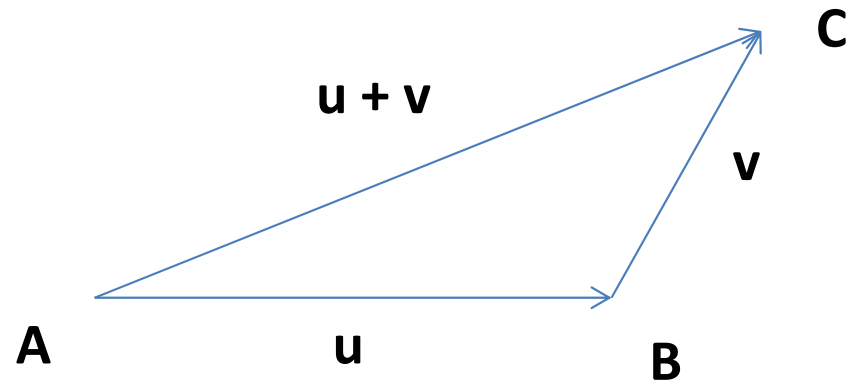
# 3 Sčítání vektorů

Součet vektorů  $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$$

→ je vektor  $\mathbf{C} - \mathbf{A}$ .

Zapisujeme:  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$



**V rovině:**

➤  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

➤ Pro každé dva vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  platí:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

**V prostoru:**

➤  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

➤ Pro každé tři vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  platí:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$



**Př.1:** Vypočítejte součty a rozdíly vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ , je-li

a)  $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 1, 1)$

b)  $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$

# 4 Násobení vektoru číslem

## V rovině:

- Pro každý vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  v rovině a každé číslo  $k$  platí:

$$k\mathbf{u} = (ku_1; ku_2)$$

## V prostoru:

- Pro každý vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  v prostoru a každé číslo  $k$  platí:

$$k\mathbf{u} = (ku_1; ku_2; ku_3)$$

Dále pro každé dva vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  a každá čísla  $k, l$  platí:

$$0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$$

Nulový vektor

$$(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$$

Opačný vektor

$$k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$$

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

$$(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

## Úlohy

**Př.1:** Vypočítejte souřadnice vektoru  $\mathbf{u} = 2(3, -1, 1) + 2(1, 2, 5)$ .

**Př.2:** Vypočítejte souřadnice vektoru  $\mathbf{w} = 5\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$ , je-li

a)  $\mathbf{u} = (-1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$

b)  $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$

# 5 Lineární kombinace vektorů

- Vektor  $au + bv + cw$ , kde  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , se nazývá **lineární kombinace** vektorů  $u, v, w$ .
- Samozřejmě můžeme vytvořit lineární kombinaci i dvou, čtyř, pěti atd. vektorů.
- Lineární kombinace jednoho vektoru je jeho násobek.

**Př.2:** Zjistěte, zda vektor  $\mathbf{w}$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ :

a)  $\mathbf{w} = (-2, 4, -6)$ ,  $\mathbf{u} = (1, 3, -2)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$

b)  $\mathbf{w} = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{u} = (-1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 2, 3)$

# 6 Velikost vektoru

- **Velikost vektoru  $u$**  je velikost kterékoliv orientované úsečky **AB** určující vektor  $u$
- **Velikost vektoru  $u$**  označujeme symbolem  $|u|$ .

## V rovině:

Pro každý vektor  $u = (u_1, u_2)$  platí:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

## V prostoru:

Pro každý vektor  $u = (u_1, u_2, u_3)$  platí:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

## Dále platí:

- Jestliže  $|u| = 1$ , nazývá se vektor  $u$  **jednotkový vektor**
- $u = \mathbf{o} \Leftrightarrow |u| = 0$

## Úlohy

**Př.1:** Vypočítejte velikost vektoru  $\mathbf{u} = (4, -3)$ .

**Př.2:** Vypočítej velikost vektoru  $\mathbf{AB}$ , je-li A  $[-1, 3, -2]$ , B  $[0, 5, -3]$ .

# 7 Skalární součin vektorů

## V rovině:

Skalární součin dvou vektorů  
 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  je číslo:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2$$

## V prostoru:

Skalární součin dvou vektorů  
 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  je číslo:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

## Dále platí:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2 = u_1^2 + u_2^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

- Pro každé vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  (v rovině nebo v prostoru) a každé  $c \in \mathbf{R}$  platí:

$$u v = v u$$

$$(c u) v = c (u v)$$

$$w(u + v) = w u + w v$$

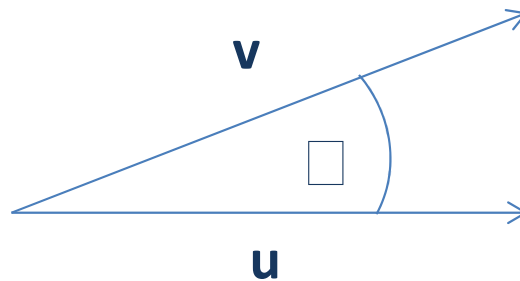


**Př.1:** Vypočítejte skalární součin vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , pro které platí:

a)  $\mathbf{u} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 1)$

b)  $\mathbf{u} = (3, -2, -4)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 3, -2)$

# 8 Úhel dvou vektorů



Pro **velikost úhlu** vektorů  $u, v$  platí následující vztahy:

**V rovině:**

$$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$$

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

**V prostoru:**

$$u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) :$$

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$



$$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$$

**Př.1:** Vypočítejte úhel dvou vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , pro které platí:

a)  $\mathbf{u} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 1)$

b)  $\mathbf{u} = (-1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-2, 4, 2)$

**Př.2:** Je dán vektor  $\mathbf{v}$ . Určete vektor  $\mathbf{u}$  tak, aby platilo  $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$

a)  $\mathbf{v} = (1, 3)$

b)  $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$

# 8 Vektorový součin

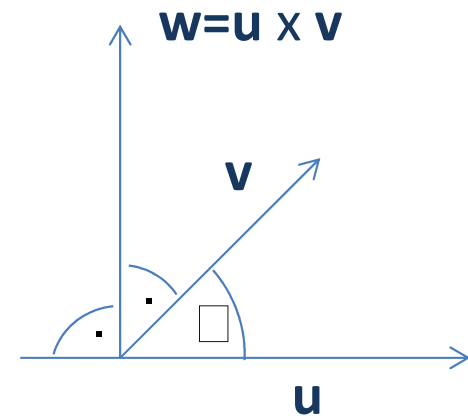
-> provádíme, pokud chceme ke dvěma vektorům  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , které neleží na jedné přímce, najít vektor kolmý k oběma vektorům.

➤ Jestliže  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , pak vektor k oběma vektorům kolmý je vektor

$$\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$$

➤ Pro velikost vektoru  $\mathbf{w}$  platí:

$$w = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha$$



Pozn.: Mnemotechnická pomůcka pro výpočet vektorového součinu:

$$\begin{array}{cc} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{c} u_2v_3 - u_3v_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{c} u_3v_1 - u_1v_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{c} u_1v_2 - u_2v_1 \end{array}$$

**Př.1:** Vypočítejte souřadnice vektorového součinu  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , je-li:

a)  $\mathbf{u} = (2, -2, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$

b)  $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 0, -2)$

# Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Kočandrlle, M. Boček, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Praha: Prometheus, 1995.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.