

STATIKA A KINEMATIKA

**STROJE A ZAŘÍZENÍ – ČÁSTI A
MECHANISMY STROJŮ**

ÚVOD

Základní pojmy z Fyziky – hmotnost, síla, hmotný bod apod.

Ve statice (a dynamice) se uplatňují ještě další tvrzení:

- síla je vektor;
- pro součet dvou sil platí zákon rovnoběžníka;
- platí Newtonův zákon setrvačnosti (pokud je výslednice sil působících na hmotný bod $= 0$, hmotný bod zůstává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu);
- platí zákon akce a reakce;
- účinek síly se nemění, pokud tuto sílu posunujeme po nositelce.

Úlohy ve statice lze řešit graficky, analyticky nebo

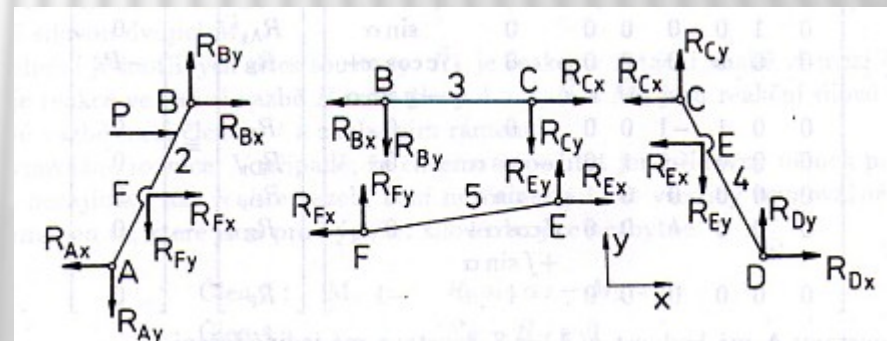
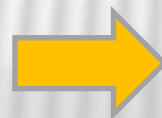
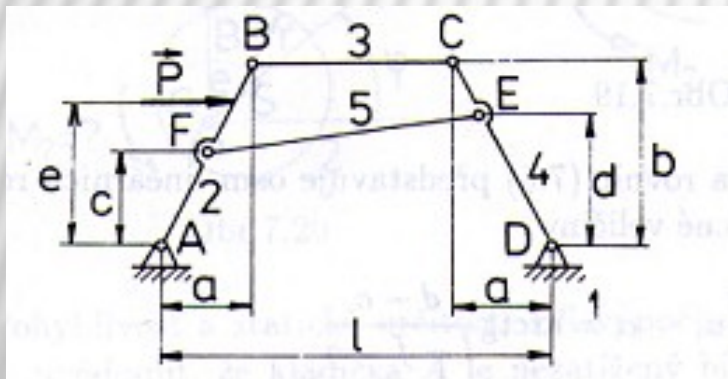
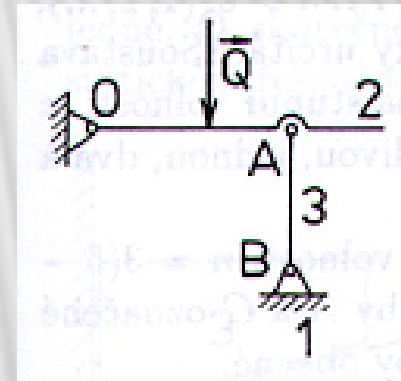
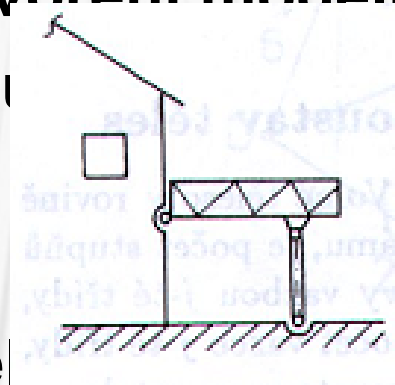
STATIKA

K řešení reálných systémů se využívá modelování.

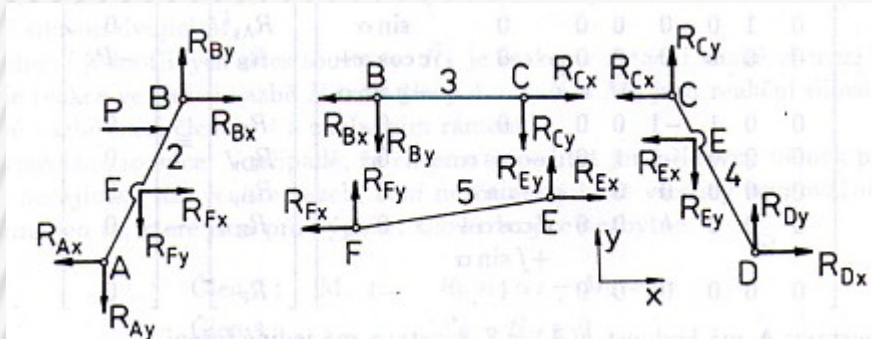
Modelování vede k vytvoření modelu:

- mechanického modelu

- matematického modelu



MATEMATICKÝ MODEL



Maticový přepis:

$$\begin{bmatrix}
 -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha \\
 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c \cos \alpha + \\
 & & & & & & & -g \sin \alpha \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\cos \alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sin \alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & d \cos \alpha + \\
 & & & & & & +f \sin \alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 R_{Ax} \\
 R_{Ay} \\
 R_B \\
 R_C \\
 R_{Dx} \\
 R_{Dy} \\
 R_E \\
 R_F
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -P \\
 0 \\
 -Pe \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Rovnice rovnováhy:

Člen 2 :

$$\begin{aligned}
 x &: R_B + R_F \cos \alpha - R_{Ax} + P = 0 \\
 y &: R_{Ay} + R_F \sin \alpha = 0 \\
 M_A &: R_B b + Pe + R_F c \cos \alpha - R_F g \sin \alpha = 0
 \end{aligned}$$

Člen 3 :

$$R_B - R_C = 0$$

Člen 4 :

$$\begin{aligned}
 x &: -R_C - R_E \cos \alpha + R_{Dx} = 0 \\
 y &: -R_E \sin \alpha + R_{Dy} = 0 \\
 M_D &: R_C b + R_E d \cos \alpha + R_E f \sin \alpha = 0
 \end{aligned}$$

Člen 5 :

$$R_E - R_F = 0$$

SÍLA

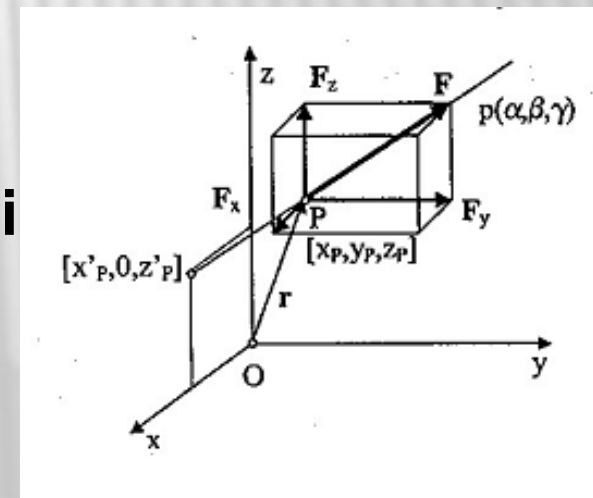
Síly ve statice se dělí na:

- Vnější (jejich původ je mimo zkoumanou soustavu těles).
- Vnitřní (ty které působí mezi jednotlivými tělesy).

Více silových účinků tvoří silovou soustavu.

Platí ekvivalence silových soustav tj.:

- zjednodušování (dvě síly v jedné výslednici);
- rozklad (sílu nahradíme jejími složkami)

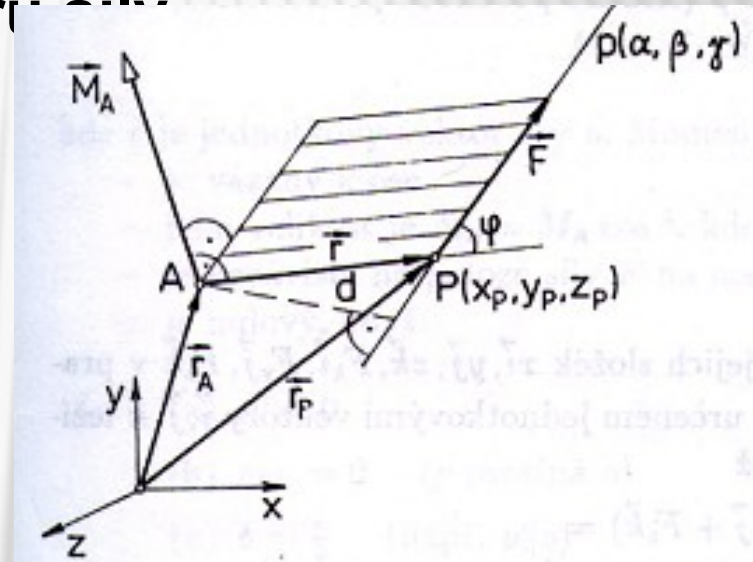


Síla je vektorová veličina, která působí na těleso.

MOMENT SÍLY

Moment síly **F** je definován jako vektorový součin polohového vektoru **r**, kteréhokoliv bodu nositelky síly vzhledem k bodu **A** a vektoru síly **F**.

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$$



Moment síly je vektor a má následující vlastnosti:

- je vázaný k bodu **A** a kolmý k rovině vektorů **r**, **F**;

MOMENT SÍLY

- jeho orientace je určena požadavkem, aby vektory – r , F , M_A tvořily pravotočivou soustavu;
- moment síly je nezávislý na poloze síly F na nositelce p ;
- Moment síly je nulový, pokud

(a) $F = 0$

(b) $r = 0$

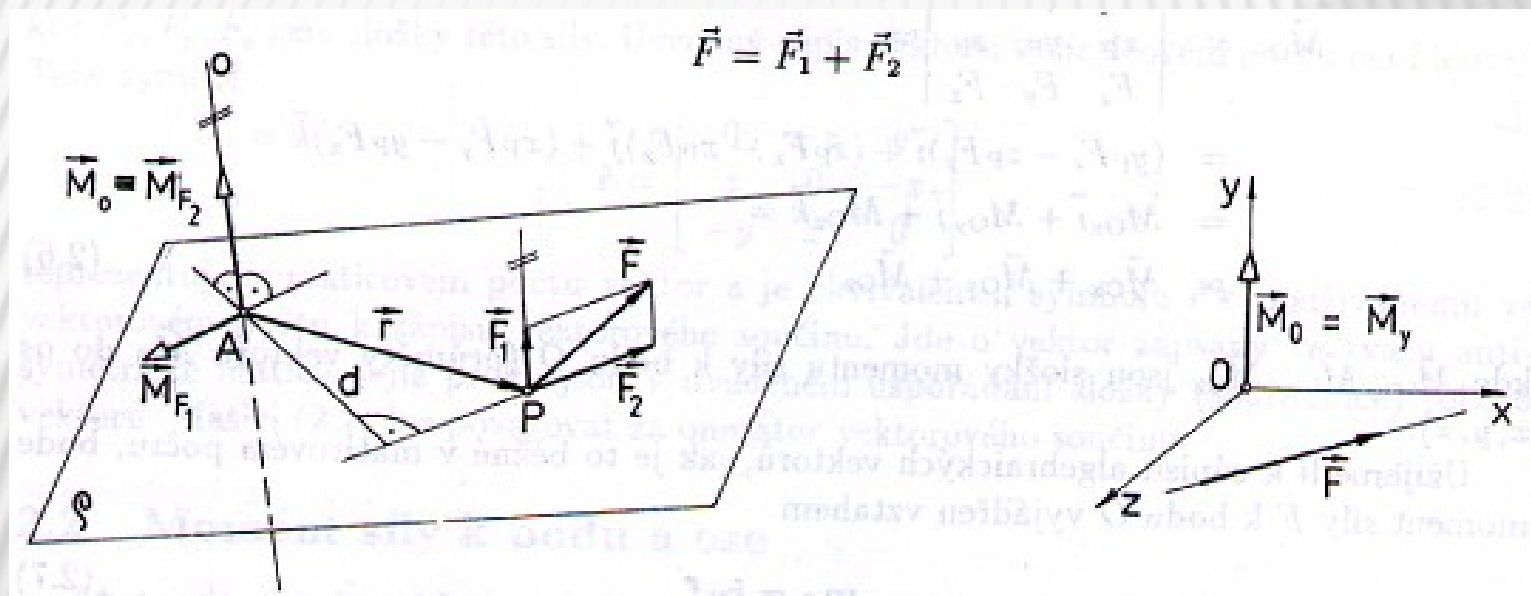
(c) $\varphi = 0$ (\vec{r} , \vec{F} jsou kolineární)

Varignonova věta:

Moment síly k nějakému bodu je součtem momentů jejich složek k témuž bodu.

MOMENT SÍLY

Moment síly k ose – graficky.



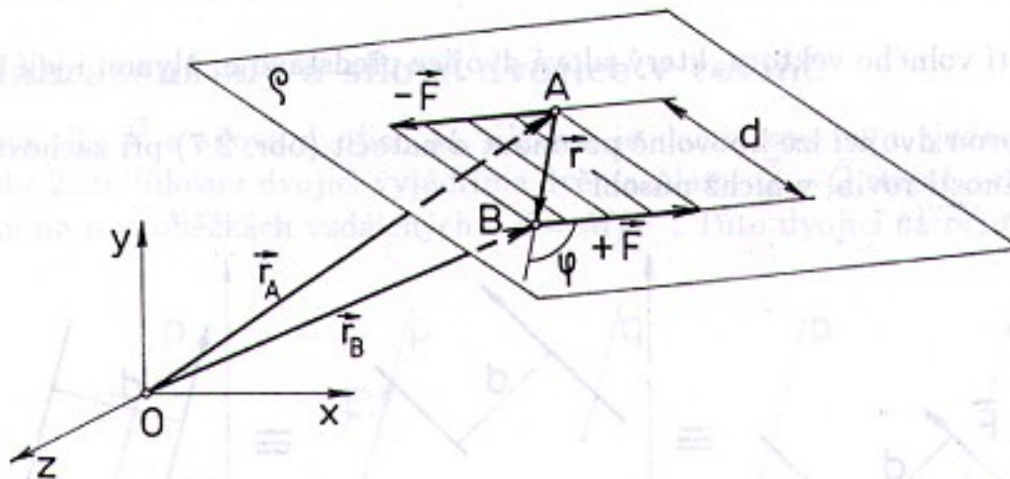
SILOVÁ DVOJICE

Silová dvojice je silový útvar tvořený dvěma silami stejné velikosti a směru, ale opačně orientovanými a neležícími na stejné nositelce.

V praxi se vyskytuje u točivého magnetického pole, vrtule letadla, vrtáku vnikajícího do materiálu.

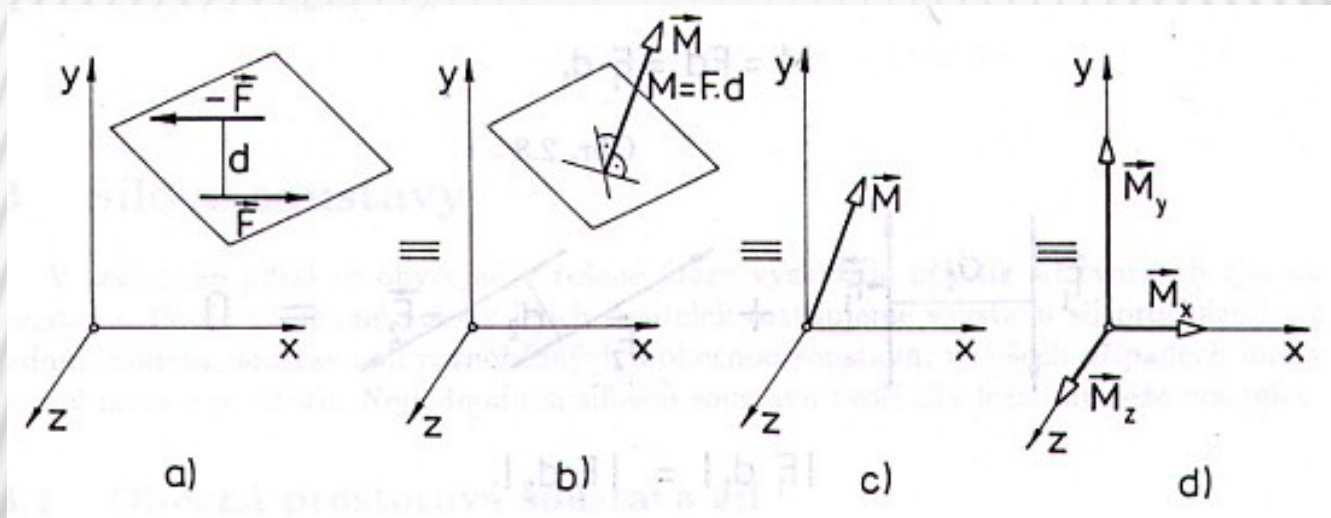
Vyjadřuje se momentem:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$



SILOVÁ DVOJICE

Moment silové dvojice:

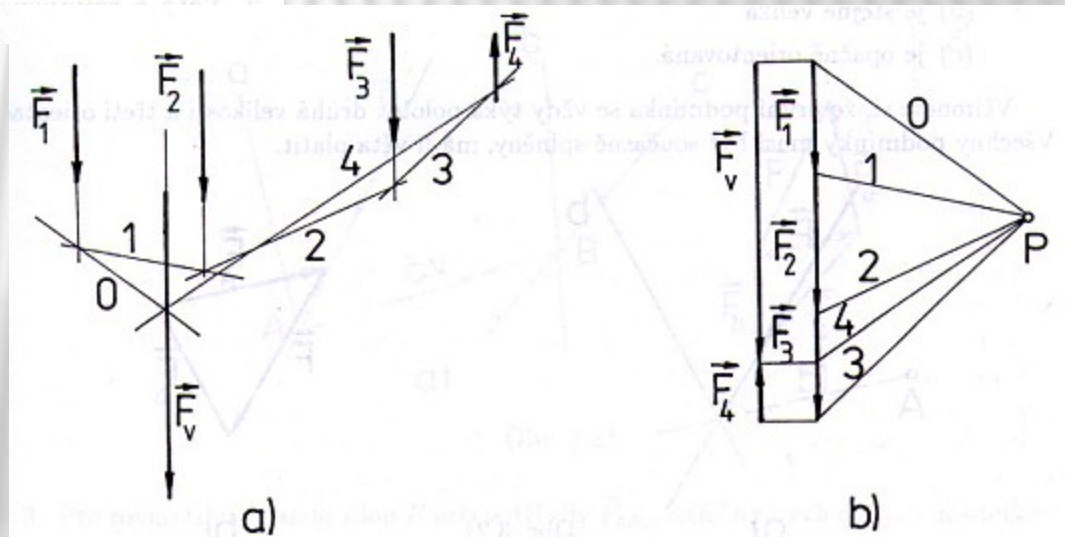
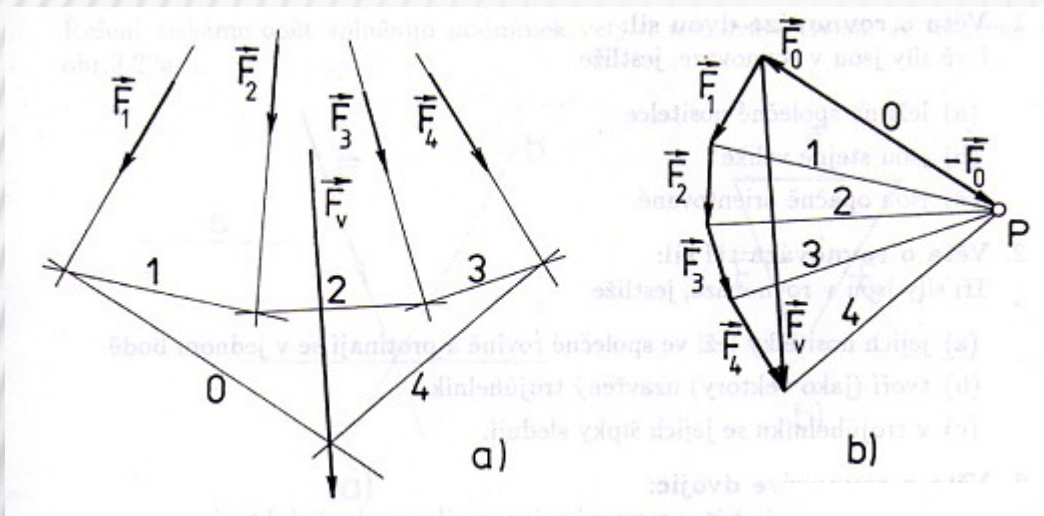


Jeho velikost se vypočte:

$$M = Fr \sin \varphi = Fd$$

ROVINNÉ SOUSTAVY SIL

Grafické řešení (nalezení výslednice sil):

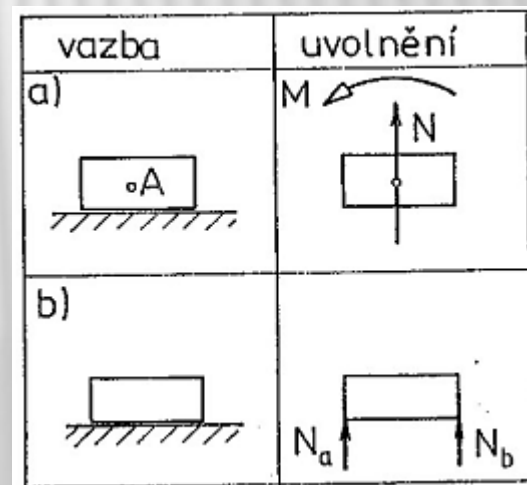
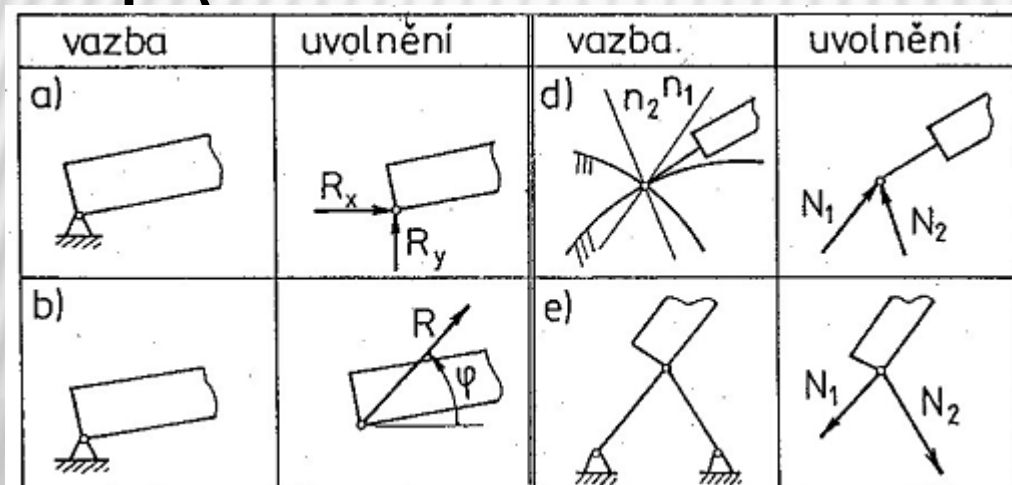


ULOŽENÍ

V technické praxi se málokdy vyskytuje volný bod, většinou je volnost bodu omezena tzv. **vazbami**.

Pohyblivost se charakterizuje **stupněm volnosti i** (v prostoru s 3 nezávislými souřadnicemi je $i=3$).

Příklad vazby a její uvolnění (rotační nebo posuvná



ULOŽENÍ, METODA UVOLŇOVÁNÍ

Pevná vazba:

vazba	uvolnění	vazba	uvolnění
a) 		b) 	

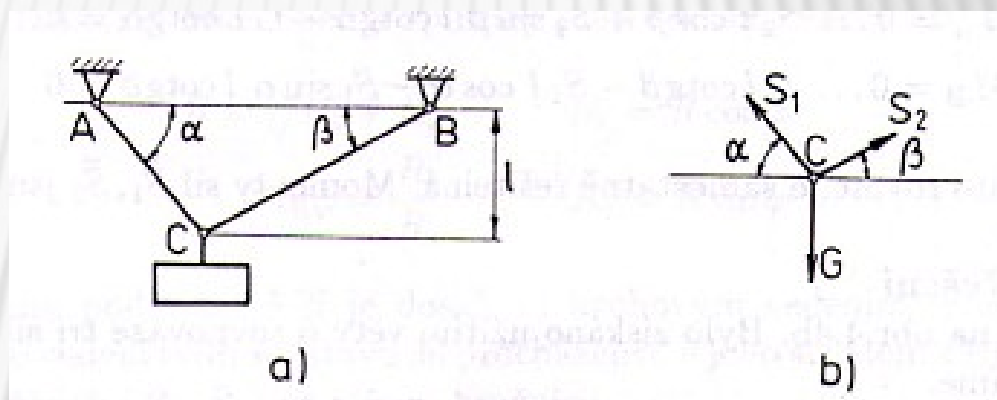
Metoda uvolňování, postup:

- 1) Zvolí se bod, který se bude uvolňovat.
- 2) Tento bod se nakreslí jako izolovaný volný.
- 3) Akční síly se překreslí jako vektory s působištěm v daném bodě.
- 4) Stejným způsobem se rozkreslí reakční síly.

METODA UVOLŇOVÁNÍ

Uvolňování lze chápat jako proces, kterým se mechanický model transformuje na silovou soustavu.

Př. Uvolnění tělesa zavěšeného na laně.



Pokud jde o analytické řešení, rovnováha soustavy se vyjádří rovnovážnými rovnicemi.

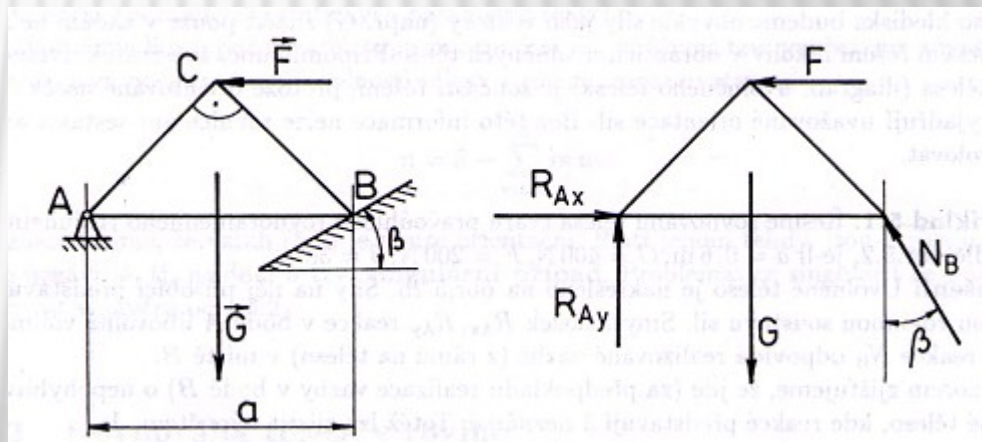
Rovnovážné rovnice budou řešitelné pokud budou nezávislé a budou-li obsahovat stejný počet neznámých jako bude rovnic.

ROVNICE ROVNOVÁHY

Pokud jde o obecnou rovinnou rovnováhu sil, jsou podmínky rovnováhy 3:

$$\sum F_{ix} = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0$$
$$\sum M_{iA} = 0$$

Obr.
mechanismu



trojúhelníkového

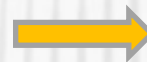
prutového

ROVNICE ROVNOVÁHY

Př. Rovnováhy na trojúhelníkovém tělese (viz. předchozí obr.):

Analytické řešení:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} = 0 & \dots\dots R_{Ax} - F - N_B \sin \beta = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 & \dots\dots R_{Ay} - G + N_B \cos \beta = 0 \\ \sum M_{iA} = 0 & \dots\dots 0,5 a F - 0,5 a G + a N_B \cos \beta = 0\end{aligned}$$

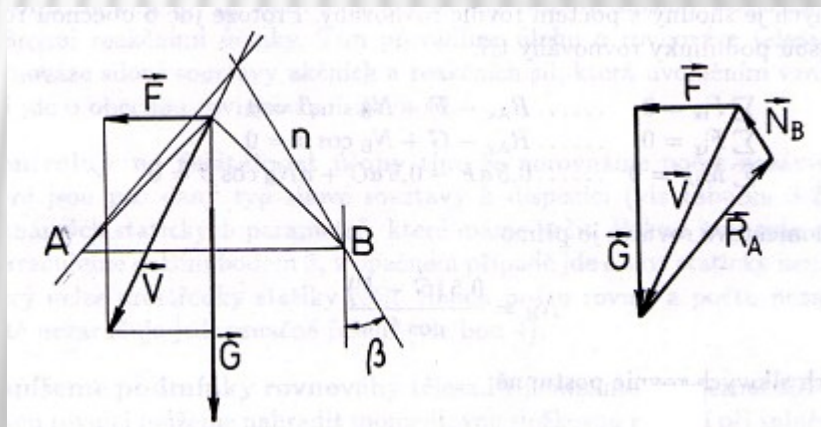


$$N_B = \frac{0,5(G - F)}{\cos \beta}$$



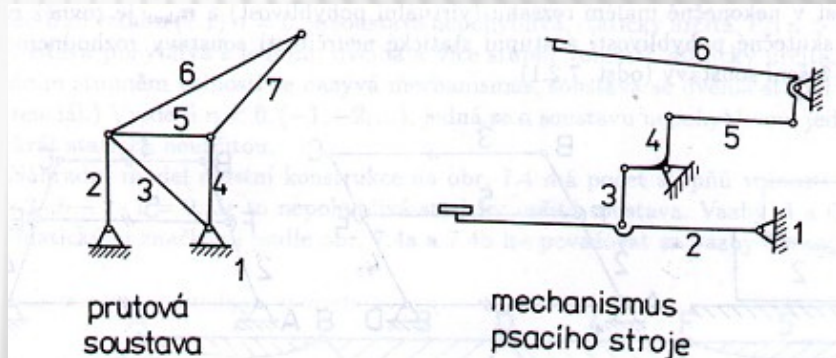
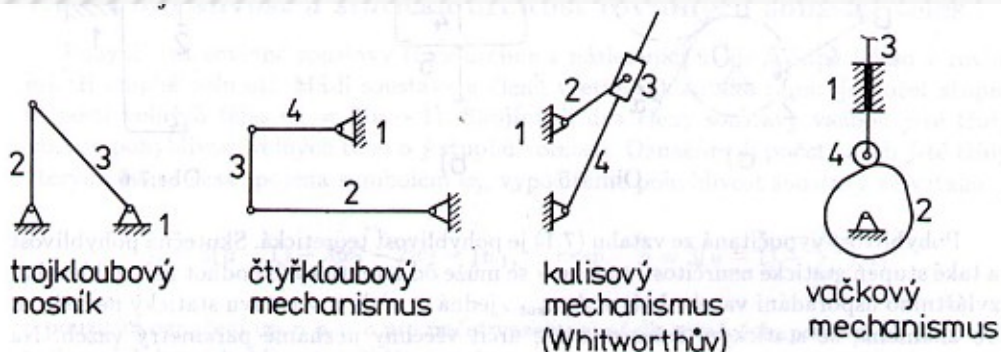
$$\begin{aligned}R_{Ay} &= G - N_B \cos \beta = G - 0,5(G - F) = 0,5(G + F) \\ R_{Ax} &= F + N_B \sin \beta = F + 0,5(G - F) \operatorname{tg} \beta\end{aligned}$$

Grafické řešení:

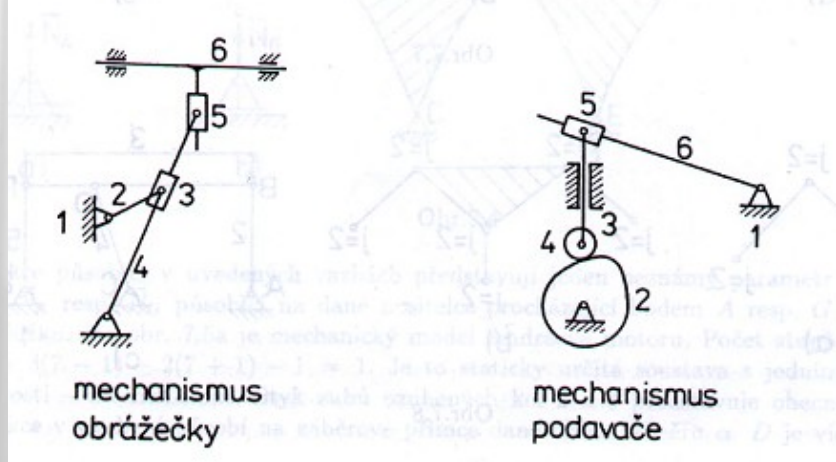


SOUSTAVY TĚLES

Soustava těles je seskupení nejméně tří členů (včetně rámu) spojených vazbami.

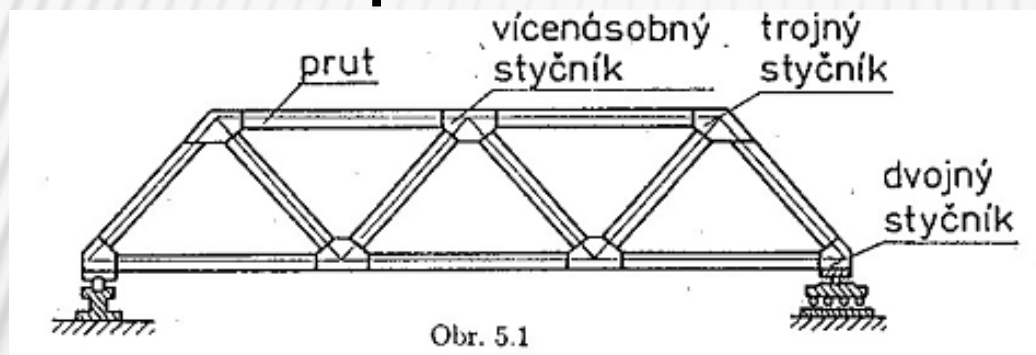


Složitější mechanismy

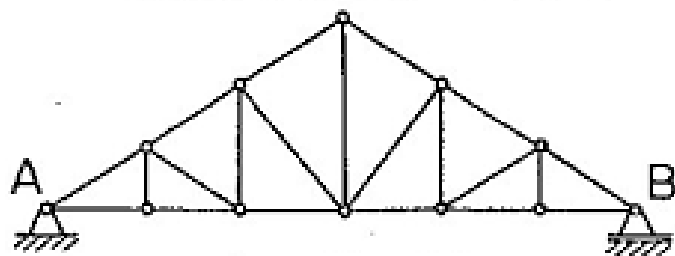


PRUTOVÉ SOUSTAVY

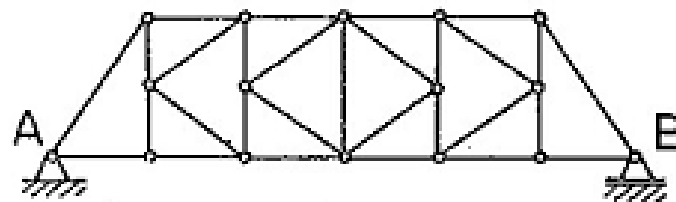
Prutové soustavy – jsou soustavy těles umožňující konstrukci rozměrných útvarů: jeřábů mostů, střešních konstrukcí apod.



konstrukce střechy



konstrukce mostu

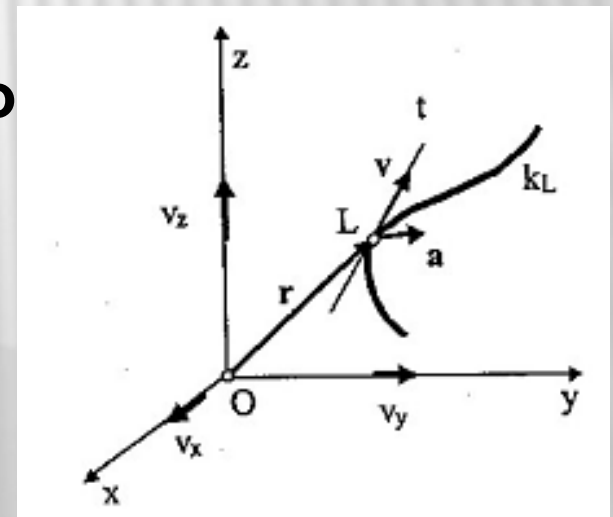


KINEMATIKA

Se zabývá zkoumáním jednoduchých objektů (hmotného bodu), těles i mechanismů z hlediska pohybu těchto ideálních objektů.

Pohyb hmotného bodu definujeme v kartézském souřadném systému (pravotočivý souřadný systém).

Hmotný bod **L** se pohybuje po trajektoro jeho poloha je určena polohovým vektorem **r**.



POHYB HMOTNÉHO BODU

Pohyb hmotného bodu může být obecně translační nebo rotační (případně kombinace obou).

Rychlost bodu L jako časová derivace průvodiče podle času:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

V kartézském souřadnicovém systému rychlost určíme

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Zrychlení $\mathbf{a}(t)$ jako časová derivace rychlosti podle času:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$

DRUHY POHYBU HMOTNÉHO BODU

Přímočarý pohyb je určité zjednodušení vůči pohybu křivočarému.

Pohyb rovnoměrný se dělí na:

- rovnoměrný s nulovým zrychlením;
- nerovnoměrný s nenulovým zrychlením.

Nerovnoměrný pohyb se dělí na zrychlený a zpožděný

$$s = s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2, \quad v = v(0) + at, \quad v = \sqrt{v(0)^2 + 2a(s - s(0))}$$

Kde **$s(0)$** , **$v(0)$** jsou výchozí poloha a výchozí rychlost v čase $t=0$ s konstantním zrychlením **a** .

DRUHY POHYBU HMOTNÉHO BODU

Zvláštním druhem pohybu je pohyb harmonický, který popisuje velké množství opakujících se (periodických) pohybu v technice. Nejčastěji v případě kmitání strojů, kývání kyvadel nebo oscilace v elektrotechnice.

Nejjednodušší harmonický pohyb je přímočarý, kde výchylka **s** se vypočte jako:

$$s = r \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Kde **r** je amplituda, **ω** je úhlová frekvence, **φ_0** počáteční fáze.

Perioda pohybu **T**:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

DRUHY POHYBU HMOTNÉHO BODU

Frekvence pohybu **f**:

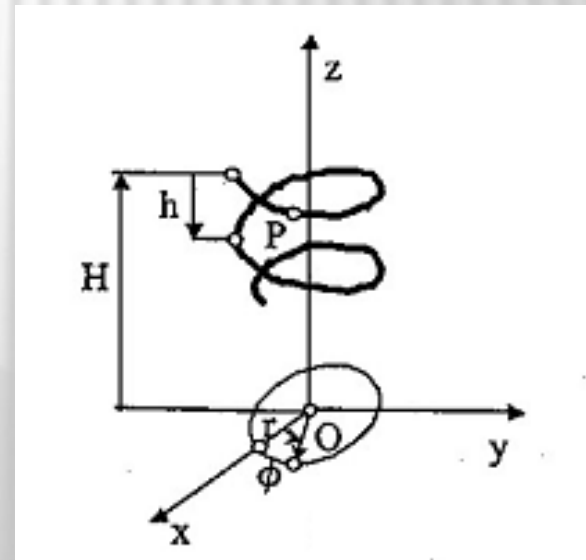
$$f = \frac{1}{T}$$

Derivováním vztahu pro dráhu (výchylku) dostaneme rychlost a zrychlení harmonického pohybu hmotného bodu

$$v = r\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -r\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

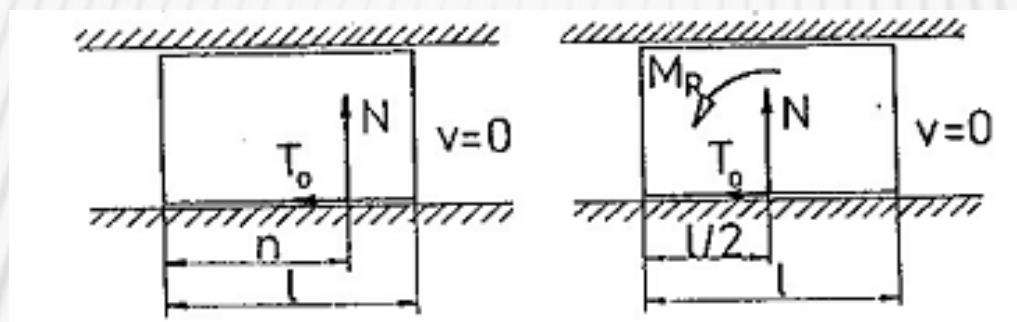
Př. harmonického pohybu hmotného bodu po spirále.



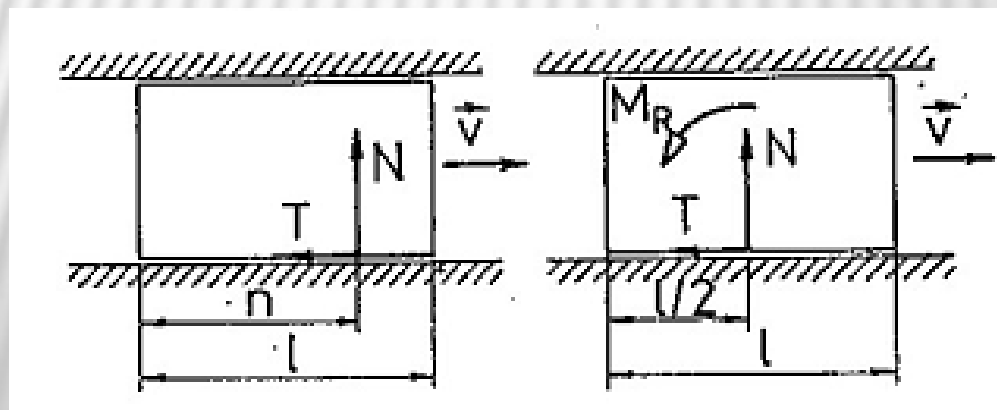
TĚLESA A JEJICH POHYB

Těleso s posuvnou vazbou:

Ve statice $v=0$.



V kinematice $v \neq 0$.



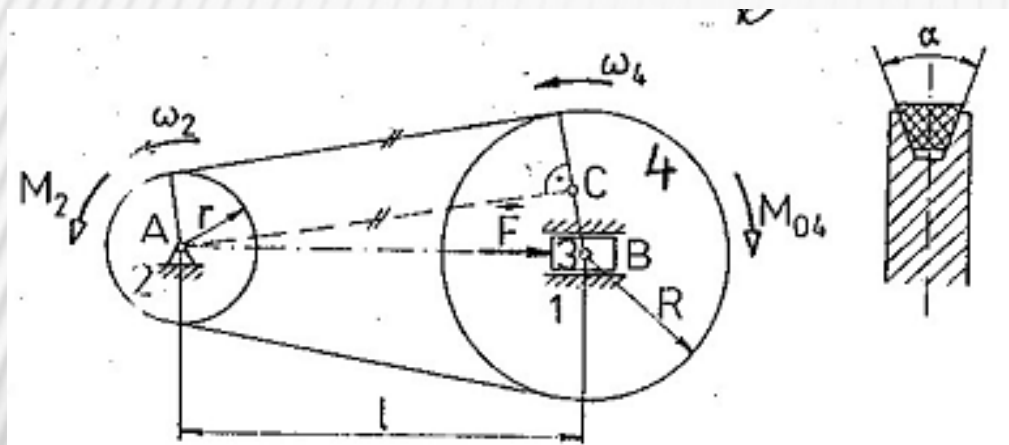
TĚLESA S REÁLNÝMI VAZBAMI

Postup řešení metodou uvolňování:

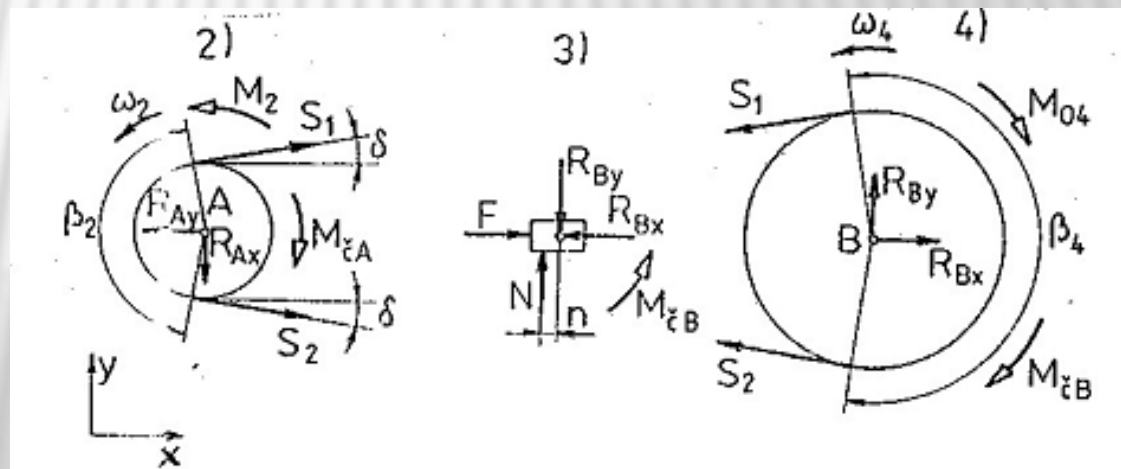
- 1) Formulace zadání a návrh mechanického modelu.**
- 2) Určení pohyblivosti a statické určitosti.**
- 3) Kinematický rozbor - určení rychlosti ve vazbách.**
- 4) Uvolnění jednotlivých částí soustavy.**
- 5) Sestavení rovnovážných rovnic.**
- 6) Řešení rovnovážných rovnic.**
- 7) Diskuse výsledků.**

TĚLESA S REÁLNÝMI VAZBAMI

Př. Řemenového převodu



Uvolnění prvků:



ZÁVĚR

Literatura:

- [1] Stejskal, V. a kol. *Mechanika 1*. ČVUT, 1998, 163 s.
- [2] *Mechanika - skripta*. 2003,
- [3] Hosnedl, S., Krátký, J. *Příručka strojího inženýra 1*, Computer press, 1999, 313 s.