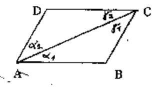
ROVNOBĚŽNÍKY a jejich vlastnosti

Definice:
Rovnoběžník je čtyřúhelník, který má každé dvě protější strany rovnoběžné.

Věta 1: Jestliže je čtyřúhelník rovnoběžníkem, pak platí, že jeho:
a) protější strany jsou shodné úsečky,
b) úhlopříčky se půlí (tj. mají společný bod, který je středem každé z nich),
c) protější vnitřní úhly rovnoběžníku jsou shodné.

Důkaz:
a) *Vycházíme z předpokladu:* Čtyřúhelník ABCD je rovnoběžník, tzn. že ↔AB//↔CD a ↔BC//↔AD (z definice rovnoběžníku).
Dokazujeme: $AB \cong CD$ *a* $BC \cong AD$



Trojúhelníky ABC a CDA jsou shodné podle věty *usu* (strana AC je společná, úhly α_1, γ_2 a α_2, γ_1 tvoří dvojice střídavých úhlů).
Proto: $AB \cong CD$ a $AD \cong BC$.

b), c) důkazy proveďte samostatně

Věta 2: a) Platí-li pro čtyřúhelník ABCD, že každé dvě protější strany jsou shodné, pak je čtyřúhelník ABCD rovnoběžníkem.
b) Platí-li pro čtyřúhelník ABCD, že se jeho úhlopříčky půlí, pak je čtyřúhelník ABCD rovnoběžníkem.

Věta 3: Platí-li pro čtyřúhelník ABCD, že jedna dvojice protějších stran jsou rovnoběžné a shodné úsečky, pak je tento čtyřúhelník rovnoběžníkem.

Třídění rovnoběžníků:

Rovnoběžníky
- Pravoúhelníky *(mají aspoň jeden vnitřní úhel pravý)*
  - čtverce
  - obdélníky
- Kosoúhelníky *(žádný vnitřní úhel není pravý)*
  - kosočtverce
  - kosodélníky

Rovnoběžníky můžeme třídit jiným způsobem, např. z hlediska shodnosti stran (rovnostranné a různostranné rovnoběžníky), nebo podle vlastnosti úhlopříček. (viz též pracovní texty Elementární geometrie)

Některé vlastnosti zvláštních druhů rovnoběžníků:
Věta 4: V každém rovnostranném rovnoběžníku jsou úhlopříčky navzájem kolmé.
Věta 5: V každém rovnostranném rovnoběžníku leží úhlopříčky v osách vnitřních úhlů.
Věta 6: Úhlopříčky v každém pravoúhlém rovnoběžníku jsou shodné.

Důkazy proveďte samostatně. Vlastnosti nejprve zformulujte jako věty tvaru implikace a pak použijte přímý důkaz.

3. MNOŽINY VŠECH BODŮ S DANOU VLASTNOSTÍ

V následující části textu se budeme zabývat vyšetřováním množin bodů s danou vlastností, přitom za základní množinu budeme považovat množinu všech bodů jisté roviny.

> Množina M je množinou všech bodů s danou vlastností $\mathcal{V}$ právě tehdy, když platí
> a) každý bod množiny M má vlastnost $\mathcal{V}$,
> b) každý bod, který má vlastnost $\mathcal{V}$, patří množině M.

Při vyšetřování množiny všech bodů s danou vlastností $\mathcal{V}$ obvykle postupujeme následujícím způsobem:
1. Vyznačíme větší počet bodů, které mají vlastnost $\mathcal{V}$.
2. Snažíme se odhadnout, jakým geometrickým útvarem U je množina M a vyslovíme hypotézu M = U.
3. Ověříme platnost hypotézy, tj. dokážeme ji nebo vyvrátíme.
4. Vyvrácenou hypotézu zpřesníme a znovu ověřujeme.

Při důkazu tvrzení "Útvar U je množinou M všech bodů s danou vlastností $\mathcal{V}$" ověřujeme rovnost dvou množin - množiny M všech bodů s vlastností $\mathcal{V}$ a množiny bodů útvaru U. Dokazujeme tedy:
a) $U \subset M$, tzn. každý bod útvaru U má vlastnost $\mathcal{V}$, tj. $(\forall X \in \varrho)(X \in U \Rightarrow X \in M)$;
b) $M \subset U$, tzn. každý bod s vlastností $\mathcal{V}$ náleží útvaru U, tj. $(\forall X \in \varrho)(X \in M \Rightarrow X \in U)$.

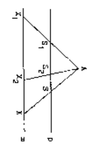
Poznámka: Platnost podmínky b) lze často snadněji dokázat pomocí věty obměněné, tj. $(\forall X \in \varrho)(X \notin U \Rightarrow X \notin M)$, což slovně vyjádřeno znamená, že žádný bod, který nenáleží útvaru U nemá vlastnost $\mathcal{V}$.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

Úloha 3.1 Je dána přímka m a bod A, který na ní neleží. Vyšetřete množinu středů všech úseček AX, kde X je libovolný bod přímky m. (Obr. 3.1)

Řešení: Volíme-li různé body $X_1, X_2, \dots$ na přímce m a konstruujeme-li středy úseček $AX_1, AX_2, \dots$, ukazuje se, že tyto středy patrně leží na jedné přímce, která je rovnoběžná s přímkou m. Zvolme tedy dva libovolné různé body X_1, X_2 na přímce m, označme S_1, S_2 středy úseček AX_1, AX_2 a sestrojme přímku $p = \leftrightarrow S_1S_2$.

Hypotéza: Hledanou množinou bodů je přímka p rovnoběžná s přímkou m, která prochází středem některé úsečky AX, např. středem S_1 úsečky AX_1.



Obr. 3.1

Důkaz:
a) Dokážeme, že každý bod přímky p má danou vlastnost, tj. je středem jisté úsečky AX, kde $X \in m$.
Zvolíme libovolný bod $S \in p$, $S \neq S_1$. Přímka AS protíná přímku m v bodě X. Protože $S \neq S_1$, je i $X \neq X_1$. Body A, X_1, X jsou vrcholy trojúhelníku. Protože S_1 je středem úsečky AX_1 a přímka p je rovnoběžná s přímkou m, je úsečka S_1S střední příčkou trojúhelníka AX_1X a tedy bod S je středem úsečky AX.
b) Dokážeme, že bod S, který je středem libovolné úsečky AX, kde $X \in m$, leží na přímce p.
Pro libovolný bod $X \in m$, $X \neq X_1$ vznikne trojúhelník AX_1X. Úsečka S_1S je v tomto trojúhelníku střední příčkou. Z vlastnosti střední příčky vyplývá, že přímka S_1S je rovnoběžná s přímkou m. Protože $S_1 \in p$ a přímka p je rovnoběžná s přímkou m, je $p = \leftrightarrow S_1S$ (daným bodem lze vést k dané přímce jen jednu rovnoběžku) a tedy $S \in p$.

Závěr: Množinou středů všech úseček AX, kde X je libovolný bod přímky m a bod A neleží na přímce m, je přímka rovnoběžná s přímkou m procházející středem některé úsečky AX.