Zobecňování, abstrakce

Růžena Blažková

Zobecnění neboli generalizace je logický přechod od jedinečného k obecnému, od méně obecného k obecnějšímu poznatku. Je to rovněž výsledek tohoto procesu. Podkladem zobecnění je myšlenkové vyčlenění, fixování nějakých obecně důležitých vlastností patřících pouze dané třídě objektů nebo vztahů.

Ve výuce matematiky provádíme zobecnění např. při vyvozování vzorců (obsah nebo obvod obdélníku, výpočet n-tého členu aritmetické posloupnosti), při odstranění omezujících podmínek kladených na určitý objekt (např. studium goniometrických funkcí v různých intervalech), při nahrazení konstanty ve studovaném objektu proměnnou apod.

Opakem zobecnění je specializace – je to přechod od dané množiny objektů k některé její podmnožině.

Abstrakce je myšlenkové odtržení obecně důležitých, podstatných vlastností vyčleněných v průběhu zobecnění, od dalších, pro studium nepodstatných vlastností zkoumaných objektů nebo vztahů (nepodstatné vlastnosti odtrhujeme). Je to také výsledek tohoto procesu. Abstrakce se nemůže uskutečnit bez zobecnění.

Abstrakce má dvě formy:

1. Smyslová, názorná abstrakce - při smyslovém vnímání objektu se zaměříme pouze na některé vlastnosti zkoumaného objektu a jiné nebereme v úvahu. (Např. při studiu trojúhelníku nás zajímá tvar, ale nikoliv materiál, ze kterého je vyroben.) Výsledkem jsou různá zjednodušení schémata nebo náčrtky.
2. Myšlenková abstrakce – spočívá ve vytvoření slova, nového ideální objektu, pojmu. Nespočívá pouze v tom, že se zaměříme jen na některé vlastnosti objektu nebo jevu, ale spočívá na jejich jisté transformaci. (Např. výsledkem myšlenkové abstrakce je pojem přímky.).

Protikladem procesu abstrakce je proces konkretizace. Konkretizace je myšlenková činnost, při které se jednostranně fixuje některá stránka objektu studia, vně vazby s ostatními stránkami. Konkretizace je neoddělitelná od specializace.

Ve školské matematice dochází k několika stupňům abstrakce při vytváření pojmu přirozeného čísla, racionálního čísla, při vyvozování operací s přirozenými čísly apod.

1. a) Ilustrujte na příkladech, jak se abstrakcí vytváří u dětí pojem přirozeného čísla.
   b) Ilustrujte na příkladech, jak se vytváří pojem zlomku.

2. Najděte
   a) přirozená čísla x, y,
   b) racionální čísla x, y,

   pro která platí: $x + y = x \, . \, y$.

3. Najděte přirozená čísla $a, b,$ pro která platí $a.b = \frac{a}{b}$

4. Pomocí zobecňování odvoďte vztah pro výpočet obsahu obdélníku.

5. Pomocí zobecňování odvoďte vztah pro přímou (nepřímou) úměrnost.

6. Dosazováním přirozených čísel konkretizujte několik členů posloupností:
   a) $\frac{n(n+1)}{2}$
   b) n^2
   c) $\frac{n(3n-1)}{2}$
   d) $n(2n-1)$.

7. Ověřte, zda n-tý člen aritmetické posloupnosti s diferencí d
   1, $1+d$, $1+2d$, $1+3d$, $1+4d$, … platí $a_n = 1 + (n-1)\,d$.

8. Vyjádřete obecně, jak lze vypočítat počet úhlopříček konvexního mnohoúhelníku.

9. Vyjádřete obecně, jak můžeme vypočítat součet velikostí vnitřních úhlů daného konvexního pravidelného n – úhelníku.

10. Určete, na kolik částí je možné rozdělit kruh n různými přímkami. Odvoďte vztah pro výpočet maximálního počtu částí, na které lze n přímkami rozdělit rovinu ($\frac{n^2+n+2}{2}$) .

11. Odvoďte vztah pro počet stěn, hran a vrcholů mnohostěnů (Eulerova věta ($s + v = h + 2$).

12. Přesvědčte se o platnosti tzv. zobecněné Pythagorovy věty (uvádí se pro čtverce sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku, avšak platí i pro jiné geometrické útvary sestrojené nad stranami tohoto trojúhelníku?) .