ŠVP – INTERAKTIVNÍ FORMY VÝUKY V MATEMATICE

Růžena Blažková

Brno 2011

V semináři budou prezentovány metody interaktivní výuky které jsou užitečným nástrojem pro rozvoj logiky a geometrické představivosti. Geometrie pomocí překládání papíru jako nástroj k aktivaci žáků, k prohloubení zájmu o daný geometrii i ke zvýšení pozornosti žáků. Budou uvedeny činnosti, které rozvíjejí manuální zručnost, i příklady k rozvíjení logického myšlení.

Motto:
Montesori, M: Slyším a zapomenu,
vidím a zapamatuji si,
udělám a pochopím.

1. Úvod

Úspěšnost žáků v geometrii, vytváření vědomostí, zdokonalování dovedností žáků i rozvíjení jejich schopností úzce souvisí s vytvářením postojů žáků k vyučování geometrii, s volbou metod a forem práce, při kterých dochází k vytváření geometrických pojmů. Základní geometrické pojmy jsou abstraktní (nikdy není možné ilustrovat např. přímku nebo rovinu) avšak je potřebné u žáků vytvořit jejich správné představy. Metody a činnosti námi předkládané se opírají o vlastní aktivitu žáků, o získávání poznatků prostřednictvím manipulativních činností, o vytváření hypotéz, odvozování, zdůvodňování s akcentem na samostatnou práci žáků.

Vyučování založené na pouhém předávání instrukcí a hotových poznatků nerespektuje v plné šíři individualitu žáka a jeho přístupy k získávání poznatků. Žáci se liší svými zkušenostmi, zájmy, schopností učit se, postoji, stylem učení, rychlostí, vytrvalostí apod. a také typem vnímání. Často si nezapamatují proces získávání poznatků, ale určitě si pamatují to, co je osloví citově, určitě s pamatují zážitky. Matematické pojmy budované na pouhém zapamatování si určitých vět vedou k formálním vědomostem. Poznatky získané na základě činností usnadňují pochopení, umožňují vidět souvislosti a napomáhají vytváření systému. Činnost rukou podněcuje činnost mozku. Výuka geometrie je založena na umění dívat se, umění experimentovat, umění vyvozovat závěry.

K procvičení základních geometrických pojmů a k opakování učiva jsou vhodné činnosti související s překládáním papíru.

2. Podpora geometrické a prostorové představivosti

Úlohy, ve kterých se upevňují představy o geometrických útvarech v rovině a rozvíjí se kombinatorické myšlení.

1. Zvolte si pět různých bodů A, B, C, D, E, v rovině tak, aby ležely na jedné přímce. Kolik různých úseček je těmito body určeno?
2. Zvolte si pět různých bodů A, B, C, D, E, v rovině tak, aby žádné tři neležely na jedné přímce. Kolik různých úseček je těmito body určeno?

3. Nakreslete dva trojúhelníky, abyste viděli
   a) tři trojúhelníky
   b) čtyři trojúhelníky
   c) osm trojúhelníků.
4. a) Nakreslete dva čtverce, abyste viděli tři čtverce.
   b) Nakreslete tři čtverce, abyste viděli sedm čtverců.
5. Nakreslete dva obdélníky, abyste viděli
   a) tři obdélníky
   b) pět obdélníků
   c) osm obdélníků
   d) jedenáct obdélníků.
6. Vytvořte koláže z geometrických útvarů.
7. Vytvořte si skládanky a sestavujte z nich koláže podle vlastní fantazie.
8. Sestavte různé obrázky z tangramu.
9. Sestavujte různé stavby z krychlí
   a) podle plánu
   b) podle vlastní fantazie
   c) podle kótovaného půdorysu.

3. Geometrie pomocí překládání papíru

3.1 Základní pojmy – bod, přímka, polopřímka, úsečka

a) Na listu papíru vyznačte bod A. Přeložte papír tak, abyste vymodelovali přímku, která prochází bodem A. Označte ji *a*. Vymodelujte jinou přímku, která prochází bodem A. Označte ji *b*. Kolik takových přímek můžete vymodelovat?

Závěr: *Daným bodem prochází nekonečně mnoho přímek.*

b) Na papíru vyznačte bod B, který je různý od bodu A a neleží na žádné z vymodelovaných přímek *a, b*. Přeložte papír tak, abyste vymodelovali přímku *p*, která prochází body A, B. Vymodelujte další přímku *s*, která prochází body A i B

Závěr: *Danými dvěma body prochází jediná přímka.*

c) Vyznačte pastelkou polopřímku AB. Vyznačte jinou pastelkou polopřímku opačnou k polopřímce AB. Vyznačte počátky obou polopřímek.

Závěr: *Opačné polopřímky leží na jedné přímce a mají společný jediný bod – počátek.*

d) Vyznačte úsečku AB. Přeložením papíru sestrojte střed úsečky AB. Označte jej S. Porovnejte úsečky AS, BS.

Závěr: *Střed úsečky AB je bod S, pro který platí* $AS \cong BS$.

e) Přeložením papíru vymodelujte osu úsečky AB. Na ose zvolte libovolný bod M. Porovnejte úsečky AM, BM. Zvolte několik dalších bodů na ose úsečky a porovnávejte úsečky, jejichž krajními body jsou vždy zvolený bod na ose a krajní body úsečky AB.

Závěr: *Každý bod osy úsečky má od jejích krajních bodů stejnou vzdálenost.*

3.2.Vzájemná poloha dvou přímek

a)Překládejte list papíru tak, abyste vymodelovali:

- přímky různoběžné
- přímky rovnoběžné
- přímky navzájem kolmé.

Závěr: *Různoběžné přímky mají společný právě jeden bod.*
Rovnoběžné přímky leží v jedné rovině a nemají žádný společný bod.
Přímky k sobě kolmé jsou přímky různoběžné.

b)Vymodelujte přímku *p* a zvolte na ní bod P. Dále vymodelujte přímku *k*, která prochází bodem P a je kolmá k přímce *p*. Vymodelujte ještě jednu takovou přímku.
Závěr: *Daným bodem na přímce lze vést k této přímce jedinou kolmici.*

c)Vymodeluje přímku *m* a zvolte bod K, který na přímce *m* neleží. Vymodelujte přímku *k*, která prochází bodem K a je kolmá k přímce *m*. Průsečík přímek *m* a *k* označte P. Vymodelujte další přímku, která prochází bodem K a je kolmá k přímce *m*.
Závěr: *Daným bodem lze k dané přímce sestrojit jednou kolmici. Průsečík obou přímek se nazývá pata kolmice.*

Opakujeme pojmy: Přímá čára, křivá čára, lomená čára.

Základní konstrukce: Narýsování přímky procházející danými dvěma body.
Sestrojení úsečky dané délky.
Narýsování přímky, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou přímkou.
Narýsování přímky, která prochází daným bodem a je kolmá k dané přímce.

Úlohy:

1. Jakou vzájemnou polohu mohou mít tři různé přímky v rovině?
2. Jakou vzájemnou polohu mohou mít čtyři různé přímky v rovině? Kolik průsečíků nejvýše může vzniknout?
3. Zvolte si pět různých bodů A, B, C, D, E tak, aby žádné tři neležely v jedné přímce. Narýsujte všechny přímky procházející vždy dvěma ze zvolených bodů. Kolik různých přímek můžete narýsovat?
4. Narýsujte rovnoběžné přímky *a, b* a přímku *c*, která je kolmá k přímce *a*. Jakou vzájemnou polohu mají přímky *b* a *c* ?
5. Narýsujte úsečku AB a sestrojte její osu.

3. 3. Trojúhelník

a) Na listu papíru si zvolte tři různé body A, B, C, tak, aby neležely v jedné přímce. Vymodelujte přímky AB, AC, BC. Vybarvěte trojúhelník ABC.

b) Překládáním papíru ověřte, že grafický součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý.

c) Ověřte, že vnější úhel trojúhelníku je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech.

d) Modelujte postupně: - trojúhelník pravoúhlý

trojúhelník rovnoramenný
trojúhelník rovnostranný.

e) Sestrojte středy stran trojúhelníku ABC a označte je postupně K, L, M.

f) Na modelu trojúhelníku ABC modelujte postupně:
   - osy stran
   - těžnice
   - osy vnitřních úhlů
   - výšky
   - střední příčky.

Pozorujte vlastnosti vymodelovaných útvarů a vyslovujte závěry.

g) Ověřte, že průsečík os stran, průsečík výšek a těžiště trojúhelníku leží na jedné přímce (Eulerova přímka).

3.4. Mnohoúhelníky

Formát papíru řady A má strany a a $a\sqrt{2}$. Poskytuje mnoho možností pro skládání geometrických útvarů.

a) Poskládejte rovnoramenný trojúhelník, určete velikosti jeho vnitřních úhlů.
b) Poskládejte rovnostranný trojúhelník.
c) Sestavte pravidelný šestiúhelník.
d) Sestavte pravidelný osmiúhelník.
e) Sestavte pravidelný pětiúhelník

Popis: viz El portál MU: Blažková, R.: Zajímavá geometrie pro každého

3.5. Provázková geometrie

a) Pomocí provázku vymodelujte úsečku a vyznačte její střed.

b) Pomocí provázku a kolíku vymodelujte
   - rovnoramenný trojúhelník
   - rovnostranný trojúhelník
   - čtverec
   - obdélník.

c) Pomocí provázku a kolíku vymodelujte kružnici.

d) Pomocí provázku a dvou kolíků vymodelujte elipsu.

3.6. Konstrukce omezenými prostředky

a) Pouze přímým pravítkem narýsujte:
   - střed úsečky
   - přímku kolmou k dané přímce.

b) Pouze kružítkem narýsujte úsečku, která je dvojnásobkem dané úsečky.

4. Myšlení, polovina práce

Viz El portál MU: Blažková, R.: Zajímavá geometrie pro každého

5. Optické klamy a jejich využití

Pracovní listy

6. Početní geometrie

1. Jeden vnitřní úhel rovnoběžníku je a) 42°, b) 90°.
Jakou velikost mají ostatní vnitřní úhly tohoto rovnoběžníku ?

1. Jakou velikost mají vnitřní úhly v trojúhelníku, jestliže jsou v poměru 7 : 3 : 2 ?

2. Úhel při hlavním vrcholu rovnoramenného trojúhelníku je o 75° věší než úhel při základně. Jakou velikost mají vnitřní úhly tohoto trojúhelníku?

3. Do čtverce ABCD o straně délky *a* je vepsán rovnostranný trojúhelník ABE, který má také délku strany *a*. Jakou velikost má úhel CED ?

4. Uměli byste vypočítat obvod rovnostranného trojúhelníku, kdybyste znali:
a) velikost jeho výšky,
b) velikost jeho těžnice,
c) délku poloměru kružnice trojúhelníku opsané,
d) délku poloměru kružnice trojúhelníku vepsané?

5. Těžnice trojúhelníku rozdělí tento trojúhelník na šest trojúhelníků. Jaký je vztah mezi obsahy jednotlivých trojúhelníků a obsahem původního trojúhelníku ?

6. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a sestrojte jeho těžnici BD. Narýsujte střed F této těžnice a sestrojte úsečky AF a CF. V jakém vztahu jsou obsahy trojúhelníků AFD, CFD, BCF a ABF a obsahu trojúhelníku ABC ?

7. V trojúhelníku ABC jsou sestrojeny těžnice t_a a t_b . Jimi je trojúhelník rozdělen na tři trojúhelníky a jeden čtyřúhelník. Obsah čtyřúhelníku je 1 cm^2. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC.

8. Nakreslete trojúhelník, jehož obsah je $\frac{1}{2}$ cm^2 .

9. Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník má obsah 32 cm^2. Vypočítejte obvod tohoto trojúhelníku.

10. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a body M, N, P, které dělí jeho strany BC, CA, AB postupně v poměru 2 : 1. Jakou část trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník XYZ, jehož vrcholy X, Y, Z jsou průsečíky přímek AM, BN, CP.

11. Je dán čtverec ABCD, délka jeho strany je 100 mm. Vypočítejte poloměr kružnice, která prochází body B, C a středem strany AD.

12. Profil válcové klenby má rozpětí $a = 240$ cm a výšku oblouku $v = 50$ cm. Jaký poloměr má oblouk ?

13. Je dán rovnoběžník ABCD. Úhlopříčky tohoto rovnoběžníku jej rozdělí na čtyři trojúhelníky. Vypočítejte jejich obsahy.

14. Vypočítejte obsah kosočtverce, jehož úhlopříčky mají délku 6 cm a 8 cm.

15. Do téže kružnice je vepsán pravidelný šestiúhelník a rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že obsah šestiúhelníku je dvakrát větší než obsah rovnostranného trojúhelníku.

16. Lichoběžník je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky. V jakém vztahu jsou obsahy těchto trojúhelníků? (Nejprve řešte pro a = 10 cm, c = 5 cm, v = 4 cm a potom obecně).

17. Narýsujte lichoběžník ABCD, jehož výška je 2,5 cm, délky základen si vhodně zvolte. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku.

18. Je dán lichoběžník ABCD, narýsujte jeho úhlopříčky AC, BD. Kolik dvojic geometrických útvarů, které mají sobě rovné obsahy, můžete najít?

19. Kružnici se středem S je opsán rovnoramenný lichoběžník ABCD. Vzdálenost jednoho vrcholu od středu S je 7 cm, vzdálenost druhého vrcholu je 4 cm. Vypočítejte obsah lichoběžníku ABCD.

20. V jakém poměru jsou
a) obvody
b) obsahy

rovnostranného trojúhelníku o straně délky a, čtverce o straně délky a, a pravidelného šestiúhelníku o straně délky a.

22. Vepište do kružnice o poloměru r postupně rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný šestiúhelník, pravidelný osmiúhelník. Vyjádřete jejich obvody a obsahy pomocí r.

23. Jak se změní a) délka kružnice
b) obsah kruhu,

zvětšíme-li poloměr původní kružnice dvakrát (třikrát, obecně n – krát) ?

24. Počítejte a porovnejte délky čar:

a) půlkružnice o poloměru r,

b) dvou půlkružnic o poloměru $\frac{r}{2}$,

čtyř půlkružnic o poloměru $\frac{r}{4}$.

25. Sledujte vztah mezi povrchem a objemem krychle (číselně) v závislosti na zvětšování délky hrany krychle.

Úlohy aplikační

1. Obdélník má obsah 36 cm^2. Jaké mohou být délky jeho stran? Který z obdélníků má nejmenší obvod?

2. Obdélník má obvod 48 cm. Jaké mohou být délky jeho stran? Který z obdélníků má největší obsah?

3. Určete obsah jednotlivých částí praporu, jestliže prapor má tvar obdélníku, jehož délky stran jsou 30 cm a 20 cm, je rozdělen na modrý klín tvaru trojúhelníku (strana 20 cm, výška 15 cm) a dva shodné lichoběžníky - bílý a červený.

4. Změní se obsah (výměra) zahrady, která měla původně tvar čtverce o straně délky 50 m, jestliže jednu její stranu o 5 metrů zvětšíme a druhou její stranu o 5 metrů zkrátíme?

5. Jak se změní obsah obdélníku, jestliže jeho délku o 10 cm zmenšíme a jeho šířku o 10 cm zvětšíme?

6. Vypočítejte obvody a obsahy hřišť pro některé sporty:

	délka hřiště	šířka hřiště
házená	40 m	20 m
kopaná	90 m	50 m
košíková	26 m	14 m
volejbal	18 m	9 m

7. Ledová plocha má minimální délku 56 m a maximální délku 61 m, minimální šířku 26 m, maximální šířku 30 m.

8. Tenisový dvorec pro dvouhru má délku 2377 cm a šířku 823 cm.

Tenisový dvorec pro čtyřhru má délku 1097 cm a šířku 823 cm.

9. Václavské náměstí v Praze má délku 750 m a šířku 80 m. Náměstí v Jihlavě má rozlohu 36 653 m^2. Které z náměstí má větší rozlohu.

10. Jakou dráhu vykoná krajní bod sekundové ručičky hodinek za jeden den, jestliže délka ručičky je 1,2 cm?

11. Představte si, že máte hrášek o poloměru 1 cm, kopací míč o poloměru 10 cm a Zeměkouli o poloměru 6 378 km. Kolem každé z těchto koulí omotáte provaz (teoreticky) a potom délku provazu zvětšíte o 10 m. Jak velká bude mezera, která vznikne, když z provazu znovu vytvoříme kružnici kolem těles?

12. Vypočítejte obsah mezikruží, které vznikne, když čtverci o straně délky 10 cm opíšeme a vepíšeme kružnici.

13. Z čtvercové desky vyřízneme kruh maximálního obsahu, Kolik procent činí odpad?

14. Z desky tvaru kruhu vyřízneme čtverec maximálního obsahu,. Kolik procent činí odpad?

15. Odhadněte, jaký objem má třída, ve které se učíte. Změřte rozměry třídy a objem vypočtěte. Unesli byste vzduch, který je ve vaší třídě?

16. Kolik m^3 vody je v bazénu, který má délku 50 m, šířku 20 m a hloubku, která je první dva metry 150 cm a potom se postupně zvětšuje do 5 m.

17. Bazén u domu má rozměry: délka 350 cm, šířka 250 cm, výška 155 cm. kolem bazénu je sokl 40 cm vysoký a 40 cm široký. Bazén i sokl jsou obloženy dlaždicemi tvaru čtverce o délce strany 10 cm. Kolik dlaždic je potřeba ?

18. Benzínová nádrž tvaru kvádru má rozměry 70 cm, 30 cm, 25 cm. Hladina benzínu sahá 5 cm pod horní okraj nádoby. Kolik litrů benzínu je v nádrži?

19. Plavecký bazén má zkosené dno (hloubka se rovnoměrně zvětšuje). Rozměry bazénu jsou: délka 25 m, šířka 15 m, největší hloubka 2 m, nejmenší hloubka 1,2 m. Kolik litrů vody bazén obsahuje, je-li naplněn po okraj ?

20. Může být v akváriu 100 kg vody?

21. Jaký je objem prostoru pod střechou domu 15 m dlouhého, 8 m širokého
a výška štítu je 3,5 m.

22.Vypočítejte rozměry válcové nádoby, jejíž objem je litr a výška je rovna průměru válce.

23. Vypočítejte objem válcové nádoby, jejíž objem je litr a výška je rovna dvojnásobku průměru válce.

24. Vypočtěte objem válce, jehož plášť je čtverec se stranou délky 20 cm.

25. Zjistěte, jaká objem má hrníček, sklenička, hluboký talíř, lžíce, lžička, které používáte.

26. Babička používá místo vážení polévkovou lžíci. Její lžíce obsahuje 18 g vody, 20 g oleje, 20 g mléka, 15 g octa, 20 g kečupu, 22 g mouky, 25 g cukru, 20 g soli, 25 g másla, 17 g rozpuštěného másla, 22 g rýže.

27. Kuželovitá nálevka má mít objem 1 litr a výšku 12 cm. Jakou výseč musíme zvolit k výrobě nálevky?

28. Představte si kvádr sestavený z krychliček – tři krát dvě krát čtyři krychličky. Kolik z 24 krychliček prochází tělesová úhlopříčka kvádru ?

29. Představte si krychli, jejíž hrana má velikost 5 cm. Krychli na povrchu obarvíme barvou a potom krychli rozřežeme na 125 krychliček s hranou velikosti 1 cm. Kolik krychliček má právě jednu stěnu obarvenou ? Kolik má obarvené dvě stěny? Kolik tři stěny ?

30. Je dána krychle ABCDEFGH o hraně délky a. Vypočítejte obsah lichoběžníku BEKJ, kde bod K je středem hrany GH a bod J je středem hrany CG.

31. Vypočtěte délky hran kvádru, jestliže
    a) je dána délka jeho tělesové úhlopříčky u a poměr hran a : b : c.
    b) je dán poměr obsahů jeho stěn.

32. Je dán kvádr ABCDEFGH a kvádr A´BĆ´D´E´F´G´H´ jemu podobný. Jaký je poměr
    a) objemů obou těles
    b) povrchů obou těles?

33. Vypočítejte velikosti hran kvádru a objem tohoto kvádru, jestliže hrany jsou v poměru 1 : 2 : 6 a jeho povrch je 1 000 m^2.

34. Vypočítejte velikosti hran a povrch kvádru, jestliže hrany jsou v poměru 1 : 2 : 4 a jeho objem je 1 000 m^3.

35. Z plechu o rozměrech a = 12 cm, b = 10 cm máme zhotovit krabičku bez víka (odstřihnutím čtverců u vrcholů) v tak, aby její objem byl co největší.

36. Z plechového pásu šířky 8 dm máme zhotovit žlab s co největším průtokem vody. Jaký bude mít žlab tvar, aby se nejlépe využil materiál?

37. Vypočítejte povrch a objem tělesa, které vznikne rotací rovnostranného trojúhelníku kolem jeho strany.

38. Vypočítejte délku hrany, povrch a objem krychle vepsané do koule o poloměru r.

39. Jaký je poměr povrchů a poměr objemů koulí, z nichž jedna je vepsána a druhá je opsána krychli o hraně a.

40. Koule a rovnostranný kužel mají stejné povrchy, V jakém poměru jsou objemy těchto těles ?

RNDr. Růžena Blažková, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta MU
Poříčí 31
Brno
e-mail: blazkova@ped.muni.cz