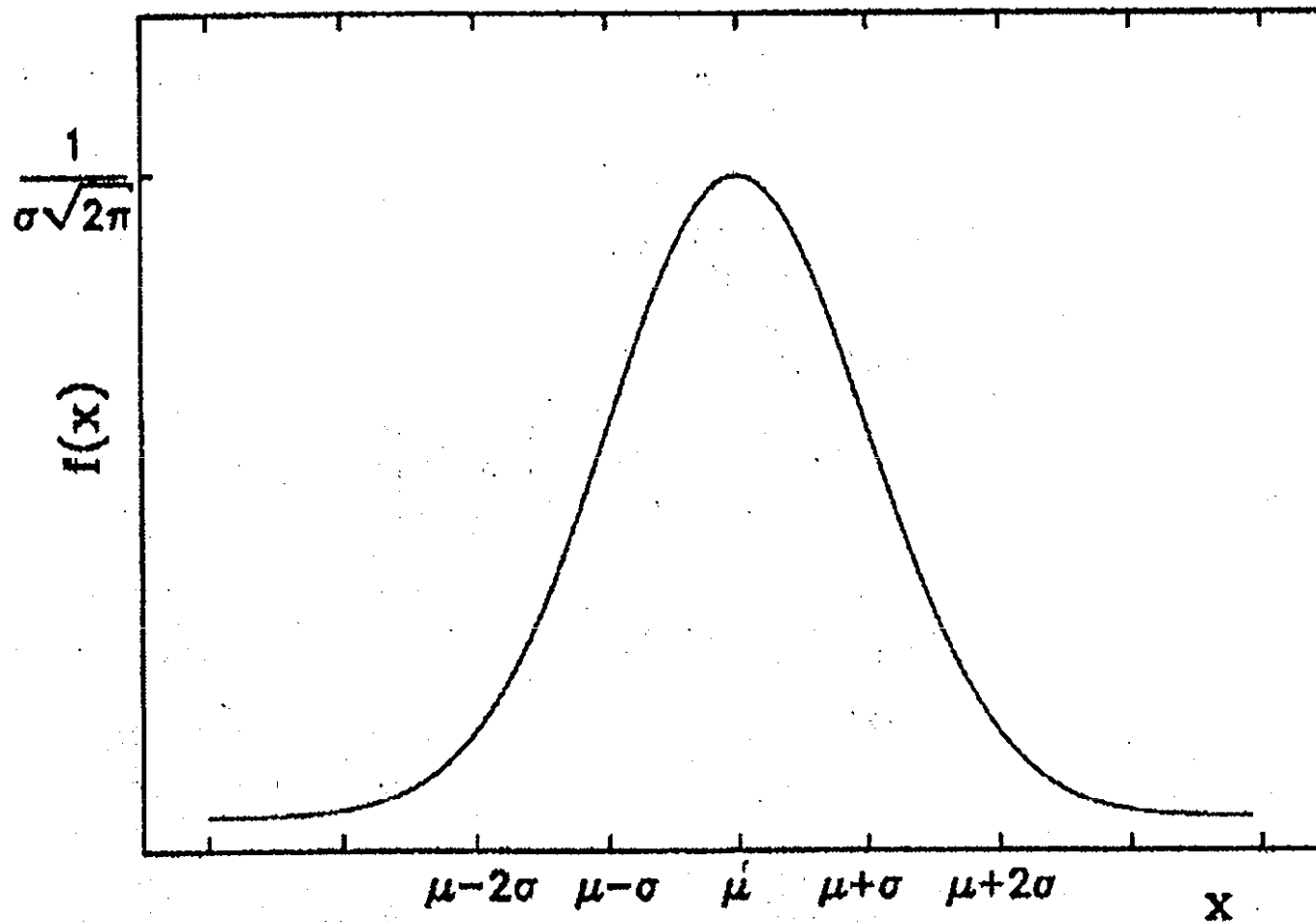


# Modelová rozdělení

# Normální Gaussovo rozdělení

- Při každém měření –  $m$  nezávislých náhodných vlivů
- Každý z vlivů dává vznik elementární chybě
- Výsledná hodnota je dána součtem velkého množství elementárních chyb se skutečnou hodnotou

# Normální rozdělení

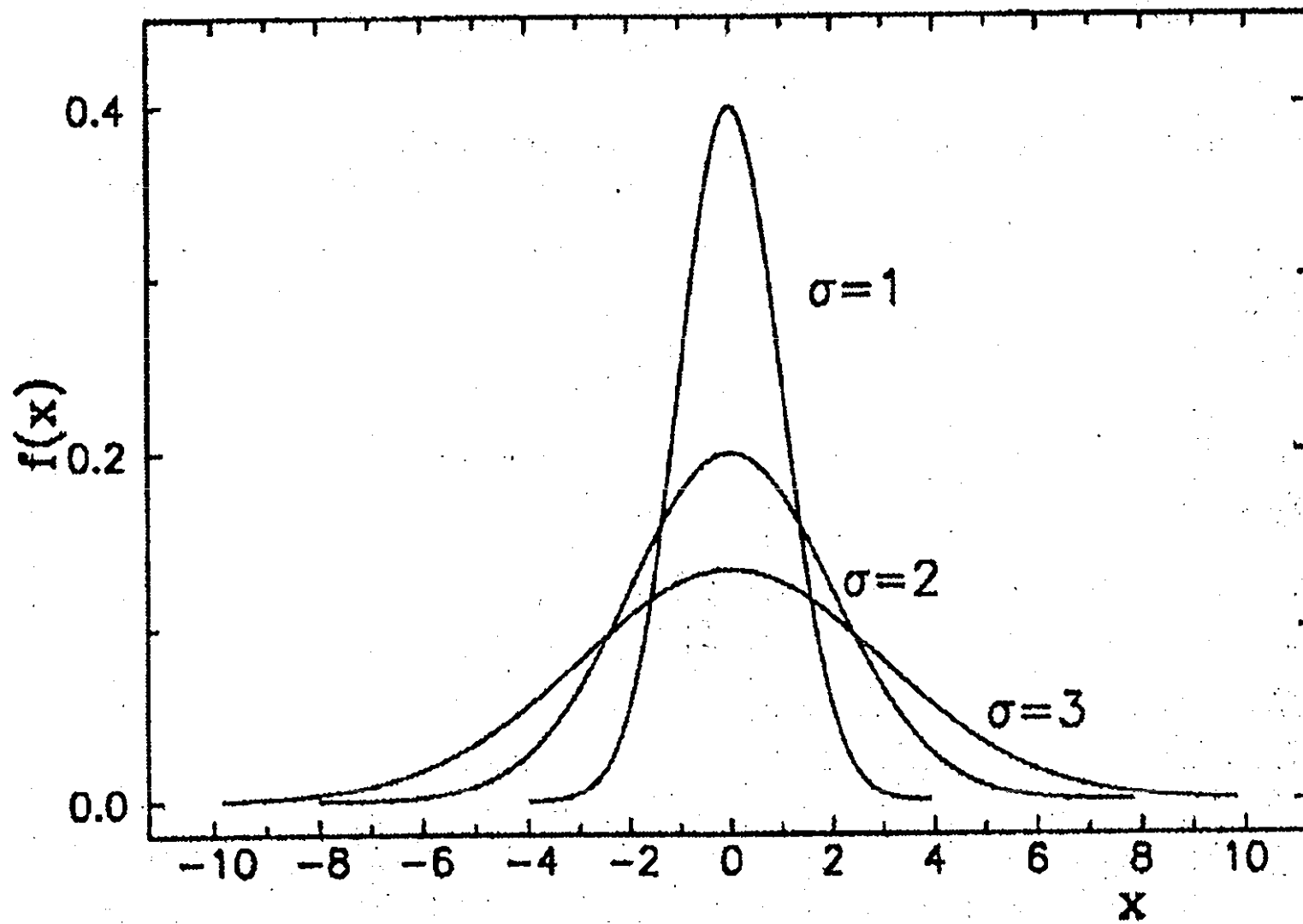


Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$\mu$  - udává polohu maxima normálního rozdělení  
 $\sigma$  - šířkový parametr, směrodatná odchylka  
(chyba měření)

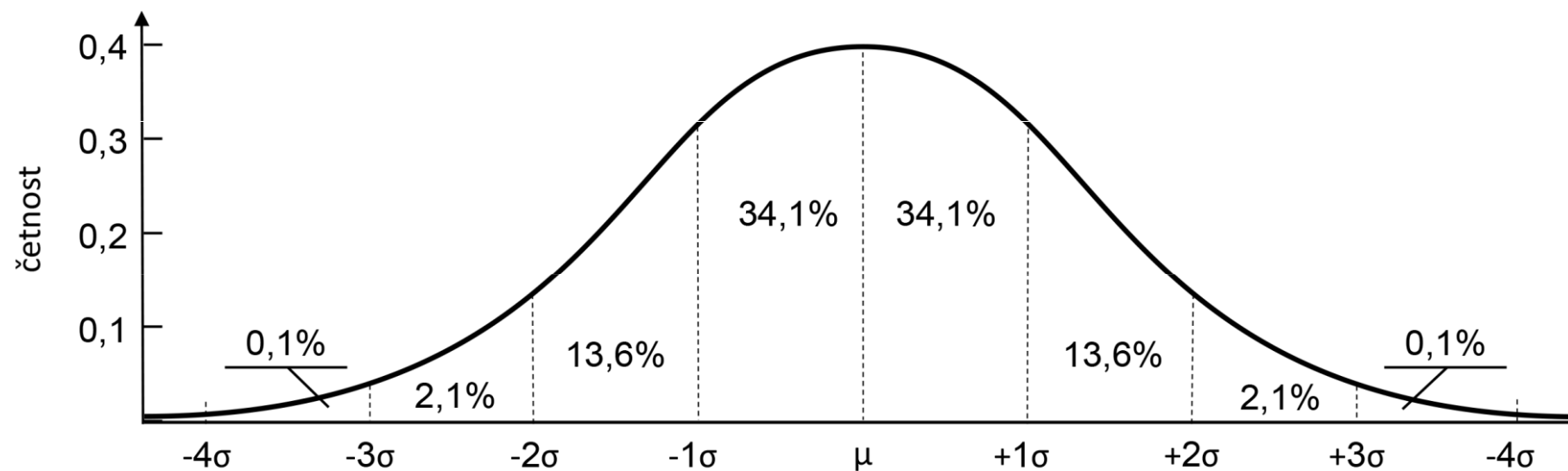
# Normální rozdělení



Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení s různými parametry  $\sigma$

# Normální rozdělení

- $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$  s pravděpodobností 68,27 %,
- $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$  s pravděpodobností 95,45 %,
- $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  s pravděpodobností 99,73 %.



# Studentovo rozdělení

- Pro Gaussovo rozdělení potřebujeme znát 2 parametry -  $\mu$ ,  $\sigma$  z velkého počtu měření ( $n \rightarrow \infty$ )
- Pro Studentovo rozdělení stačí 1 parametr – **n - počet stupňů volnosti**
- **n = počet měření - 1**

$$t = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{x}{n}}}$$

t – náhodná veličina

$x_0$  – náhodná proměnná – standardní rozdělení

x – náhodná proměnná – rozdělení  $x^2$

n – počet stupňů volnosti

$x_0$ , x – navzájem nezávislé proměnné

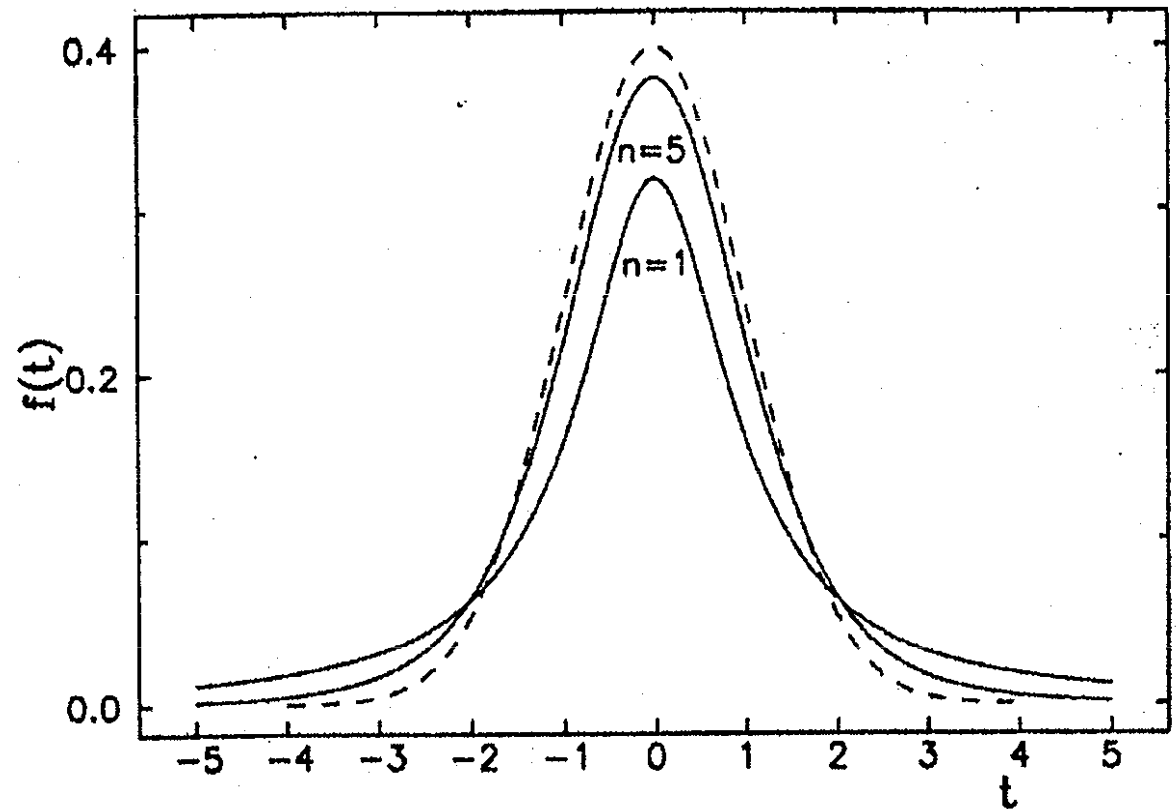
# Studentovo rozdělení

- Proměnná  $t$  má studentovo rozdělení s  $n$  stupni volnosti:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Gama funkce:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$



Srovnání Studentova rozdělení (plná čára) se standardním normálním rozdělením (přerušovaná čára)

# Studentovo rozdělení

- **Interval spolehlivosti:**
- Velikost intervalu spolehlivosti je určena součinem směrodatné odchylky aritmetického průměru a Studentova koeficientu pro příslušný počet měření a požadované jistoty



Tabulka Studentových koeficientů:

P	0.050	0.100	0.200	0.500	0.683	0.900	0.954
v							
1	0.079	0.158	0.325	1.000	1.839	6.314	13.815
2	0.071	0.142	0.289	0.816	1.322	2.920	4.500
3	0.068	0.137	0.277	0.765	1.198	2.353	3.292
4	0.067	0.134	0.271	0.741	1.142	2.132	2.858
5	0.066	0.132	0.267	0.727	1.111	2.015	2.640
6	0.065	0.131	0.265	0.718	1.091	1.943	2.508
7	0.065	0.130	0.263	0.711	1.077	1.895	2.421
8	0.065	0.130	0.262	0.706	1.067	1.860	2.359
9	0.064	0.129	0.261	0.703	1.059	1.833	2.313
10	0.064	0.129	0.260	0.700	1.053	1.812	2.277
11	0.064	0.129	0.260	0.697	1.048	1.796	2.249
12	0.064	0.128	0.259	0.695	1.044	1.782	2.225
13	0.064	0.128	0.259	0.694	1.041	1.771	2.206
14	0.064	0.128	0.258	0.692	1.038	1.761	2.189
15	0.064	0.128	0.258	0.691	1.035	1.753	2.175
16	0.064	0.128	0.258	0.690	1.033	1.746	2.163
17	0.064	0.128	0.257	0.689	1.031	1.740	2.153
18	0.064	0.127	0.257	0.688	1.029	1.734	2.143
19	0.064	0.127	0.257	0.688	1.028	1.729	2.135
20	0.063	0.127	0.257	0.687	1.026	1.725	2.128

21	0.063	0.127	0.257	0.686	1.025	1.721	2.121	2.518	2.831
22	0.063	0.127	0.256	0.686	1.024	1.717	2.115	2.508	2.819
23	0.063	0.127	0.256	0.685	1.023	1.714	2.109	2.500	2.807
24	0.063	0.127	0.256	0.685	1.022	1.711	2.104	2.492	2.797
25	0.063	0.127	0.256	0.684	1.021	1.708	2.100	2.485	2.787
26	0.063	0.127	0.256	0.684	1.020	1.706	2.096	2.479	2.779
27	0.063	0.127	0.256	0.684	1.020	1.703	2.092	2.473	2.771
28	0.063	0.127	0.256	0.683	1.019	1.701	2.088	2.467	2.763
29	0.063	0.127	0.256	0.683	1.018	1.699	2.085	2.462	2.756
30	0.063	0.127	0.256	0.683	1.018	1.697	2.082	2.457	2.750
31	0.063	0.127	0.256	0.682	1.017	1.696	2.079	2.453	2.744
32	0.063	0.127	0.255	0.682	1.017	1.694	2.076	2.449	2.738
33	0.063	0.127	0.255	0.682	1.016	1.692	2.074	2.445	2.733
34	0.063	0.127	0.255	0.682	1.016	1.691	2.071	2.441	2.728
35	0.063	0.127	0.255	0.682	1.015	1.690	2.069	2.438	2.724
36	0.063	0.127	0.255	0.681	1.015	1.688	2.067	2.434	2.719
37	0.063	0.127	0.255	0.681	1.014	1.687	2.065	2.431	2.715
38	0.063	0.127	0.255	0.681	1.014	1.686	2.063	2.429	2.712
39	0.063	0.126	0.255	0.681	1.014	1.685	2.061	2.426	2.708
40	0.063	0.126	0.255	0.681	1.013	1.684	2.059	2.423	2.704
41	0.063	0.126	0.255	0.681	1.013	1.683	2.058	2.421	2.701
42	0.063	0.126	0.255	0.680	1.013	1.682	2.056	2.418	2.698
43	0.063	0.126	0.255	0.680	1.012	1.681	2.055	2.416	2.695
44	0.063	0.126	0.255	0.680	1.012	1.680	2.053	2.414	2.692
45	0.063	0.126	0.255	0.680	1.012	1.679	2.052	2.412	2.690
46	0.063	0.126	0.255	0.680	1.012	1.679	2.051	2.410	2.687
47	0.063	0.126	0.255	0.680	1.011	1.678	2.050	2.408	2.685
48	0.063	0.126	0.255	0.680	1.011	1.677	2.049	2.407	2.682
49	0.063	0.126	0.255	0.680	1.011	1.677	2.047	2.405	2.680
50	0.063	0.126	0.255	0.679	1.011	1.676	2.046	2.403	2.678

# Studentovy koeficienty

P	0.050	0.100	0.200	0.500	0.683	0.900	0.954	0.980	0.990
v									
1	0.079	0.158	0.325	1.000	1.839	6.314	13.815	31.821	63.657
2	0.071	0.142	0.289	0.816	1.322	2.920	4.500	6.965	9.925
3	0.068	0.137	0.277	0.765	1.198	2.353	3.292	4.541	5.841
4	0.067	0.134	0.271	0.741	1.142	2.132	2.858	3.747	4.604
5	0.066	0.132	0.267	0.727	1.111	2.015	2.640	3.365	4.032
6	0.065	0.131	0.265	0.718	1.091	1.943	2.508	3.143	3.707
7	0.065	0.130	0.263	0.711	1.077	1.895	2.421	2.998	3.499
8	0.065	0.130	0.262	0.706	1.067	1.860	2.359	2.896	3.355
9	0.064	0.129	0.261	0.703	1.059	1.833	2.313	2.821	3.250
10	0.064	0.129	0.260	0.700	1.053	1.812	2.277	2.764	3.169

# Chyby měřidel, celková chyba měření

- Chyba měřidla – chyba systematická + náhodná, kterou měřidlo do měření vnáší (mezní chyba)
- U mechanických měřidel – polovina nebo jede dílek stupnice
- Třída přesnosti měřícího přístroje (ručkové voltmetry, ampérmetry)

# Chyby měřidel, celková chyba měření

- Pro odhad celkové chyby měření je určující směrodatná odchylka střední hodnoty měřené veličiny a chyba měřidla

$$u_c = \sqrt{(k \cdot \bar{s})^2 + \Delta^2}$$

### 7.1.2 Zákon přenosu chyb

Například v [3] najdeme následující jednoduché odvození zákona přenosu chyb. Mějme aritmetické průměry  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m$  m přímo měřených veličin

Odhad střední hodnoty hledané veličiny  $y$  vypočteme ze vztahu

$$\hat{y} \doteq f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m) \quad (35)$$

Změnu  $y$  vyjádříme diferenciálem

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_2, \dots, x_m} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)_{x_1, \dots, x_{m-1}} dx_m \quad (36)$$

Předpokládáme i platnost pro konečné odchylky

$$\hat{y} - y_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(\hat{x}_1 - x_{1i}) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)(\hat{x}_m - x_{mi})$$

Předpokládejme, že každá z veličin  $x_1, \dots, x_m$  byla změřena  $n$ -krát. Umocněním poslední rovnice a sečtením přes všechna  $i$  dostaneme

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y} - y_i)^2}{n-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_1 - x_{1i})^2}{n-1} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_m - x_{mi})^2}{n-1}$$

Po odmocnění dostaneme zákon přenosu (hromadění) chyb

$$\hat{s}_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \hat{s}_{x_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \hat{s}_{x_m}^2} \quad (37)$$

# Zákon přenosu chyb

$$u_v = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u_{x_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 u_{x_m}^2}$$

# Regresní analýza

Lineární regrese metodou nejmenších čtverců

- Hledání takových hodnot parametrů regresní funkce. Které minimalizují součet druhých mocnin odchylek mezi naměřenými hodnotami  $y_i$  a hodnotami  $\tilde{y}_i$  na proložené křivce zvoleného typu.

# Lineární regrese

- Je třeba určit hodnoty dvou parametrů a, b
- $y=ax+b$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2) \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$



# Lineární regrese

- Nabývá-li koeficient  $b$  nulovou hodnotu

$$a_{b=0} = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i^2)}$$

Koeficient korelace (nejistoty parametrů)

$$r = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n (y_i^2) - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}$$

# Lineární regrese

- Nejistota parametru **a** udávající směrnici přímky:

$$u_a = a \cdot \sqrt{\frac{1-r^2}{r^2 \cdot (n-2)}}$$

