2.3 Determinanty matic řádu n

Cíle

Cílem kapitoly je zvládnutí řešení determinantů čtvercových matic.

Definice 2.3.1.

Determinantem (řádu n) **čtvercové matice A** řádu n, jejímiž prvky a_{ij} jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme ***číslo***, které značíme ***det* A**; $|\mathbf{A}|$ a definujeme takto:

1. Je-li n = 1, pak det **A** = a_{11}.
2. Pro $n \geq 2$ je

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \mathbf{A}_{1j} =$$

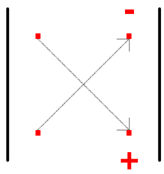
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

kde matice $\mathbf{A}_{1j}$ vznikne z matice **A** vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

Výklad

1. Pro matici **A** řádu n = 2 platí

det **A** = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, tj. od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále.



Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3.3 - 2.1 = 7.$$

Výklad

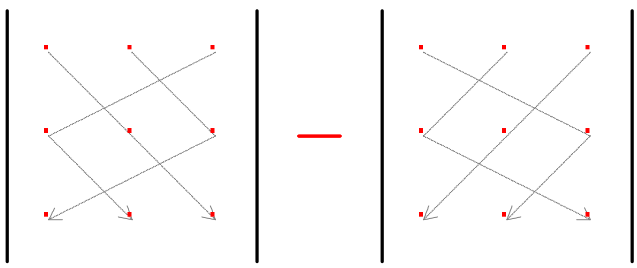
2. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu n = 3 platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Tento výpočet si snadno zapamatujeme podle tzv. ***Sarrusova pravidla***:



Nejprve zapíšeme výrazy $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ utvořené „rovnoběžně s hlavní diagonálou“ a pak odečteme výrazy $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{21}a_{12}a_{33}$, utvořené „rovnoběžně s vedlejší diagonálou“ (viz schéma).

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = [3.0.(-2) + 1.1.1 + 2.(-1).2] - [1.0.2 + 3.(-1).1 + 1.2.(-2)] =$$

$$= 1 - 4 - (-3 - 4) = 4.$$

Výklad

3. Pro výpočet determinantů matic řádu n ≥ 4 však neexistuje žádné obdobné pravidlo jako je Sarrusovo, které platí pouze pro determinanty matic řádu třetího. Abychom nemuseli tyto determinanty počítat jen na základě definice, seznámíme se s některými důležitými vlastnostmi determinantů, s jejichž pomocí se výpočet zjednoduší.

Vlastnosti determinantů

Věta 2.3.1. (Laplaceův rozvoj). Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n platí:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.\det \mathbf{A}_{ij}$$ - rozvoj determinantu podle i-tého řádku,

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}.\det \mathbf{A}_{ij}$$ - rozvoj determinantu podle j-tého sloupce,

kde matice $\mathbf{A}_{ij}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

D ů k a z se provádí indukcí vzhledem k n.

Poznámky

1. *Determinant matice $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme subdeterminantem vzhledem k prvku a_{ij}.*
2. *Součin $(-1)^{i+j}$. det $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} a značíme*

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Tento determinant můžeme vypočítat rozvojem podle 2. sloupce.

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{3+2} . 3 . \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} .1 . \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3).(-1) + (-4) = -1.$$

Věta 2.3.2. Jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikne tak, že některý řádek (sloupec) čtvercové matice $\mathbf{A}$ vynásobíme číslem $k \in \mathbf{R}$, pak platí det $\mathbf{B}$ = k.det $\mathbf{A}$.

D ů k a z: Číslem $k \in \mathbf{R}$ vynásobíme například r-tý sloupec, pak

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r-1} & ka_{1,r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & & & ka_{n,r} & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Rozvojem podle r-tého sloupce dostaneme:

$$\det \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} .ka_{ir} \det \mathbf{B}_{ir} = k. \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} \det \mathbf{A}_{ir} = k.\det \mathbf{A} .$$

Důkaz pro řádky je obdobný.

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$ užitím věty 2.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 4.3.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.5 = 60.$$

Poznámka

Z této věty vyplývá, že determinant, jehož jistý řádek (sloupec) tvoří samé nuly, se rovná nule.

Věta 2.3.3. Vyměníme-li ve čtvercové matici $\mathbf{A}$ navzájem dva řádky (sloupce), pak pro takto vzniklou matici $\mathbf{B}$ platí: det $\mathbf{B}$ = - det $\mathbf{A}$.

D ů k a z provedeme matematickou indukcí pro řádky, pro sloupce je obdobný.

Věta platí pro matici řádu druhého, neboť

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Nechť nyní $n \geq 3$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro matice řádu (n - 1). Dokážeme, že pak platí také pro matice řádu n. Nechť $\mathbf{B}$ je matice řádu n, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tak, že vyměníme její i-tý řádek a k-tý řádek ($i \neq k$). Zvolme $j \neq i$, $j \neq k$ ($1 \leq j \leq n$) a proveďme rozvoj determinantu matice $\mathbf{B}$ podle prvků j-tého řádku. Dostaneme

$$\det \mathbf{B} = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{jp} \det \mathbf{B}_{jp} = -\sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{jp} \det \mathbf{A}_{jp} = -\det \mathbf{A},$$

podle indukčního předpokladu je det $\mathbf{B}_{jp}$ = - det $\mathbf{A}_{jp}$.

Věta 2.3.4. Má-li matice $\mathbf{A}$ dva řádky (sloupce) stejné, pak det $\mathbf{A}$ = 0.

D ů k a z plyne z předcházející věty 3, když oba stejné řádky mezi sebou vyměníme. Dostaneme

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \Rightarrow 2\det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0.$$

Věta 2.3.5. Nechť matice $\mathbf{B}$ vznikne tak, že k p-tému řádku (sloupci) čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n přičteme k násobek, $k \in \mathbf{R}$, q-tého řádku (sloupce), $p \neq q$. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} .$$

D ů k a z provedeme pro sloupce.

Mějme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p-1}, a_{1p}, a_{1,p+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,p-1}, a_{i,p}, a_{i,p+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,p-1}, a_{n,p}, a_{n,p+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

K p-tému sloupci přičteme k-násobek sloupce q-tého, $p \neq q$ a získáme matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p-1}, a_{1,p} + ka_{1,q}, a_{1,p+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,p-1}, a_{i,p} + ka_{i,q}, a_{i,p+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,p-1}, a_{n,p} + ka_{n,q}, a_{n,p+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Rozvojem determinantu matice $\mathbf{B}$ podle p-tého sloupce dostaneme

$$\det \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} (a_{ip} + k a_{iq}) \det \mathbf{B}_{ip} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{ip} \det \mathbf{A}_{ip} + k \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{iq} \det \mathbf{A}_{ip} = \det \mathbf{A},$$

protože druhý součet, násobený číslem k, je vlastně determinant, v němž na místě p-tého sloupce je q-tý sloupec. Tento determinant má tedy dva stejné (q-té) sloupce a podle věty 4 je roven nule.

Důkaz pro řádky lze vést obdobně.

Poznámka

1. Větu 5 můžeme rozšířit:

Determinant matice $\mathbf{A}$ *se nezmění, přičteme-li k p-tému řádku (sloupci) matice* $\mathbf{A}$ *libovolnou lineární kombinaci zbývajících řádků (sloupců).*

2. Větu 5 používáme při výpočtu determinantů vyšších řádů tak, abychom přičtením vhodné lineární kombinace získali v některém řádku (sloupci) co nejvíce nul. Pak provedeme rozvoj podle tohoto řádku (sloupce).

3. Užitím věty 5 můžeme matici převést na matici trojúhelníkovou. Pak platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & & \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}. \dots .a_{nn},$$

tj. determinant se rovná součinu prvků na hlavní diagonále, což vyplývá přímo z věty 1.

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Výhodné bude využít rozvoj podle 4. sloupce. Nejdříve 2. řádek násobený číslem (-3) přičteme k řádku třetímu a 2. řádek přičteme k řádku čtvrtému. První a druhý řádek opíšeme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nyní provedeme rozvoj podle 4. sloupce:

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tento determinant můžeme vypočíst přímo Sarrusovým pravidlem nebo opět rozvojem podle 3. sloupce po úpravách.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} .(-1) \; 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & -7 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -(-56 + 42) = 14.$$

Příklad Úpravou na trojúhelníkový tvar vypočtěme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} .\,2 \;\; (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ .\,2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.6.3 = 18.$$

Kontrolní otázky

1. Jak se nazývá determinant, který vznikne z determinantu původní matice, kde jsme vynechali i-tý řádek a j-tý sloupec.

   a) algebraický doplněk prvku a_{ij},

   b) subdeterminant vzhledem k prvku a_{ij},

   c) geometrický doplněk prvku a_{ij}.

2. Při násobení determinantu číslem $k \in \mathbf{R}$ musíme vynásobit

   a) všechny řádky determinantu,

   b) libovolný 1 řádek (nebo sloupec) determinantu,

   c) všechny sloupce determinantu.

3. Vyměníme-li v determinantu navzájem dva řádky (sloupce), pak nový determinant má

   a) stejnou hodnotu jako původní,

   b) dvakrát větší hodnotu než původní,

   c) opačné znaménko než původní.

4. Kdy se determinant rovná 0?

   a) Když všechny prvky hlavní úhlopříčky jsou rovny jediné,

   b) když se dva řádky (sloupce) rovnají,

   c) když je počet řádků menší než počet sloupců.

5. Sarrusovým pravidlem s provádí výpočet determinantů:

   a) jakéhokoliv řádu,

   b) řádu $n \geq 4$,

   c) třetího řádu.

6. Když k určitému řádku (sloupci) determinantu přičteme k-násobek $(k \neq 1)$ jiného řádku (sloupce) téhož determinantu, hodnota determinantu se

   a) nezmění,

   b) k krát se zvětší,

   c) k krát se zmenší.

7. Hodnota determinantu, který je upraven na trojúhelníkový tvar se rovná

   a) součinu prvků na vedlejší diagonále,

   b) součinu prvků v 1. sloupci,

   c) součinu prvků na hlavní diagonále.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. b); 2. b); 3. c); 4. b); 5. c); 6. a); 7. c).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte determinanty:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix},\quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix},\quad \text{d)}\ \begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{24} & \sqrt{15} \end{vmatrix},\quad \text{e)}\ \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

$$\text{f)}\ \begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a-2 \end{vmatrix},\quad \text{g)}\ \begin{vmatrix} \operatorname{tg}x & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}x \end{vmatrix}.$$

2. Vypočtěte determinanty pomocí Sarrusova pravidla:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix},\quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},\quad \text{d)}\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix},\quad \text{f)}\ \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

3. Řešte rovnice:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & 3 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

4. Vypočtěte determinanty úpravou na trojúhelníkový tvar:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

5. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 8 \\ -3 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \\ -9 & 6 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 10 & -12 \end{vmatrix}$.

6. Ukažte, že platí:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$, b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -x & -x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x^2 & x \\ y^2 & y \end{vmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** -17, **b)** 10, **c)** 22, **d)** $\sqrt{3}$, **e)** $\frac{9}{2}$, **f)** (1 - 2a), g) $\frac{1}{\cos^2 x}$.

2. **a)** -8, **b)** 50, **c)** -18, **d)** -43, **e)** -125, **f)** $(-x^2 + x)$.

3. **a)** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, **b)** $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1$.

4. **a)** 1, **b)** 0, **c)** -6.

5. **a)** 10, **b)** 6, **c)** 1, **d)** 1, **e)** -40, **f)** 24.

Kontrolní test

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}.$$

a) $\cos 2x$, b) 1, c) -1.

2. Vypočtěte determinant pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}.$$

a) -39, b) -8, c) 1.

3. Vypočtěte determinant pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

a) 1, b) -1, c) 2.

4. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} x & -x & x \\ x & x & -x \\ x & -x & -x \end{vmatrix}.$$

a) $4x^3$, b) $-x^3$, c) $-4x^3$.

5. Vypočtěte determinant úpravou na trojúhelníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

a) 20, b) 40, c) -20.

6. Vypočtěte determinant úpravou na trojúhelníkový tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

a) -48, b) 58, c) 62.

7. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

a) -570, b) 121, c) -500.

8. Řešte rovnici

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

a) $x_1 = 1, x_2 = 6$, b) $x_1 = 2, x_2 = 3$, c) $x_1 = -1, x_2 = -6$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. c); 6. a); 7. a); 8. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 6 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.3. znovu.