2.2. Matice

Cíle

Cílem této kapitoly je uvedení pojmu matice a jejich speciálních typů. Čtenář se seznámí se základními vlastnostmi matic a s operacemi s maticemi

Předpokládané znalosti

Předpokladem zvládnutí předloženého tématu je dobrá znalost pojmů a jejich vlastností z kapitoly Vektorové prostory.

Definice 2.2.1.

Schéma m.n reálných (komplexních) čísel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí $\mathbf{A}$ typu (m, n)**.

Poznámka

1. Čísla a_{ij} jsou prvky matice. Přitom a_{ij} značí prvek, který leží v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$. Index i se proto nazývá řádkový index prvku a_{ij} a j sloupcový index prvku a_{ij}.

2. Je-li m = n, pak matici $\mathbf{A}$ nazýváme čtvercovou maticí řádu n.

3. Je-li $\mathbf{A}$ matice řádu n, pak aritmetický vektor (a_{11}, a_{22}, a_{nn}) se nazývá její hlavní diagonála a aritmetický vektor (a_{1n}, $a_{2,n-1}$, … , a_{n1}) její vedlejší diagonála.

4. Každý z m řádků matice $\mathbf{A}$ můžeme chápat jako n-rozměrný aritmetický vektor, každý z n sloupců můžeme chápat jako m-rozměrný aritmetický vektor.

5. Matice budeme označovat velkými písmeny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, … nebo (a_{ij}).

6. Prvky matice $\mathbf{A}$ mohou být také funkce, matice, vektory atd. Příslušné množiny prvků však musí, vzhledem ke sčítání a násobení, splňovat axiomy vektorového prostoru.

Výklad

Pro některé druhy matic zavádíme následující názvy.

1. ***Nulová matice*** $\mathbf{O}$ je matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule.

2. ***Jednotková matice*** $\mathbf{E}$ je čtvercová matice řádu n, jejíž všechny prvky v hlavní diagonále se rovnají 1 ($a_{ii} = 1$) a ostatní prvky jsou rovny 0 ($a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$).

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - jednotková matice 3. řádu.

3. ***Maticí transponovanou*** k matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) rozumíme matici typu (n, m), kterou značíme $\mathbf{A}^T$ a získáme ji z matice $\mathbf{A}$ výměnou řádků za sloupce, tj. $a'_{ij} = a_{ji}$, kde $\mathbf{A}^T = (a'_{ij})$.

4. **Matice** $\mathbf{A}$ se nazývá ***symetrická***, platí-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$. Je to tedy čtvercová matice, jejíž prvky symetricky umístěné vzhledem k hlavní diagonále jsou stejné.

5. **Matice** $\mathbf{A}$ typu (m, n), která má pod, resp. nad diagonálními prvky a_{ii} samé nuly, takže $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, resp. $i < j$, se nazývá ***trojúhelníková***.

Výklad

Základní operace s maticemi

Definice 2.2.2.

Dvě **matice** $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejného typu (m, n) **považujeme za sobě rovné** a píšeme

$\mathbf{A} = \mathbf{B}$, mají-li všechny odpovídající prvky stejné, tj. $a_{ij} = b_{ij}$, pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Definice 2.2.3.

Nechť **matice** $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, jsou téhož typu (m, n). Pak jejich **součtem** rozumíme matici $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Definice 2.2.4.

Součinem matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m, n) a **reálného čísla** k nazýváme matici

$\mathbf{B} = k \,.\, \mathbf{A}$, kde $b_{ij} = ka_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Pro sčítání matic a násobení matice reálným číslem platí:

1. Komutativní zákony

   $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, $\quad k.\mathbf{A} = \mathbf{A}.k$, $\quad k \in \mathbf{R}$.
2. Asociativní zákony

   $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$, $\quad k.(l.\mathbf{A}) = (k.l).\mathbf{A}$, $\quad k, l \in \mathbf{R}$.
3. Distributivní zákony

   $k.(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k.\mathbf{A} + k.\mathbf{B}$, $\quad (k + l)\mathbf{A} = k.\mathbf{A} + l.\mathbf{A}$, $\quad k, l \in \mathbf{R}$.
4. Existence nulové matice

   Existuje taková matice $\mathbf{0}$, že pro každou matici $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.
5. Existence opačné matice

   Ke každé matici $\mathbf{A}$ existuje taková matice $-\mathbf{A}$, že $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Poznámka

Je vidět, že množina všech matic typu (m, n) tvoří vzhledem k operacím sčítání matic a násobení matice reálným číslem vektorový prostor.

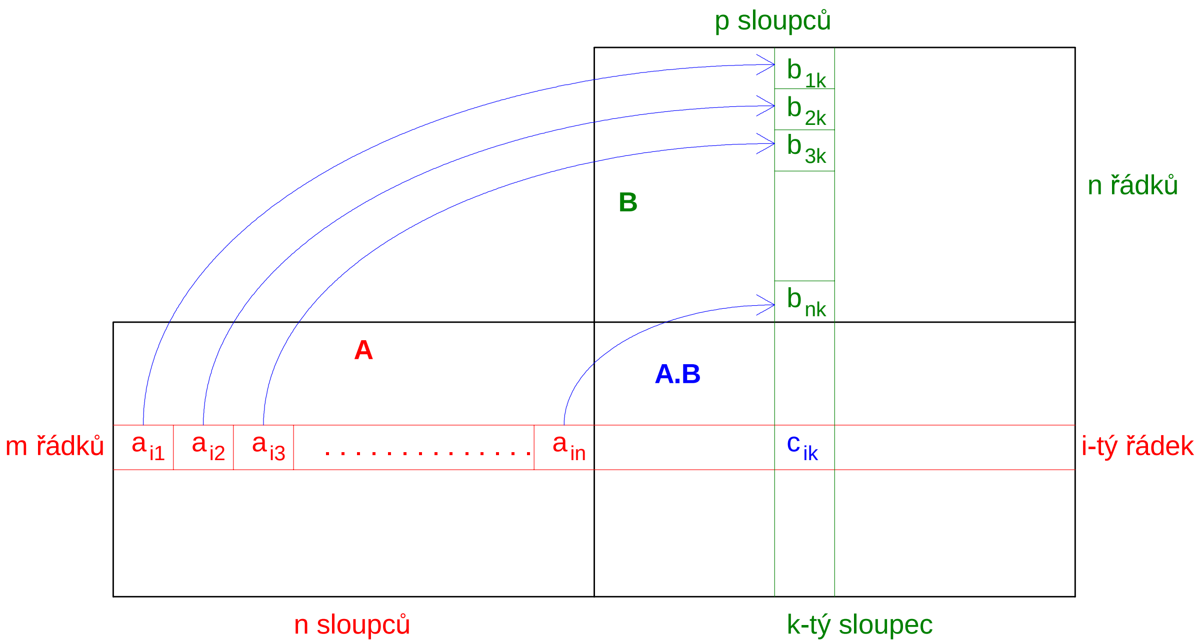
Definice 2.2.5.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je maticí typu (m, n) a $\mathbf{B} = (b_{jk})$ je matice typu (n, p). **Součinem matic** $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ (v tomto pořadí) je matice $\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{B} = (c_{ik})$ typu (m, p), kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \dots + a_{in}.b_{nk}.$$

Výklad

Pro výpočet prvků c_{ik} matice $\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{B}$ je výhodné tzv. ***multiplikační schéma***.



Poznámka

Pro násobení matic platí:

1. *Asociativní zákon*

   $(\mathbf{A}.\mathbf{B}).\mathbf{C} = \mathbf{A}.(\mathbf{B}.\mathbf{C})$.

2. *Distributivní zákony*

   $(\mathbf{A} + \mathbf{B}).\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{C} + \mathbf{B}.\mathbf{C}$ *(pro násobení zprava),*

   $\mathbf{C}.(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C}.\mathbf{A} + \mathbf{C}.\mathbf{B}$ *(pro násobení zleva).*

3. *Existuje jednotková matice* $\mathbf{E}$, *že* $\mathbf{A}.\mathbf{E} = \mathbf{E}.\mathbf{A} = \mathbf{A}$ *pro každou čtvercovou matici* $\mathbf{A}$ *řádu n.*

4. *Pro nulovou matici* $\boldsymbol{O}$ *je vždy* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

5. *Je-li* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$, *pak nemusí být ani* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, *ani* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

6. *Obecně neplatí komutativní zákon, tj. obecně* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A}$.

7. *Existuje-li součin matic* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$, *pak* $(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T.\, \boldsymbol{A}^T$.

Řešené úlohy

Příklad Vypočtěte součin matic $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-6 & -2 \\ -12+12 & 4 \\ 4-9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 \\ 0 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Příklad Ověřte, že pro násobení matic obecně neplatí komutativní zákon.

Řešení:

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \text{ kdežto}$$

$$\mathbf{B}.\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$.

Příklad Vypočtěte součin matic $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

To znamená, že pro matice $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ je $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Příklad Paní Alena jde koupit do obchodu 12 vajec, 6 jablek a 6 hrušek, 12 pomerančů a 3 citróny. Vyjádřeme nákup pomocí následujících řádkového vektoru

$\mathbf{x}$ = [12 (vejce), 6 (jablka), 6 (hrušky), 12 (pomeranče), 3 (citróny)] = (12, 6, 6, 12, 3).

Předpokládejme, že vejce jsou po 2 Kč za kus, jablka po 5 Kč, hrušky a pomeranče po 4 Kč a citróny po 3 Kč za kus. Pak můžeme ceny těchto druhů zboží zapsat jako sloupcový vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Kč za vejce,} \\ \text{Kč za jablko,} \\ \text{Kč za hrušku,} \\ \text{Kč za pomeranč,} \\ \text{Kč za citrón.} \end{array}$$

Celkovou částku, kterou paní Alena v obchodě zaplatí, můžeme nyní vypočíst součinem vektorů $\mathbf{x}.\mathbf{y}$, kde vektor $\mathbf{x}$ vyjadřujemnožství jednotlivých druhů a vektor $\mathbf{y}$ ceny jednotlivých druhů.

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = (12, 6, 6, 12, 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 12.2 + 6.5 + 6.4 + 12.4 + 3.3 = 135 \text{ Kč}.$$

Příklad V příkladu 4. nyní předpokládáme, že paní Alena může nakupovat ve dvou obchodech, ve kterých se ceny poněkud liší.

Nechť vektor cen v druhém obchodě je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Kč za vejce,} \\ \text{Kč za jablko,} \\ \text{Kč za hrušku,} \\ \text{Kč za pomeranč,} \\ \text{Kč za citrón.} \end{matrix}$$

Paní Alena má možnost nakoupit všechno buď v 1. nebo ve 2. obchodě nebo může nakoupit v každém obchodě jen to zboží, které je tam levnější. Abychom jí pomohli se rozhodnout, utvoříme matici cen:

$$\begin{array}{cccc} & \textit{Ceny v 1. obchodě} & \textit{Ceny v 2. obchodě} & \textit{Nejmenší cena} \\ \mathbf{C} = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

První sloupec udává ceny v 1. obchodě, druhý sloupec ceny v 2. obchodě, třetí sloupec udává vždy menší z obou příslušných cen. Abychom sestavili účet pro všechny tři možnosti nákupu, vypočteme součin $\mathbf{x}.\mathbf{C}$.

$$\mathbf{x}.\mathbf{C} = (12, 6, 6, 12, 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (135, 156, 126).$$

Vidíme tedy, že paní Alena zaplatí v 1. obchodě 135 Kč, ve 2. obchodě 156 Kč, ale když koupí každé zboží tam, kde je levnější, zaplatí jen 126 Kč.

Kontrolní otázky

1. Matice $\mathbf{A}$ typu (m,n) je

   a) schéma $m+n$ prvků, b) reálné číslo, které je ukryto ve schématu matice, c) schéma $m \cdot n$ prvků.
2. Matice $\mathbf{A}$ typu (m,n) má

   a) m sloupců, b) n sloupců, c) $m+n$ sloupců.
3. Matice $\mathbf{A}^T$ transponovaná k matici $\mathbf{A}$ typu (m,n) je

   a) typu (n,m), b) typu (m,n), c) neexistuje, protože $\mathbf{A}$ není čtvercová.
4. Dvě matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$ můžeme sečíst pouze pokud

   a) počet sloupců první matice je stejný jako počet řádků druhé matice,

   b) obě matice jsou stejného typu,

   c) obě matice jsou čtvercové.
5. Matici $\mathbf{A}$ typu (m,n) násobíme reálným číslem k tak, že

   a) vynásobíme číslem k libovolný řádek matice,

   b) vynásobíme číslem k všechny prvky hlavní diagonály,

   c) vynásobíme číslem k všechny prvky matice $\mathbf{A}$.
6. Sčítání dvou matic je

   a) komutativní a asociativní, b) není komutativní a je asociativní, c) není komutativní ani asociativní.

7. Součin matic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (v tomto pořadí) můžeme provést pouze pokud

   a) jsou obě stejného typu, b) mají stejný počet sloupců, c) počet sloupců matice $\mathbf{A}$ je stejný jako počet řádků matice $\mathbf{B}$.

8. Při součinu dvou matic $\mathbf{A},\mathbf{B}$

   a) záleží na pořadí matic,

   b) nezáleží na pořadí matic,

   c) nezáleží na pořadí matic, pokud $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jsou čtvercové.

Odpovědi na kontrolní otázky

1. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. c);, 6. a); 7. c); 8. a).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Proveďte explicitní tabulkový zápis matice

a) $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je typu (3, 5) a $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 2 & \text{pro } i \neq j, \end{cases}$

b) $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je řádu 4 a $\begin{cases} b_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \\ b_{ij} = 3 & \text{pro } i > j, \end{cases}$

c) $\mathbf{C} = (c_{ij})$ je typu (2, 6) a $c_{ij} = i + j$.

2. Najděte matice $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, které pro matice

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ vyhovují těmto vztahům:

a) $\mathbf{X} + \mathbf{A} = \mathbf{B}$,

b) $3\mathbf{A} + 2\mathbf{X} = -\mathbf{B}$.

3. Proveďte následující operace:

$$\mathbf{X} = 2\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Zjistěte, pro která x, y platí:

$$\begin{pmatrix} 2x + 5y & 4 \\ 9 & 2y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 9 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Stanovte čísla x, y tak, aby matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3x+2 \\ 3y+6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{byla transponovaná k matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Vypočtěte součet daných matic:

a) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}.\mathbf{A}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}.\mathbf{A}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

f) $\mathbf{A}^2$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Předpokládejme, že stavitel přijal zakázku na pět domů I. typu, sedm domů II. typu a dvanáct domů III. typu. Tuto zakázku můžeme vyjádřit pomocí řádkového vektoru

$\mathbf{x} = (5, 7, 12)$. Staviteli je známo, kolik surovin jednotlivých druhů a kolik práce se spotřebuje na každý typ domu. Předpokládejme, že tyto „suroviny“ jsou ocel, dřevo, sklo, barva a práce. Čísla uvedená v matici $\mathbf{R}$ udávají množství suroviny každého druhu spotřebované na každý typ domu, vyjádřené ve vhodných jednotkách. (Čísla v příkladu jsou volena libovolně, nikoli tak, aby odpovídala skutečnosti).

Ocel ***Dřevo*** ***Sklo*** ***Barva*** ***Práce***

$$\mathbf{R} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{I. typ} \\ \text{II. typ} \\ \text{III. typ .} \end{array} \end{array}$$

Každý řádek matice je vektor udávající množství každého druhu suroviny spotřebované na daný typ domu. Každý sloupec matice je vektor udávající množství daného druhu suroviny pro jednotlivé typy domů. Matice je zřejmě velmi stručný způsob zápisu této informace. Vypočtěte množství surovin každého druhu, které stavitel potřebuje ke splnění zakázky.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2. a) $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\mathbf{X} = \frac{1}{2}(-\mathbf{B} - 3\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -4 & -3 \\ -1 & \frac{3}{2} & -5 \end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -9 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$.

4. $x = -\frac{2}{5}$, $y = 1$.

5. $x = \frac{4}{3}$, $y = 2$.

6. a) $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 29 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \,.\, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 19 \\ -8 & 2 & 6 \\ -1 & 9 & 17 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -19 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \,.\, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & -19 & 1 & 16 \\ -5 & 17 & -9 & -12 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, **d)** $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -1 \\ -14 & -14 & 11 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, **f)** $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{x}\,.\,\mathbf{R} = (146, 526, 260, 158, 388)$.

Kontrolní test

1. Rozhodněte, zda matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou si rovny:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, b) $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$.

2. Pro která x, y platí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2x+y \\ 3y+1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3x+1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $x=2, y=3$, b) $x=1, y=3$.

3. Vypočtěte matici $\mathbf{X}=2\mathbf{A}-5\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 44 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 39 \end{pmatrix}$.

4. Vypočtěte součet matic $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Vypočtěte transponovanou matici $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ k matici

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

6. Vypočtěte součin matic $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$.

7. Vypočtěte součin matic $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix}7 & 15\\ 7 & 20\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 4\\ 6 & 12 & 2\end{pmatrix}$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. a); 5. b); 6. a); 7. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 5 případech, pokračujte další kapitolou. V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.2. znovu.