

# 10. Neurčitý a určitý integrál

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

# Osnova:

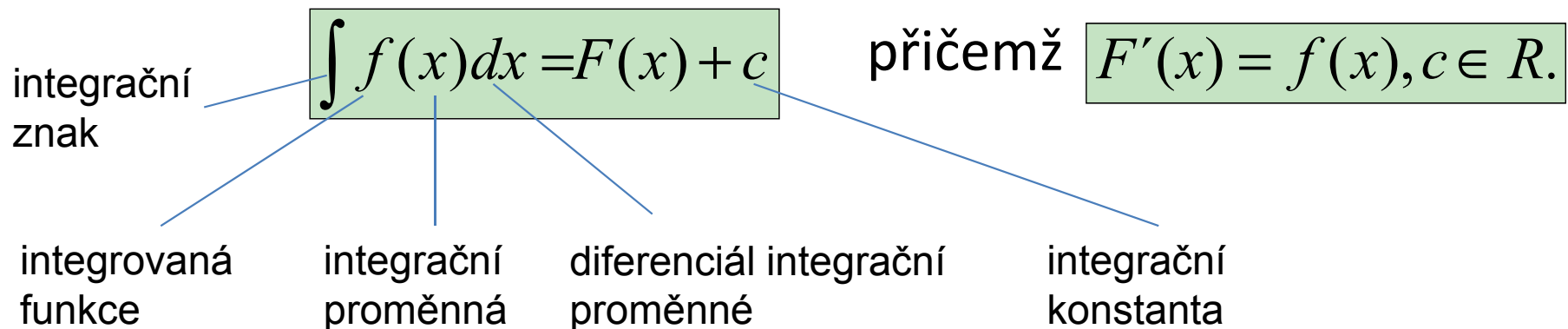
- 1 Neurčitý integrál
- 2 Geometrická interpretace
- 3 Základní vzorce pro integrování
- 4 Určitý integrál
- 5 Užití integračního počtu
  5. 1 Obsah rovinného útvaru
  5. 2 Další příklady využití

# 1 Neurčitý integrál

Funkce  $F$  se nazývá primitivní k funkci  $f$  na intervalu  $(a;b)$ , jestliže pro každé  $x \in (a;b)$  platí:

$$F'(x) = f(x)$$

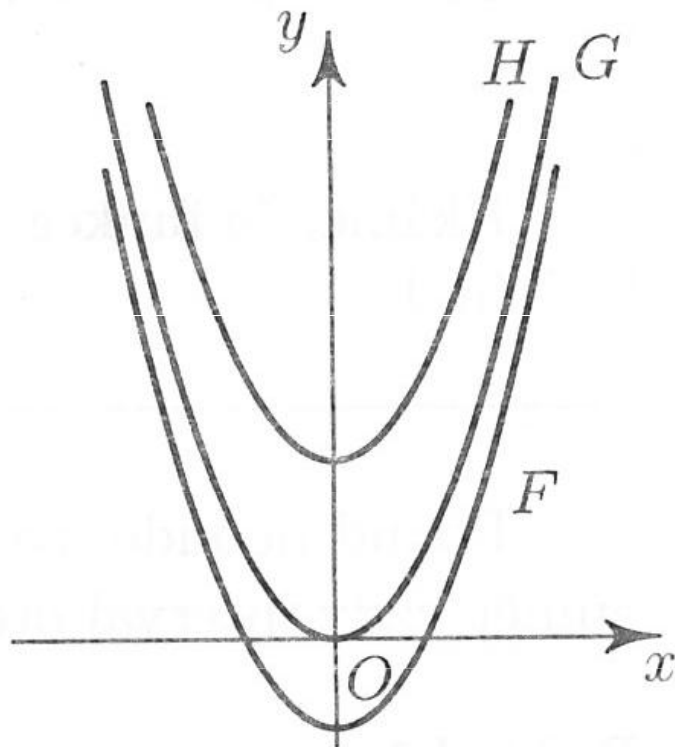
Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci  $f$  nazýváme **neurčitým integrálem funkce  $f$**  a zapisujeme:



Výpočet neurčitého integrálu  $\int f(x) dx$  = integrování funkce  $f$

## 2 Geometrická interpretace

Známe-li graf jedné primitivní funkce  $F$  k funkci  $f$  na intervalu  $J$ , pak grafy všech primitivních funkcí k funkci  $f$  v intervalu  $J$  dostaneme posunutím grafu funkce  $F$  ve směru osy  $y$ .



$$\begin{aligned}G(x) &= F(x) + C \\H(x) &= F(x) + C'\end{aligned}$$

Na obrázku jsou uvedeny grafy některých primitivních funkcí k funkci  $f(x) = 2x$ . Všechny tyto primitivní funkce k funkci  $f(x)$  lze vyjádřit ve tvaru  $F(x) = x^2 + C$ , kde  $C \in \mathbb{R}$ .

# 3 Základní vzorce

Funkce $f: y = f(x)$	Vzorec pro neurčitý integrál $\int f(x) dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$	Podmínky platnosti vzorce ( $x \in D(F)$ )
$y = 0$	$\int 0 dx = c (c \in \mathbb{R})$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = 1$	$\int dx = x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^k, k \in \mathbb{Z}, k \neq -1$	$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$ pro $k > 0$ ( $k \in \mathbb{N}$ ) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ pro $k < 0$
$y = x^r, r \in \mathbb{R}, r \neq -1$	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + c$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$
$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$

Existují-li v otevřeném intervalu  $J$  primitivní funkce  $k$  funkcím  $f(x)$ ,  $g(x)$  a jsou-li  $c_1$ ,  $c_2$  libovolné konstanty, pak platí následující vztahy:

$$\int c_1 f(x) dx = c_1 \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx$$

### Úlohy:

Vypočítejte integrály:

a)  $\int (x^3 - 6x^2 + 5x - 4) dx =$

b)  $\int (x - 1)^2 dx =$

c)  $\int (2 - \sqrt{x})^2 dx =$

d)  $\int (x - 1)^2 (x^2 + 1) dx =$

e)  $\int ((3x^2 + 4x + 2) / 3x) dx =$

f)  $\int (3 \cdot 2^x - 5\sin x + 1) dx =$

g)  $\int \frac{x^2 \sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[4]{x}}{x\sqrt{x}} dx =$

# 4 Určitý integrál

Nechť  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  v intervalu  $I$ . Rozdíl  $F(b) - F(a)$  funkčních hodnot funkce  $F$  v libovolných bodech  $a, b$  tohoto intervalu se nazývá **určitý integrál funkce  $f$**  v mezích od  $a$  do  $b$  a značí se:

Horní mez

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dolní mez

Při výpočtu integrálu zpravidla využíváme tento způsob zápisu:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

## Úlohy:

Vypočítejte integrály:

$$a) \int_{-1}^2 3x^2 dx =$$

$$d) \int_0^2 (3x^3 - 2x + 5) dx =$$

$$b) \int_0^1 e^x dx =$$

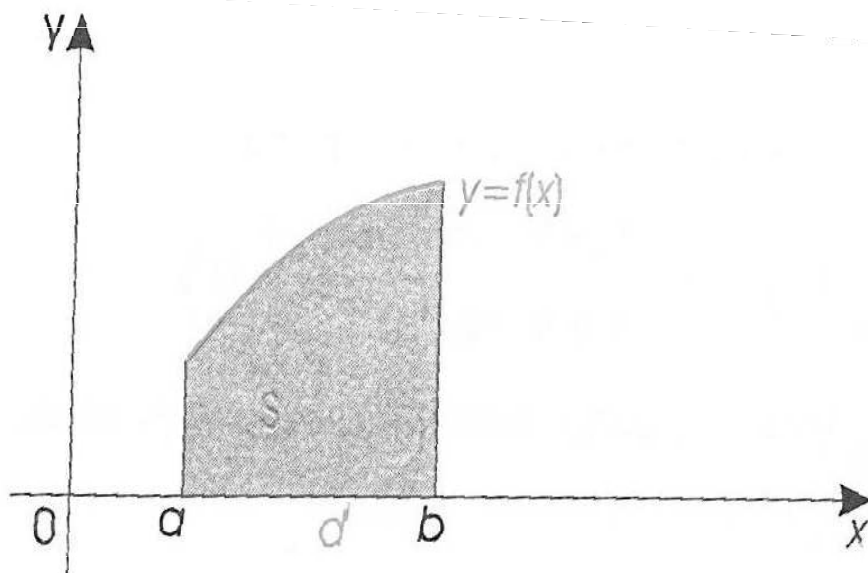
$$e) \int_1^4 \left( -x + \frac{4}{x} \right) dx =$$

$$c) \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx =$$

# 5 Užití integračního počtu

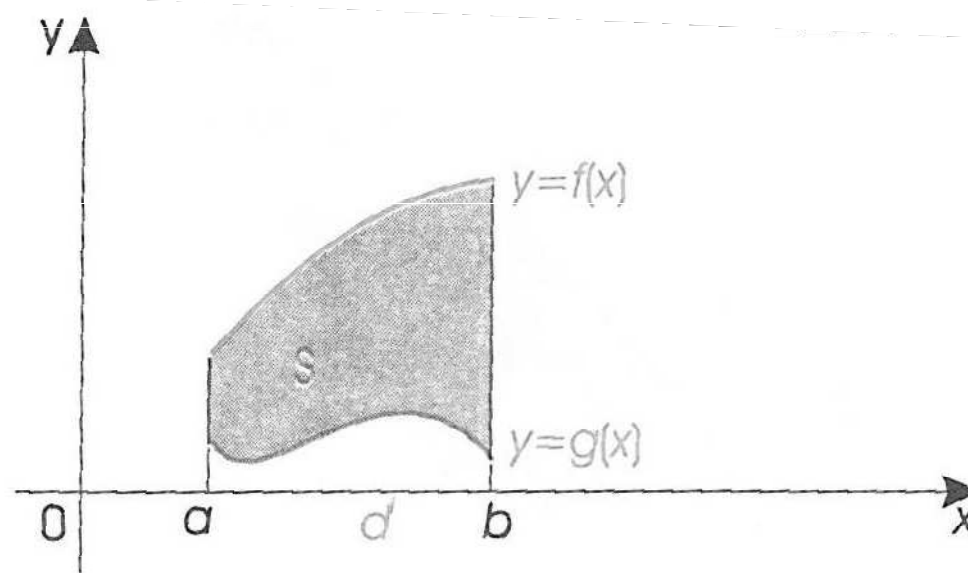
## 5. 1 Obsah rovinného útvaru

a) Obsah křivočarého lichoběžníku:



$$s = \int_a^b f(x) dx$$

b) Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí f(x) a g(x):



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



# Úlohy

- 1) Vypočítejte obsah rovinného útvaru, který je ohraničen křivkami  $f: y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ .
- 2) Vypočítejte obsah rovinného útvaru, který je omezen křivkou  $y = x^2 - 4$  a osou  $x$ .
- 3) Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí  $f: y = 2 - x^2$ ,  $g: y = x$ .

# 5 Užítí integračního počtu

## 5. 2 Další příklady využití

- a) Výpočet objemu rotačního tělesa
- b) Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa
- c) Fyzikální aplikace (dráha přímočarého pohybu, práce)

# Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.