

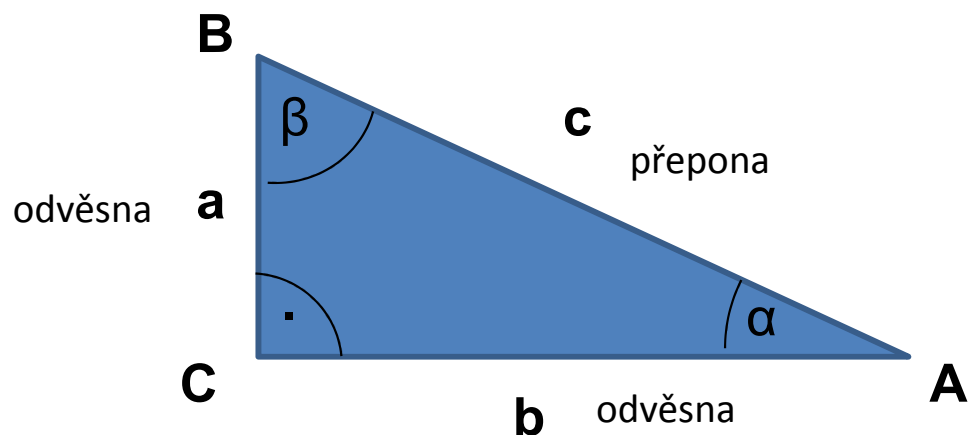
# Goniometrické funkce a rovnice

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

# 1 GONIOMETRICKÉ FUNKCE OSTRÉHO ÚHLU



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

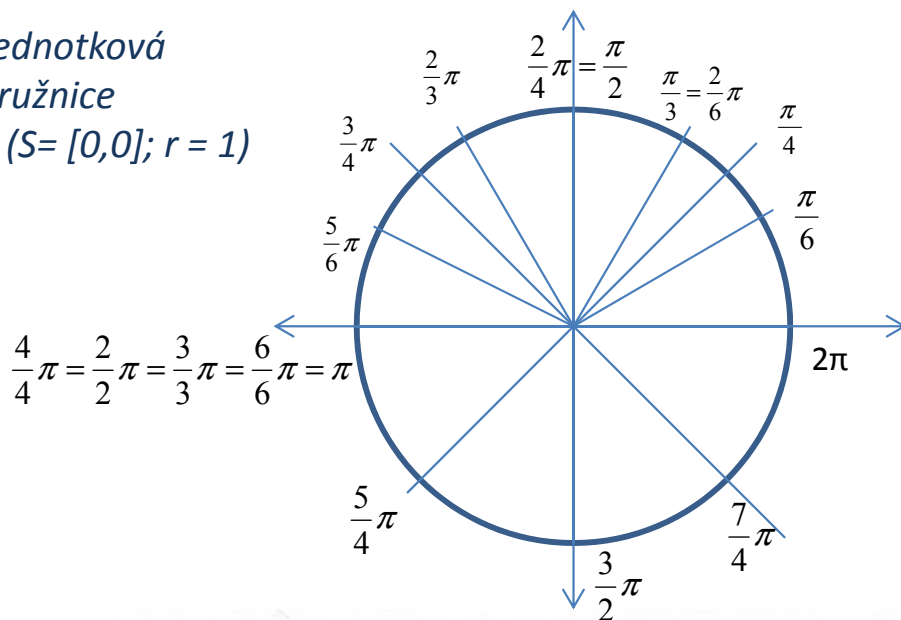
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přilehlé odvěsny}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka protilehlé odvěsny}}$$

## 2 Velikost úhlů v obloukové a stupňové míře

Jednotková  
kružnice  
 $k(S=[0,0]; r=1)$



$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57^\circ 17'$$

$$\frac{x \cdot 180^\circ}{\pi} = \alpha^\circ$$

$$\frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = x$$

$\alpha^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$x \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$

### Úlohy

**Př.1:** Vyjádřete v míře obloukové:

- a)  $\alpha = 40^\circ$   
b)  $\alpha = 150^\circ$

**Př.2:** Vyjádřete v míře stupňové:

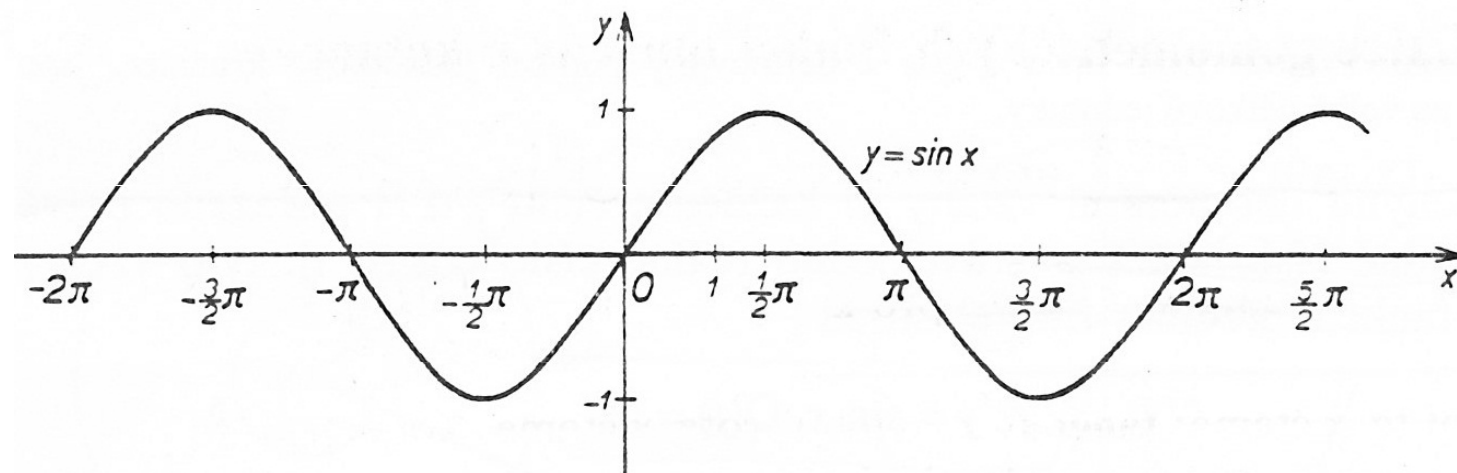
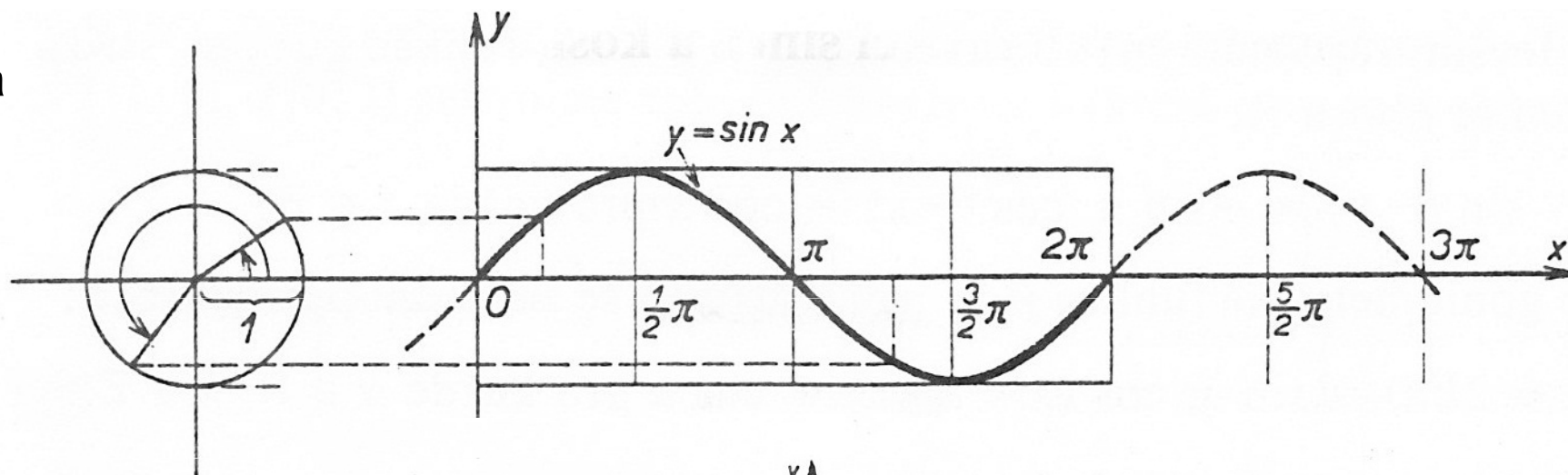
- a)  $x = \frac{9}{10}\pi$   
b)  $x = \frac{7}{2}\pi$



# 3.1 Graf funkce sinus

$$f : y = \sin x$$

= sinusoida



## Vlastnosti:

$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1; 1 \rangle$$

Je **lichá**:  $\sin(-x) = -\sin x$ .

Je **rostoucí** pro  $x \in \langle -\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Je **klesající** pro  $x \in \langle \pi/2 + 2k\pi; 3\pi/2 + 2k\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Omezená** v celém definičním oboru shora i zdola.

**Maximum**  $[\pi/2 + 2k\pi, 1]$ , **minimum**  $[3\pi/2 + 2k\pi, -1]$ .

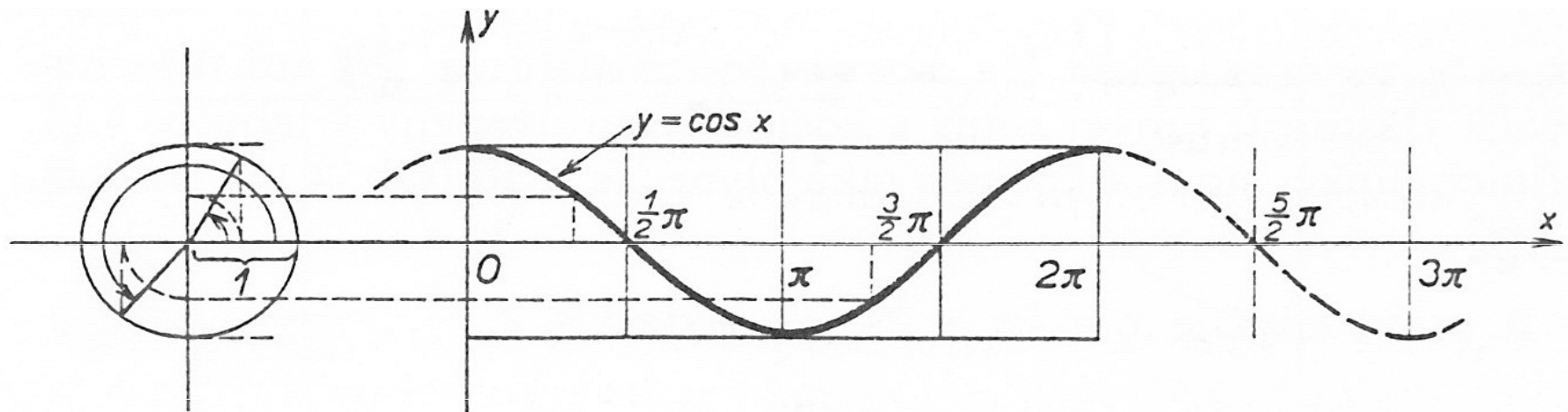
**Perioda  $2\pi$** :  $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Je **spojitá** v  $\mathbb{R}$ .

## 3.2 Graf funkce cosinus

$$f : y = \cos x$$

= cosinusoida



### Vlastnosti:

$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1; 1 \rangle$$

Je **sudá**:  $\cos(-x) = \cos x$ .

Je **rostoucí** pro  $x \in \langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Je **klesající** pro  $x \in \langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Omezená** v celém definičním oboru shora i zdola.

**Maximum**  $[2k\pi, 1]$ , **minimum**  $[\pi + 2k\pi, -1]$ .

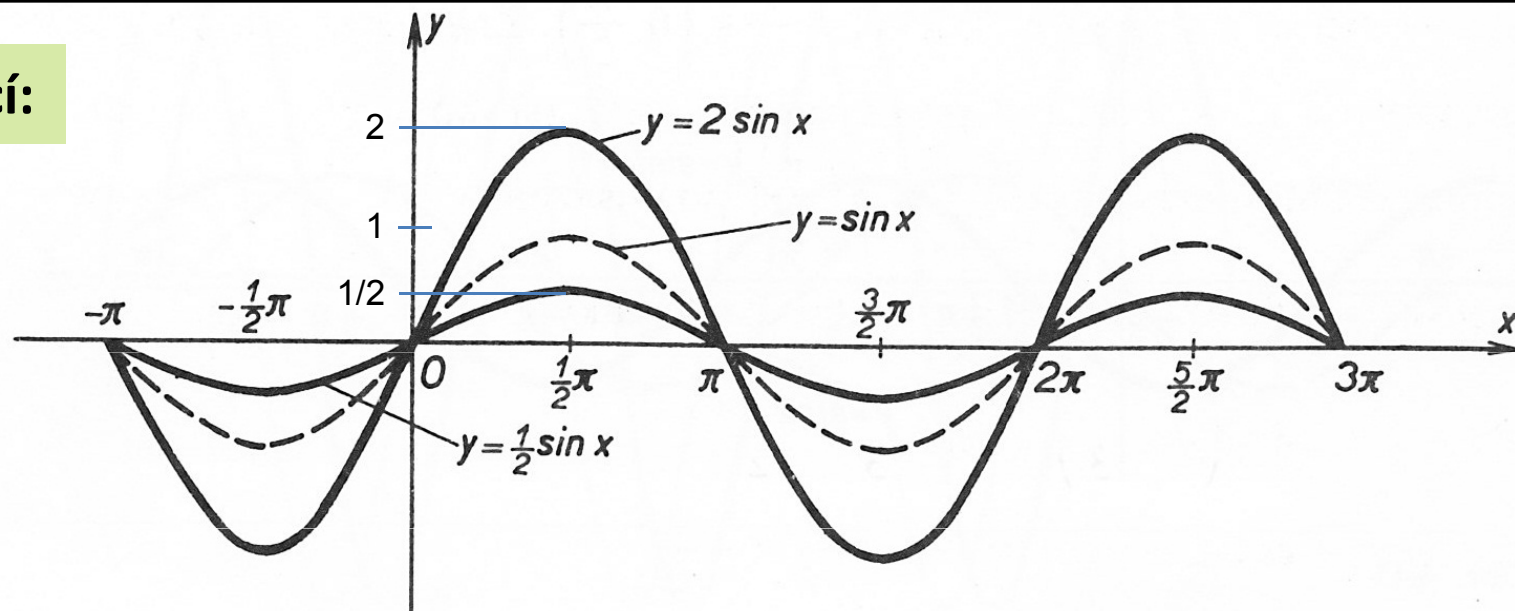
**Perioda**  $2\pi$ :  $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Je **spojitá** v  $\mathbb{R}$ .

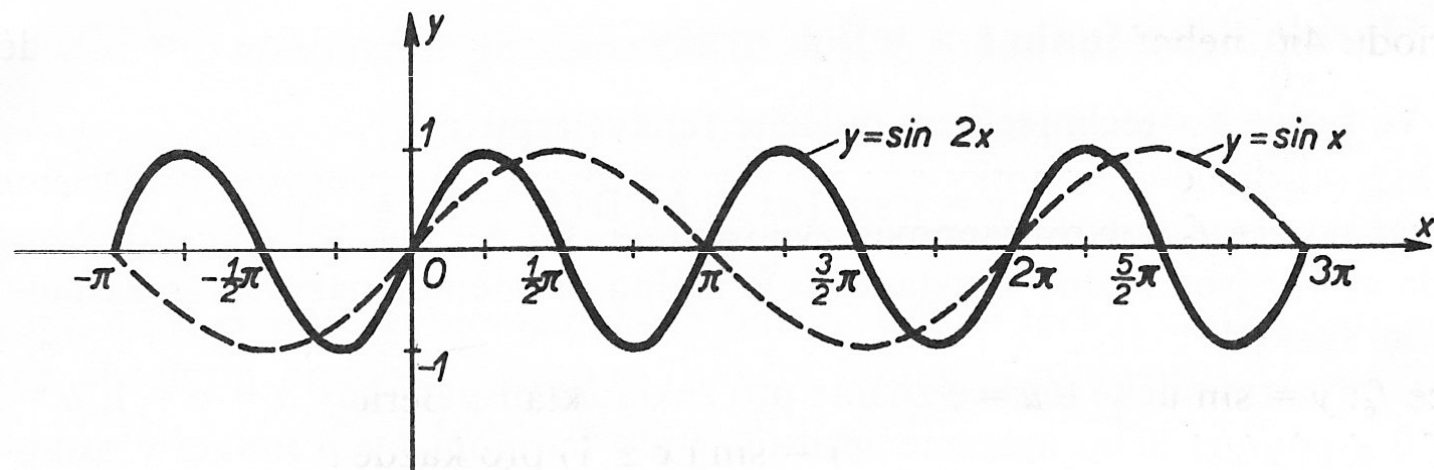
## Příklady grafů funkcí:

$$f: y = 2 \sin x$$

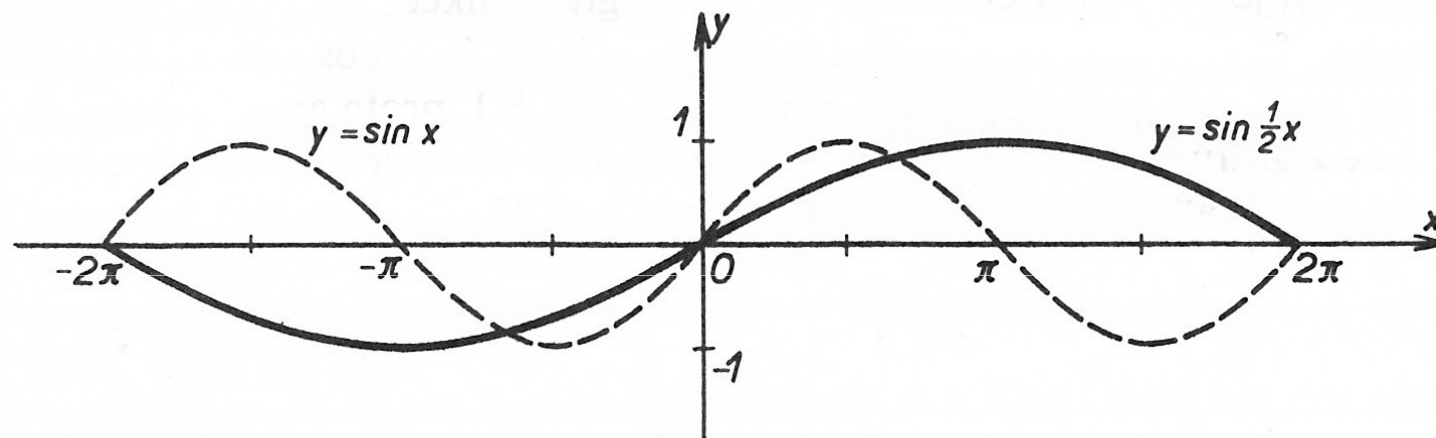
$$f: y = \frac{1}{2} \sin x$$



$$f: y = \sin 2x$$

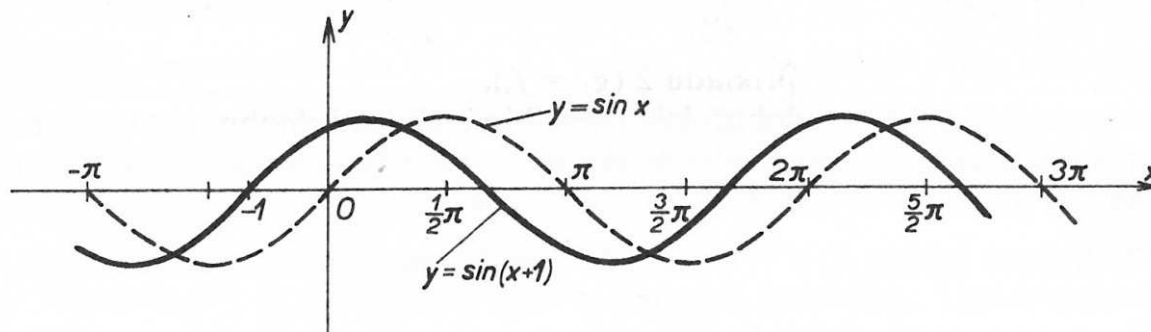


$$f: y = \sin \frac{1}{2} x$$

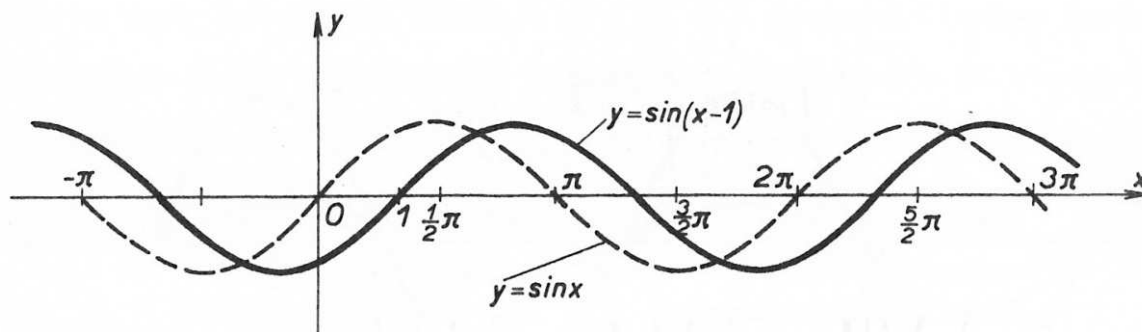


## Příklady grafů funkcí:

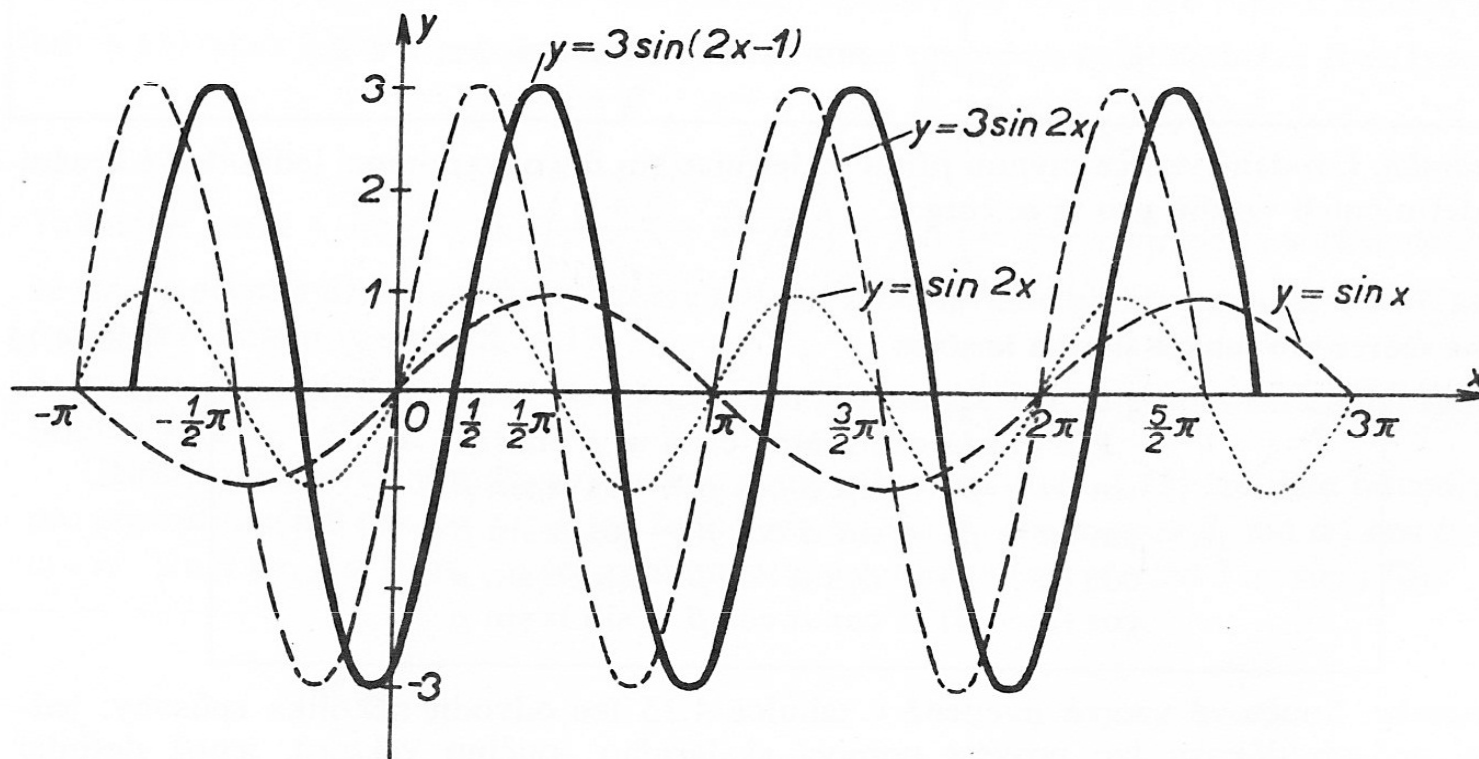
$$f : y = \sin(x+1)$$



$$f : y = \sin(x-1)$$



$$f : y = 3 \sin(2x-1)$$

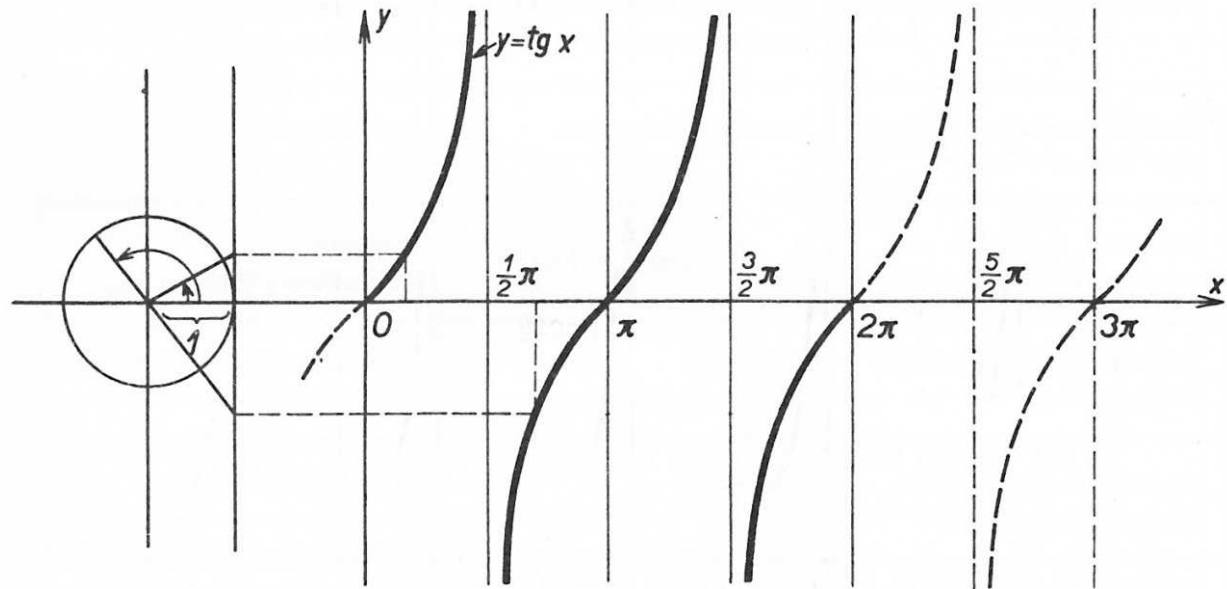




# 4 Graf funkce tangens

$$f : y = \operatorname{tg} x$$

= tangentoidea



Vlastnosti:

$$D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}, H(f) = \mathbb{R}$$

Je **lichá**:  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ .

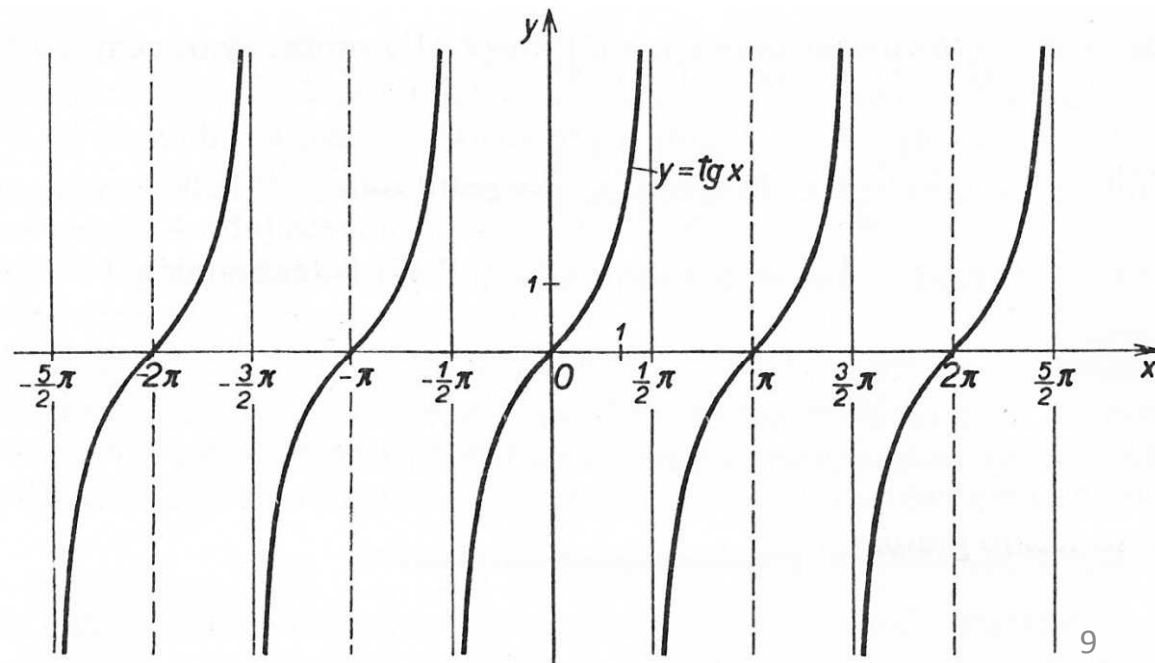
Je **rostoucí** pro  $x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Není omezená** shora ani zdola.

Maximum ani minimum  
neexistuje.

**Perioda  $\pi$** :  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

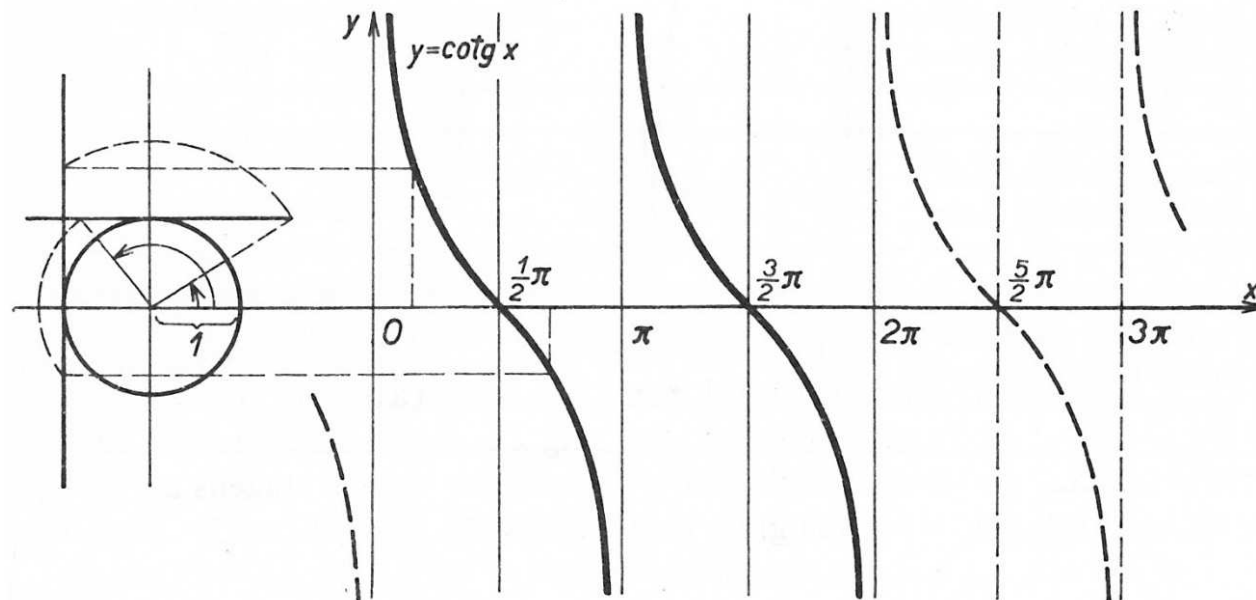
Spojitosť: Není definována pro  
 $x = (2k+1)\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



# 5 Graf funkce cotangens

$$f : y = \cotg x$$

= cotangentoida



## Vlastnosti:

$$D(f) = R - \{k\pi\}, k \in Z, H(f) = R$$

Je **lichá**:  $\cotg(-x) = -\cotg x$ .

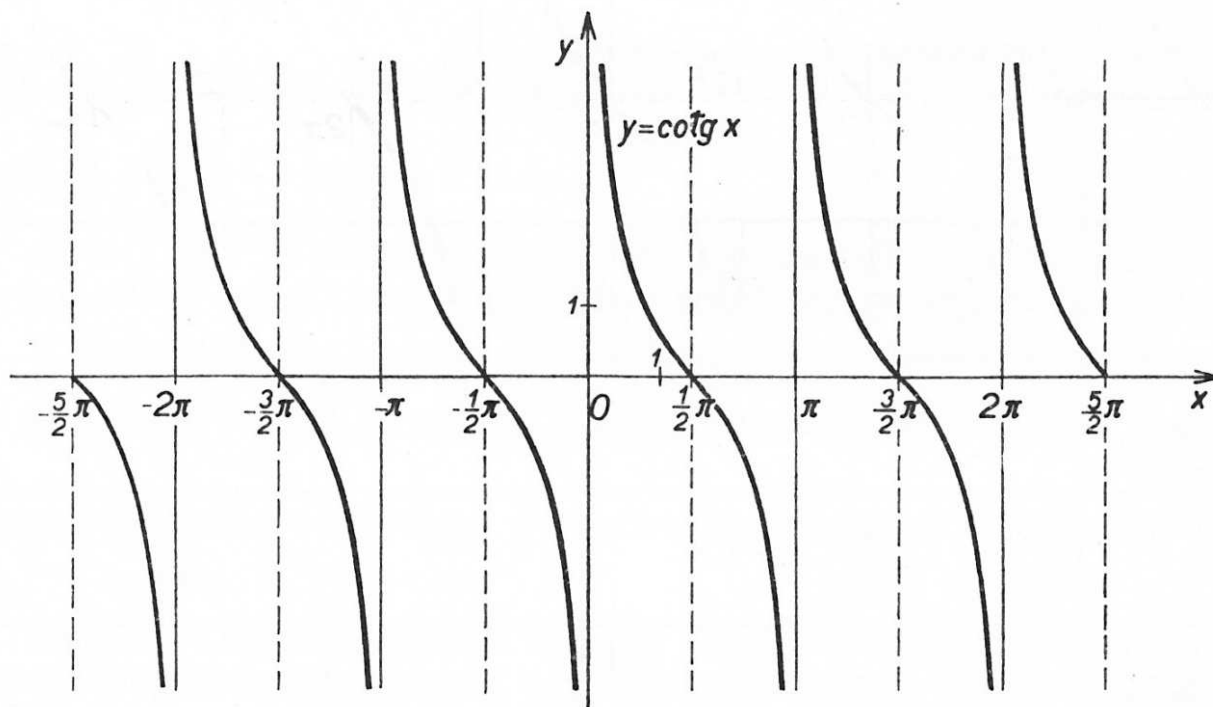
Je **klesající** pro  $x \in (k\pi; \pi + k\pi)$ ,  $k \in Z$ .

**Není omezená** shora ani zdola.

Maximum ani minimum neexistuje.

**Perioda  $\pi$** :  $\cotg x = \cotg(x + k\pi)$ ,  $k \in Z$ .

Spojitosť: Není definována pro  $x = 2k\pi/2$ ,  $k \in Z$ .



## 6 Důležité hodnoty goniometrických funkcí

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\operatorname{cotg} x$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

## 7 Znaménka hodnot goniometrických funkcí

Kvadrant	I.	II.	III.	IV.
Interval argumentu $x$	$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

# Úlohy

Př.: Vypočítejte:

$$a) \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$b) \cos \frac{7}{6} \pi =$$

$$c) \cos \frac{13}{4} \pi =$$

$$d) \sin \frac{14}{3} \pi =$$

$$e) \cos \left( -\frac{2}{3} \pi \right) =$$

$$f) \sin \left( -\frac{21}{4} \pi \right) =$$

$$g) \operatorname{tg} \left( -\frac{19}{6} \pi \right) =$$

# 8 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

## Základní vzorce:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R}$$

---

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

---

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

# 8 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

## Vztahy pro dvojnásobek a polovinu argumentu:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}\end{aligned}$$

## Součtové vzorce:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

# Úlohy

Př.: Zjednodušte goniometrické výrazy:

$$a) \sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x =$$

$$b) \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} =$$

$$c) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x} =$$

$$d) \frac{1 + \cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x} =$$

$$e) \frac{1 + \cot^2 x}{\cot^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} =$$



# 9 GONIOMETRICKÉ ROVNICE

## 9.1 Základní goniometrické rovnice - jsou dány ve tvaru:

některá z goniometrických  
funkcí sin, cos, tg, cotg

$$g(x) = a$$

reálné číslo

## Úlohy

**Př.1:** a)  $\sin x = -0,5$

d)  $\cotg x = 1$

b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e)  $\sin x = -1$

c)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

f)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 9.2 Složitější goniometrické rovnice – řešíme převedením na základní goniometrické rovnice (pomocí substituce, nebo s použitím vzorců pro goniometrické funkce).

## Úlohy

**Př.1:** Řešte užitím substituce:

a)  $2 \sin(3x + \pi) = -1$

b)  $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$

**Př.2:** Řešte užitím goniometrických vzorců:

a)  $\cos x + \cotg x = 1 + \sin x$

# 10 Další využití goniometrických funkcí: TRIGONOMETRIE

## Sinová věta:

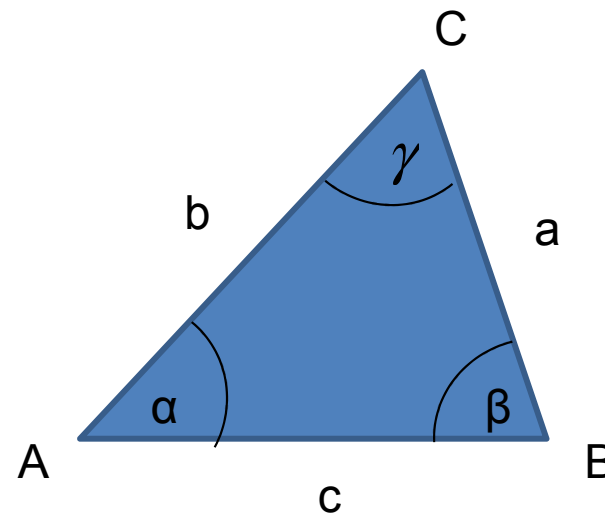
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

## Kosinová věta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



## Užití sinové a kosinové věty:

*Např.: Při výpočtu výslednice dvou sil, které spolu svírají úhel  $\alpha$ .*

# Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Matematika pro gymnázia – Goniometrie. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.