Kombinatorika: domácí úkol na 13. a 14. listopadu 2013

Faktoriály a kombinační čísla

Vypracované přineste ke kontrole 20. nebo 21. listopadu 2013.

1. Dokažte, že pro přirozená čísla $p \geq q$ platí $\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-2}{q-1} + \cdots + \binom{q-1}{q-1}$
2. (a) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$
   (b) $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$
   (c) $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$
3. Dokažte (nebo alespoň pro některá n, m a k ověřte, že platí) následující identity:
   (a) $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$
   (b) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{m}{k}\binom{n}{m}$ pro $0 \leq k \leq m \leq n$

   (a) opakovaným použitím vzorce $\binom{p}{q} + \binom{p}{q+1} = \binom{p+1}{q+1}$;
   (b) kombinatorickou úvahou;
   (c) matematickou indukcí.
4. Dokažte, že součin k po sobě jdoucích celých čísel je vždy dělitelný $k!$
5. Užitím binomické věty vypočtěte: (a) 99^5 (b) 101^5