MA2BP_PGE, 9. ledna 2014

1. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ jsou dány body:

$$A = [0, 6, 7],\ B = [6, -2, 7],\ C = [6, -2, -3],\ D = [0, 6, -3],\ E = [-5, -4, 2].$$

+ Dokažte, že body A, B, C, D leží v jedné rovině a že bod E v této rovině neleží.
+ Určete rovnicové (neparametrické) vyjádření roviny $\rho = ABCD$.
+ Určete barycentrické souřadnice bodu D vzhledem ke trojici bodů A, B, C.
+ Určete objem jehlanu $ABCDE$.

2. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ jsou dány afinní podprostory:

$$\mathcal{B} = \{[1, 1, 2, 4] + t(1, 1, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{[3, 4, 0, 3] + s_1(0, 1, 0, 1) + s_2(1, 0, 0, 0) : s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze těchto podprostorů a jejich rovnicová vyjádření.
+ Určete vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Udejte příklad dvou kolmých nadrovin ve čtyřrozměrném eukleidovském prostoru.

4. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (0, 9, 0, 1),\ \mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, 4),\ \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 0).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ a ukažte, že $\mathbf{w}$ je kolmý ke každému z daných vektorů.
+ Dokažte, že předchozí vlastnost platí obecně.

5. V eukleidovské rovině $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ jsou dány transformace:

f_1 = stejnolehlost se středem $S_1 = [1, 2]$ a koeficientem $k_1 = 3$,
f_2 = stejnolehlost se středem $S_2 = [3, 1]$ a koeficientem $k_2 = 2$.

+ Určete analytická vyjádření těchto dvou transformací.
+ Určete druh a určující prvky transformace $f = f_2 \circ f_1$.

6. Udejte příklad afinní transformace v rovině, která má přímku samodružných bodů a modul roven -1.

7. Dokažte, že každé podobné zobrazení je prosté.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů, k ústní zkoušce potřebujete aspoň 42 bodů.