MA2BP_PGE, 15. ledna 2014

1. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ jsou dány body:

$$A = [-1,-1,1],\ B = [0,-1,2],\ C = [1,-2,1],\ D = [0,2,2],\ E = [1,0,-1].$$

+ Dokažte, že body A, B, C jsou v obecné poloze.
+ Dokažte, že body D a E leží v opačných poloprostorech vymezených rovinou $\rho = ABC$.
+ Rozhodněte, zda jsou body D a E souměrné podle roviny $\rho = ABC$.
+ Určete objem mnohostěnu $ABCDE$.

2. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ jsou dány afinní podprostory:

$$\mathcal{B} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] : x_1 - x_2 - x_4 = 1,\ x_3 = 1\},$$
$$\mathcal{C} = \{[2,0,1,4] + t(1,1,2,0) : t \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete dimenze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, parametrické vyjádření $\mathcal{B}$ a rovnicové (neparametrické) vyjádření $\mathcal{C}$.
+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete odchylku $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. Udejte příklad dvou netriviálních podprostorů, které jsou kolmé a mají vzdálenost 15.

4. V eukleidovském prostoru $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (1,1,-1),\ \mathbf{v} = (1,1,0).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, odchylku $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a ukažte, že platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha.$$

+ Dokažte, že předchozí rovnost platí obecně.

5. V eukleidovské rovině $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ jsou dány transformace f_1 a f_2 následujícími maticemi (vzhledem ke standardním homogenním souřadnicím):

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

+ Určete analytické vyjádření a samodružné body transformace $f = f_2 \circ f_1$.
+ Určete druh a určující prvky transformace $f = f_2 \circ f_1$.

6. Udejte příklad afinní transformace v rovině, která má modul roven 1 a bod $A = [2,2]$ zobrazuje na bod $A' = [0,2]$.

7. Dokažte, že každá podobnost, která není shodností, má právě jeden vlastní samodružný bod.

Každý úkol je hodnocen 6 body, maximální možný zisk je 84 bodů; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 42 bodů.